

图4 3#点应力过程计算比较

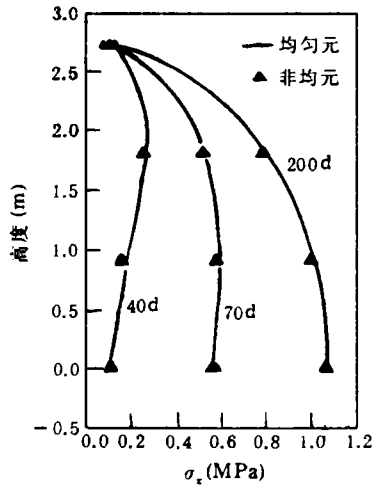


图5 应力分布计算比较

是均匀单元的 34.7%。可以预期, 增加非均匀单元中 RCC 的层数 (比如 20-30 层), 会进一步提高计算效率。

4 结语

(1) 本文根据 RCCD 施工特点建立的非均匀单元模型和等效均匀模型可显著提高 RCCD 温度应力有限元分析的计算效率。

(2) 与常规均匀单元方法计算比较表明, 非均匀模型与等效均匀模型都有较好的计算精度, 这证明本文的方法是正确可靠的。

参考文献

- 1 Tatro S B, Schrader E K. Thermal considerations for roller-compacted concrete. ACI J. March-April, 1985
- 2 董福品, 朱伯芳. 碾压混凝土坝温度徐变应力的研究. 水利水电技术, 1987, 10
- 3 朱伯芳等. 水工混凝土结构的温度应力与温度控制. 水利电力出版社, 1976
- 4 朱伯芳. 混凝土结构徐变应力分析的隐式解法. 水利学报, 1983, 5

(本文于 1994 年 7 月 7 日收到)

求解非定常空气动力学的分离变量法

姜俊成 何龙德

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 本文使用分离变量法求解非定常流动, 消去了时间变量, 建立了三维和二维的非定常流动的分离变量以后的位势方程. 作为算例计算了通风机蜗壳中的声场, 得到了共鸣和不共鸣两种情况下的结果.

关键词 非定常空气动力学, 分离变量法, 声学计算, 风机

1 引言

过去普遍采用时间推进的办法求解时间相关的非定常空气动力学方程组^[1,2]. 这种方法可以

比较真实的模拟非定常流场中各流动参数的变化过程. 其缺点是计算量大. 而且还存在差分过程造成的时间错位现象.

在工程实际中纯非定常部分和定常部分相比其量值小得多. 这样为我们求解非定常气动力提供了一个简化的可能性: 就是把纯非定常部分和定常部分分离开, 忽略掉二阶以上的非定常项, 使问题得到简化. 把在求解波动过程已经成熟的分离变量法^[3], 扩展到求解二维和三维非定常气动力问题中去, 把一个非定常问题化为定常问题, 使方程变得简单易解. 作为算例, 本文应用该方法计算了通风

机蜗壳内考虑了定常流动影响的声场特性.

2 基本方程

2.1 三维非定常流动的分离变量方程

用无旋条件, 从 Euler 方程可以导出非定常三维全位势方程

$$\begin{aligned} & (a^2 - \Phi_x^2)\Phi_{xx} + (a^2 - \Phi_y^2)\Phi_{yy} + (a^2 - \Phi_z^2)\Phi_{zz} \\ & - 2(\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_y\Phi_z\Phi_{yz} + \Phi_x\Phi_z\Phi_{xz}) \\ & - 2(\Phi_x\Phi_{xt} + \Phi_y\Phi_{yt} + \Phi_z\Phi_{zt}) - \Phi_{tt} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

这里, Φ 是位势函数, 其定义为 $\Phi_x = u$, $\Phi_y = v$, $\Phi_z = w$, u 、 v 、 w 是速度的三个分量, a 为当地音速. 设 $\Phi = \phi_0 + \phi$, ϕ_0 是定常位势, ϕ 是纯非定常位势. 定常位势 ϕ_0 满足方程

$$\begin{aligned} & (a_0^2 - \phi_{0x}^2)\phi_{0xx} + (a_0^2 - \phi_{0y}^2)\phi_{0yy} + (a_0^2 - \phi_{0z}^2)\phi_{0zz} \\ & - 2(\phi_{0x}\phi_{0y}\phi_{0xy} + \phi_{0y}\phi_{0z}\phi_{0yz} + \phi_{0x}\phi_{0z}\phi_{0xz}) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $\phi_{0x} = u_0$, $\phi_{0y} = v_0$, $\phi_{0z} = w_0$, u_0 、 v_0 、 w_0 是定常流速度在三个坐标轴上的分量. 这些值通过求解方程 (2) 获得. 我们把 $\Phi = \phi_0 + \phi$ 代入方程 (1). 其中, 声速忽略二阶小量, 得到

