

# 强非线性水平混沌振动台

龙运佳<sup>①</sup> 苏元升

(中国农业大学)

欧阳怡

(中国科学院力学研究所)

侯长革

(机械部机械科学研究院)

**提 要** 该文研究了一种水平混沌振动台,机构的运动微分方程是强非线性的,数值仿真和实验结果表明,该振动台的动态响应是混沌的,且敏感依赖于初始条件。

**关键词** 混沌 振动台 数值仿真 动态响应

## A Strong Nonlinear Horizontal Chaotic Vibrator

Long Yunjia Su Yuansheng

(China Agricultural University)

Ouyang Yi

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences)

Hou Changge

(Research Institute of Machinery Science and Technology)

**Abstract** This paper describes a horizontal chaotic vibrator. The differential equation of the vibrator running is strong nonlinear. The numerical simulation and experiment results show that the dynamical response is chaotic and sensitive to initial condition.

**Key words** Chaotic Vibrator Numerical simulation Dynamical response

## 1 引 言

近代发现,在非线性系统中,当系统参数满足一定条件时,即使在确定性输入下,仍输出不规则的振动,称为混沌振动<sup>[1]</sup>。由于混沌振动具有比周期振动更宽的振动频率,更大的加速度变化,有利于用作振动压实、振动钻进、振动切削、振动落料、振动时效及宽频振动试验等工作。从力学的角度,人们不难设想,只用很简单的非线性系统,就能产生复杂而有用的混沌振动,1993年的国际混沌实验学术会议后,美国的很多大学成立了研究中心,发达国家纷纷投入巨额经费,加快混沌振动的应用研究。

从1993年1月至1995年9月,作者主持的国家自然科学基金项目“混沌振动实验识别及其发生机构参数研究”,对多种混沌发生机构进行了实验。本文所述的,具有很强的几何非线性的水平混沌振动台,1995年取得国家专利(95214278.3)。

## 2 振动台的力学模型和动力学方程

在机械动力学领域,近年来,有文献专门研究了含间隙运动机构动态响应的不确定性和

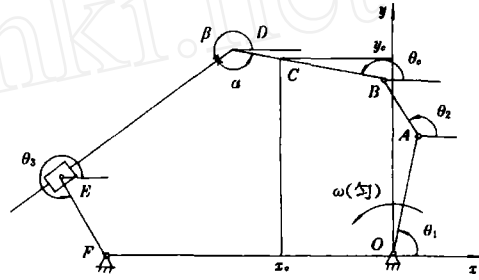
收稿日期:1995-05-11

\* 国家自然科学基金资助项目

① 龙运佳,教授,北京市海淀区清华东路 中国农业大学东校区基础科学部 74 信箱,100083

对初始条件的敏感性<sup>[2]</sup>,证明了含间隙机构的动态响应存在混沌特性。在设计混沌振动台时,通过加大振动机构运动副中的间隙,可能会使台面产生混沌运动,但间隙的存在将会引起运动副间的冲击、碰撞,产生噪音,加快轴承的疲劳失效。因此,这种作法不可取。在对含间隙机构的研究中有一种简化力学模型,称为无质量杆模型<sup>[3]</sup>。在实际机构中这种无质量杆并不存在。如果用有质量杆来代替原简化模型的无质量杆,就可以得到一个自由度大于输入构件数的无间隙机构,那么这种新机构是否具有混沌特性呢?

本研究考虑在一个滑杆机构的两端附加两个短杆  $AB$  和  $EF$ (图 1),构成一个自由度大于输入构件数的新机构。圆盘振动台简化为杆  $BDE$ ,在实际机构中可用两个偏心套来代替短杆  $AB$  和  $EF$ ,曲柄  $OA$  由电机驱动,以转速  $\omega$  作匀速转动。通过数值仿真发现,虽然曲柄匀速转动且在运动副中不含间隙,但台面的运动仍具有混沌特性。在图 1 所示机构中杆  $BDE$  的质心位于点  $C$ ,其余构件的质心位于其两端铰链连线的中点。构件  $OA$ 、 $AB$ 、 $BDE$ 、 $EF$  的质量和转动惯量分别为  $m_1, J_1, m_2, J_2, m_c, J_c, m_3, J_3$ 。因曲柄匀速转动,故  $\theta_1 = \omega t$ , 而  $DE$  为时间  $t$  的函数。设  $DE = l(t)$ ,利用第二类 Lagrange 方程,可以建立其中两个广义坐标  $\theta_2, \theta_c$  的运动微分方程,



$OA = r \quad AB = e_1 \quad BC = a$   
 $BD = b \quad EF = e_2 \quad FO = d$

图 1 水平混沌振动台简化模型

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} &= Q_2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_c} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_c} &= Q_c \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中  $T$  为系统动能,  $Q_2, Q_c$  是对应于  $\theta_2, \theta_c$  的广义力。动能为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (m_i \dot{x}_i^2 + m_i \dot{y}_i^2 + J_i \dot{\theta}_i^2) + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}_c^2 \quad (2)$$

众所周知, Lagrange 的两个经典关系为

$$\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial p_i}{\partial q_j}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \quad (3)$$

式中  $p_i$  为构件位置坐标(如  $x_i, y_i$ );  $q_j$  是广义坐标。利用式(2)和式(3)可将式(1)化为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 m_i \left( \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial \theta_2} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial \theta_2} \right) + J_2 \ddot{\theta}_2 + J_3 \ddot{\theta}_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_2} + m_c \ddot{x}_c \frac{\partial x_c}{\partial \theta_2} + m_c \ddot{y}_c \frac{\partial y_c}{\partial \theta_2} &= 0 \\ \sum_{i=1}^3 m_i \left( \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial \theta_c} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial \theta_c} \right) + J_c \ddot{\theta}_c + J_3 \ddot{\theta}_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_c} + m_c \ddot{x}_c \frac{\partial x_c}{\partial \theta_c} + m_c \ddot{y}_c \frac{\partial y_c}{\partial \theta_c} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

为将(4)式中的非广义项表示成广义坐标的函数,利用机构环封闭方程

$$\left. \begin{aligned} r \cos \theta_1 + e_1 \cos \theta_2 + b \cos \theta_c + l \cos(\theta_c + \pi - \alpha) + e_2 \cos \theta_3 + d &= 0 \\ r \sin \theta_1 + e_1 \sin \theta_2 + b \sin \theta_c + l \sin(\theta_c + \pi - \alpha) + e_2 \sin \theta_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

可将  $l, \theta_3, \dot{l}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \partial\theta_3/\partial\theta_2, \partial\theta_3/\partial\theta_c$  表示成广义坐标、广义速度、广义加速度的非线性函数。对(4)式进行推导并经整理后,可将系统运动方程写成如下形式

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_c \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} B_1 \\ B_2 \end{cases} \quad (6)$$

(6)式中  $A_{ij}$  和  $B_i$  都是广义坐标和广义速度的非线性函数,因此(6)式是二阶非线性变系数常微分方程组。从中可以解出  $\theta_2, \theta_c$ 。

实际上我们关心的是振动台的运动情况,即构件  $BDE$  的运动情况。其中,  $\theta_c, \dot{\theta}_c, \ddot{\theta}_c$  由式(6)可知;而  $x_c, y_c, \dot{x}_c, \dot{y}_c, \ddot{x}_c, \ddot{y}_c$  是广义坐标和时间的函数,由运动分析可得:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= r\cos\theta_1 + e_1\cos\theta_2 + a\cos\theta_c \\ y_c &= r\sin\theta_1 + e_1\sin\theta_2 + a\sin\theta_c \\ \dot{x}_c &= -r\omega\sin\theta_1 - e_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 - a\dot{\theta}_c\sin\theta_c \\ \dot{y}_c &= r\omega\cos\theta_1 + e_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + a\dot{\theta}_c\cos\theta_c \\ \ddot{x}_c &= -r\omega^2\cos\theta_1 - e_1\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2 - a\dot{\theta}_c^2\cos\theta_c - e_1\ddot{\theta}_2\sin\theta_2 - a\ddot{\theta}_c\sin\theta_c \\ \ddot{y}_c &= -r\omega^2\sin\theta_1 - e_1\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2 - a\dot{\theta}_c^2\sin\theta_c + e_1\ddot{\theta}_2\cos\theta_2 + a\ddot{\theta}_c\cos\theta_c \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