$$a^2 = a_0^2 - (\gamma - 1)(\phi_t + u_0\phi_x + v_0\phi_y + w_0\phi_z)$$

在忽略二阶小量之后得到纯非定常位势方程

$$\begin{aligned} & (a_0^2 - u_0^2)\phi_{xx} + (a_0^2 - v_0^2)\phi_{yy} + (a_0^2 - w_0^2)\phi_{zz} \\ & - 2(u_0v_0\phi_{xy} + v_0w_0\phi_{yz} + u_0w_0\phi_{xz}) \\ & - \left[2\left(u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial x} + w_0\frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \right. \\ & \left. + (\gamma - 1)u_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right) \right] \phi_x \\ & - \left[2\left(u_0\frac{\partial u_0}{\partial y} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial y} + w_0\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \right. \\ & \left. + (\gamma - 1)v_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right) \right] \phi_y \\ & - \left[2\left(u_0\frac{\partial u_0}{\partial z} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial z} + w_0\frac{\partial w_0}{\partial z}\right) \right. \\ & \left. + (\gamma - 1)w_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right) \right] \phi_z \\ & - 2(u_0\phi_{xt} + v_0\phi_{yt} + w_0\phi_{zt}) \\ & - (\gamma - 1)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right)\phi_t - \phi_{tt} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

这里的 a_0 是定常流当地音速. 应用分离变量法消去时间变量. 为此设

$$\begin{aligned} \phi & = \phi_c \cos(\omega t + \psi) \\ & = \phi_c \cos \psi \cdot \cos \omega t - \phi_c \sin \psi \sin \omega t \\ & = \phi_A \cos \omega t + \phi_B \sin \omega t \end{aligned} \quad (4)$$

其中, ω 是非定常角频率. 对具体问题由边界条件确定. 对飞行器的俯仰运动, 它由俯仰频率给定. 对流场中声波传播问题, 它由声源频率确定. 这样通过求解 ϕ_A 和 ϕ_B 就可以确定函数的幅值 ϕ_c 和相位 ψ

$$\phi_c = \sqrt{\phi_A^2 + \phi_B^2}, \quad \psi = -\text{tg}^{-1}\left(\frac{\phi_B}{\phi_A}\right)$$

把 (4) 式代入方程 (3), 然后乘以 $\cos \omega t$, 作积分 t 从 0 到 $\frac{2\pi}{\omega}$, 得到

$$\begin{aligned} & (a_0^2 - u_0^2)\phi_{Axx} + (a_0^2 - v_0^2)\phi_{Ayy} + (a_0^2 - w_0^2)\phi_{Azz} \\ & - 2u_0v_0\phi_{Axy} - 2v_0w_0\phi_{Ayz} - 2u_0w_0\phi_{Axz} \\ & - \left[2\left(u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial x} + w_0\frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \right. \\ & \left. + (\gamma - 1)u_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right) \right] \phi_{Ax} \\ & - \left[2\left(u_0\frac{\partial u_0}{\partial y} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial y} + w_0\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \right. \\ & \left. + (\gamma - 1)v_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right) \right] \phi_{Ay} \\ & - \left[2\left(u_0\frac{\partial u_0}{\partial z} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial z} + w_0\frac{\partial w_0}{\partial z}\right) \right. \\ & \left. + (\gamma - 1)w_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right) \right] \phi_{Az} \\ & - 2\omega(u_0\phi_{Bx} + v_0\phi_{By} + w_0\phi_{Bz}) \\ & - (\gamma - 1)\omega\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right)\phi_B \\ & + \omega^2\phi_A = 0 \end{aligned} \quad (5a)$$

同样把方程乘以 $\sin \omega t$, 作积分 t 从 0 到 $\frac{2\pi}{\omega}$, 得到

$$\begin{aligned} & (a_0^2 - u_0^2)\phi_{Bxx} + (a_0^2 - v_0^2)\phi_{Byy} + (a_0^2 - w_0^2)\phi_{Bzz} \\ & - 2u_0v_0\phi_{Bxy} - 2v_0w_0\phi_{Byz} - 2u_0w_0\phi_{Bxz} \\ & - \left[2\left(u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial x} + w_0\frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \right. \\ & \left. + (\gamma - 1)u_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right) \right] \phi_{Bx} \\ & - \left[2\left(u_0\frac{\partial u_0}{\partial y} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial y} + w_0\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\gamma-1)v_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right)\phi_{By} \\
& -\left[2\left(u_0\frac{\partial u_0}{\partial z} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial z} + w_0\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)\right. \\
& \left.+(\gamma-1)w_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right)\right]\phi_{Bz} \\
& +2\omega(u_0\phi_{Ax} + v_0\phi_{Ay} + w_0\phi_{Az}) \\
& +(\gamma-1)\omega\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right)\phi_A \\
& +\omega^2\phi_B = 0 \tag{5b}
\end{aligned}$$

这两个方程不包括时间变量 t , 是关于 ϕ_A 和 ϕ_B 的二阶线性变系数的微分方程. 在定常流场已知的前提下, 可以求得非定常气动力. 把 ϕ_A 和 ϕ_B 代回方程 (4) 就可以描绘出非定常流场的周期变化.

2.2 二维非定常流动的分离变量方程

使用同样的办法可以得到二维非定常分离变量方程

$$\begin{aligned}
& (a_0^2 - u_0^2)\phi_{Axx} + (a_0^2 - v_0^2)\phi_{Ayy} - 2u_0v_0\phi_{Axy} \\
& -\left[2\left(u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + (\gamma-1)u_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right]\phi_{Ax} \\
& -\left[2\left(u_0\frac{\partial u_0}{\partial y} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial y}\right) + (\gamma-1)v_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right]\phi_{Ay} \\
& -2\omega(u_0\phi_{Bx} + v_0\phi_{By}) - (\gamma-1)\omega\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\phi_B \\
& +\omega^2\phi_A = 0 \tag{6a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a_0^2 - u_0^2)\phi_{Bxx} + (a_0^2 - v_0^2)\phi_{Byy} - 2u_0v_0\phi_{Bxy} \\
& -\left[2\left(u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + (\gamma-1)u_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right]\phi_{Bx} \\
& -\left[2\left(u_0\frac{\partial u_0}{\partial y} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial y}\right) + (\gamma-1)v_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right]\phi_{By} \\
& +2\omega(u_0\phi_{Ax} + v_0\phi_{Ay}) + (\gamma-1)\omega\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\phi_A \\
& +\omega^2\phi_B = 0 \tag{6b}
\end{aligned}$$

3 算例

我们结合低噪声通风机蜗壳优化设计问题计算了蜗壳内非定常流动. 由于叶轮旋转在蜗壳的内边界造成一个沿叶轮旋转方向推进的强迫波动, 在计算中把方程 (6a) 和 (6b) 转换到非正交的贴体坐标系, 采用中心差分格式求解. 其边界条件:

3.1 固壁不穿透条件

3.2 叶轮出口非定常波动条件

我们把叶轮出口总压表示为一个平均总压和一个以叶轮旋转速度向前推进的余弦波的和.

由 $dp = -\rho d\left[\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)\right]$ 得到

$$\phi_A = -\frac{P_0}{\rho\omega} \sin(z \cdot \theta) \tag{6c}$$

$$\phi_B = -\frac{P_0}{\rho\omega} \cos(z \cdot \theta) \tag{6d}$$

式中 θ 是蜗壳内边界点到叶轮中心的矢径和 y 轴之间的夹角, z 是叶片数, P_0 是内边界总压非定常波的幅值, ρ 是气体的密度, ω 是角频率. 由通风机的物理背景我们得到

$$\omega = 2\pi \cdot \frac{N \cdot z}{60}$$

式中, N 是风机每分钟转数, z 是叶片数. 由于方程 (6a) 和 (6b) 是线性微分方程, 所以流场中 ϕ_A 和 ϕ_B 和 $P_0/\rho\omega$ 成正比. 为了便于比较, 我们以叶轮出口处声压 140 分贝为参照值. 因此, 本计算只对蜗壳的非定常响应特性进行比较. 如果要确定声压的绝对值还应对叶轮出口情况作分析计算. 本文暂不分析这个问题.

3.3 出口条件

在波动到达蜗壳出口以后还将在同种介质中继续传播, 为此出口条件由波的幅值和相位外推得到.

3.4 计算结果

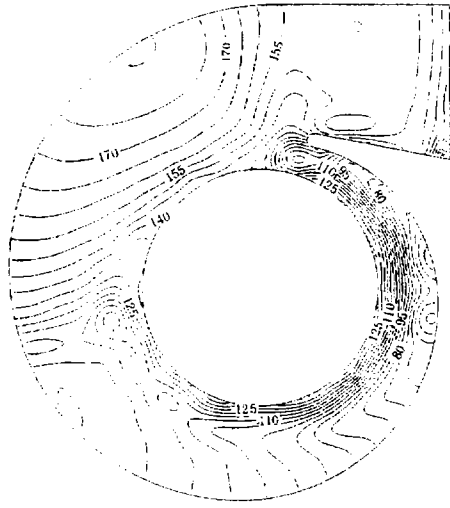
首先我们对一台噪声大的试制风机作了计算, 发现这台风机发生了共鸣. 结果如图 1(a) 和图 1(b) 所示. 我们对叶片数作了调整, 又得到了不共鸣的情况. 如图 2(a) 和图 2(b) 所示. 说明对于给定的蜗壳和流动条件存在一系列特征频率, 在这些频率之下噪声会明显增加. 因此在风机设计过程中要使叶轮和蜗壳有一个恰当的匹配, 避开这些共鸣情况. 对比两套输出的图形, 我们可以看到, 在这两种情况下, 波动的幅值和图案都大不相同.