### 3 数值仿真和电测结果

#### 3.1 数值仿真

因微分方程(6)是强非线性,所以用数值方法对其进行求解,设所用机构参数:

$r = 8.1\text{mm}$	$e_1 = 0.78\text{mm}$	$b = 141.5\text{mm}$
$a = 0.78\text{mm}$	$e_2 = 0.78\text{mm}$	$d = 146.02\text{mm}$
$m_1 = 0.0148\text{kg}$	$m_2 = 0.0064\text{kg}$	$J_1 = 0.6876\text{kg} \cdot \text{mm}^2$
$m_3 = 0.0062\text{kg}$	$m_c = 2.1598\text{kg}$	$J_2 = 0.2618\text{kg} \cdot \text{mm}^2$
$J_3 = 0.2572\text{kg} \cdot \text{mm}^2$	$J_c = 81574\text{kg} \cdot \text{mm}^2$	$\alpha = 150^\circ$
$\omega = 31.4 \text{ rad/s}$	$\theta_1 = 0^\circ (t=0)$	

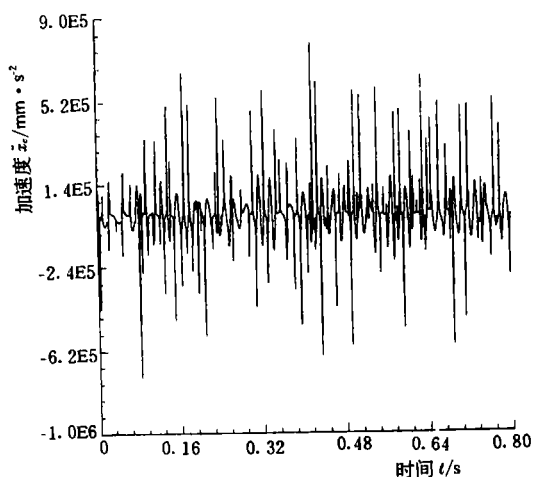


图 2 加速度响应图 ( $\ddot{x}_c-t$ )

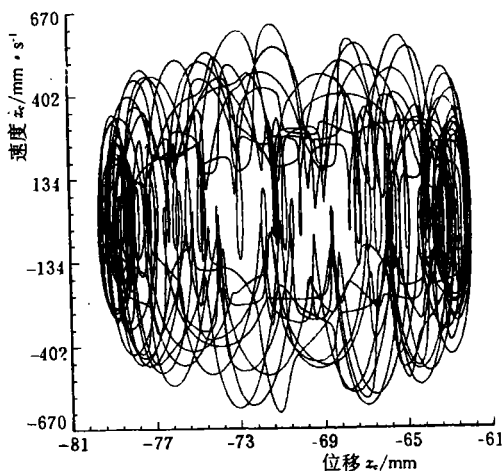


图 3 相轨图 ( $\dot{x}_c-x_c$ )

任意选取一组 $(\theta_2, \theta_c, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_c)$ ,用 Gill 方法进行积分<sup>[4]</sup>,便可得到(6)式和(7)式的解,任取一组初值 $(330^\circ, 177^\circ, 0, 0)$ 。图 2 和图 3 为曲柄从第 20 圈转到第 24 圈时杆 BDE(即振动台面)的加速度响应图和相轨图。因为一般机械动力系统在曲柄两三周后就可以得到稳定的周期解,所以可以认为图 2 和图 3 的情况已超出过渡过程的范围。

由图 2 可见,台面的加速度响应是非周期的;由图 3 可见,台面的相轨图呈现出无穷缠绕和折叠的情况,具有奇怪吸引子的特征。这些情况表明,台面的运动具有明显的混沌特性。

### 3.2 电测结果

水平混沌振动台实物见图 6 下半部。选用的电机为上海前卫电器厂生产的 100 W 单相串励电动机,可以实现无级调速。用 B. & K. 2034 信号分析仪处理电测实验数据,可得到振动台加速度的功率谱图和自相关图。限于篇幅,本文只给出  $\ddot{x}_c$  的自功率谱图(见图 4)和自相关图(见图 5)。由图 4 可以看出,自功率谱  $S_c$  是连续的;由图 5 可以看出,自相关  $R_c$  是衰减的。从而可以得出结论:台面的运动具有混沌特性。

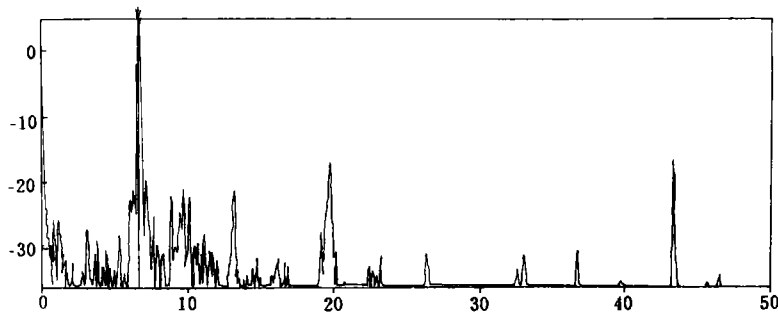


图 4 功率谱图(横坐标—频率;纵坐标—自功率谱密度)

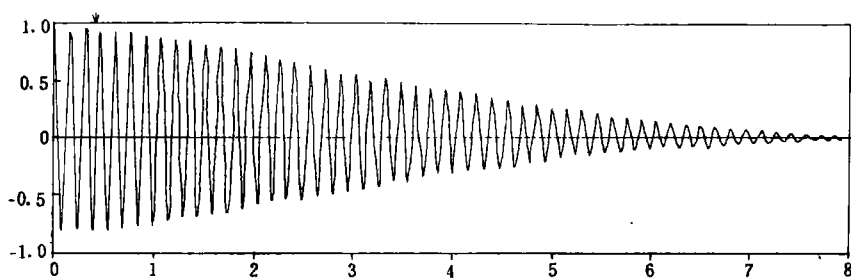


图 5 自相关图(横坐标—时间差;纵坐标—自相关)

## 4 对比实验

在许多情况下,用混沌振动能更好地达到生产要求。例如,在本振动台上安装筛子(见图 6),筛子不规则的混沌振动,可以满足使筛子产生较大运动变化的要求。

为了验证本振动台的效果,我们采用柳州探矿机械厂 1980 年生产的  $\Phi 200$  标准振筛机

(简称振筛机)和本混沌振动台作对比实验。振筛机的工作原理主要为:在水平摇动的平台上固定筛子,该摇动为简谐振动,同时周期性的打击筛子上盖。振筛机的主要工作参数为:电机功率370W,摇动次数为290次/分,打击次数为156次/分。

实验用三层筛,分别为70目、100目、120目,实验对象为100g金钢砂,时间为2min。各层筛子上留下的砂子质量见表1(单位:g)。

由表1可以看出两台设备的效果差不多,但混沌振动台功率(100W)小于振筛机的功率(370W),而且混沌振动台不必打击筛子。因而可以认为,如果功率相同的话,混沌振动台的筛分效果要比振筛机好。

## 5 结论

研究表明,当考虑运动副间隙时,连杆机构的动态响应存在非周期性和对初值的敏感性,用偏心套代替间隙而构成的强非线性振动台,其动态响应同样具有明显的混沌特性。



图6 用混沌振动台筛砂子

表1 各层筛里砂子质量 g

对比实验	振筛机	振动台
70目	39.0	38.7
100目	30.8	28.5
120目	17.7	18.4
底盘	11.2	11.9

## 参考文献

- 1 龙运佳. 混沌振动实验识别及其发生机构参数研究. 工程力学增刊. 清华大学出版社, 1995. 994~1000
- 2 Seneviratne L D, Earles S W E. Chaotic behaviour exhibited in a clearance joint of a four—mechanism. Mechanism and Machine Theory, 1992, 27(3):307 ~ 321
- 3 Earles S W E, Wu C L S. Motion analysis of a rigid linkage mechanism with a clearance bearing. Inst Mech Engrs, London, Conf Mech, 1972. 83~89
- 4 徐士良. C语言常用算法程序集. 北京:清华大学出版社, 1994