4 结论和讨论

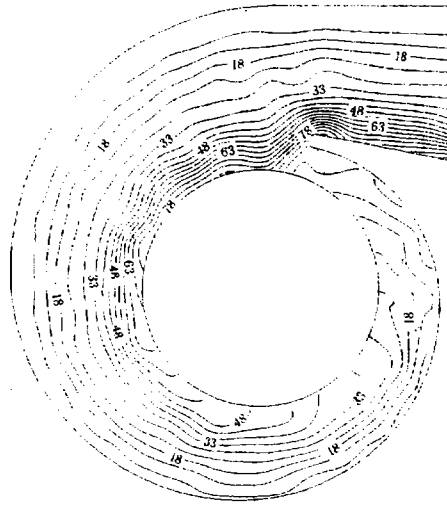
我们发展了求解非定常流动的分离变量法. 并应用此方法求解了通风机蜗壳中的非定常流动. 该方法具有不少优点:

(1) 消去了时间变量, 把非定常问题化成了定常问题. 计算量减少很多, 应用此方法求解三维非定常流动有实用意义.

(2) 由于消去了时间变量, 所以计算结果和物理过程同步性好. 输出结果简捷清楚.



(a) 共鸣情况下幅值分布

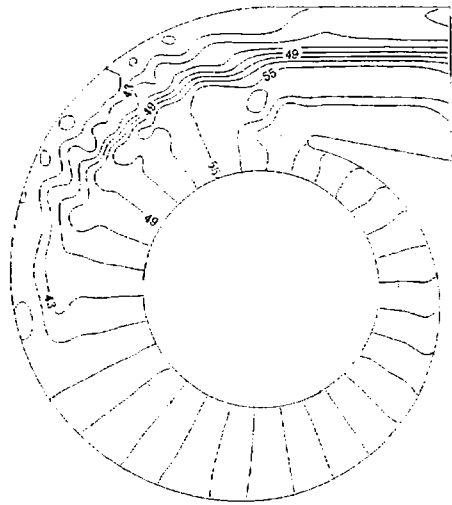


(b) 共鸣情况下相位分布

图 1



(a) 不共鸣情况之下幅值分布



(b) 不共鸣情况之下相位分布

图 2

(3) 本方法可以用于非定常量比定常量小得多的非定常流动计算. 如飞行器动导数计算、流体中声波传播等问题.

(4) 对大幅度变化的非定常流动和由非定常引起的定常流动变化不是本文讨论的内容. 在这些问题上如何应用分变量法, 尚待研究.

(5) 本方法主要适用于频率已知, 一个主要频率起主要作用的非定常流动计算. 对于多频率的复

杂情况采用 Fourier 多频率迭加的办法, 原则上也是适用的, 但计算量会比较大.

(6) 在通风机降低噪声研究中, 本方法有广阔的应用前景.

(7) 风机噪声应包括叶片出口不均匀造成的旋转噪声和旋涡噪声、湍流噪声等成分. 其中旋转噪声占有大的比分. 其它两种噪声应通过定常流计算等手段对其加以控制. 影响共鸣特性的主要是旋转

噪声. 其它噪声频率高且衰减快.

(8) 叶轮出口的非定常成分除了主频之外还包括二倍频以上成分, 但其幅值都比主频小. 如果有必要的话也可以在叶轮出口进行 Fourier 展开, 对其它成分也作相应计算.

(9) 风机蜗壳中的非定常成分幅值是相对较大的. 但是就其非定常幅值和动压比只有 3% 左右的量级. 而且其幅值不影响共鸣特性. 所以采用本文的方法是可以预测其共鸣情况的.

参 考 文 献

- 1 Zhang Jianbai. A numerical method for unsteady transonic flow about tapered wings. 空气动力学学报, 1988, 6(4)
- 2 昂海松. 包括黏性影响的跨音速纵大扰动非定常翼型绕流计算. 空气动力学学报, 1988,6(1)
- 3 吉洪诺夫, 萨马尔斯基. 数学物理方程. 黄克欧译. 北京: 人民教育出版社, 1961

(本文于 1994 年 7 月 1 日收到)

炉内四角切圆等温流场数值模拟中 三种计算格式的比较

周向阳 郑楚光 马毓义

(华中理工大学煤燃烧国家重点实验室, 武汉 430074)

摘要 针对四角切圆锅炉这一电力工业广泛应用的炉型, 探讨了对其等温流场进行数值模拟过程中易发生的伪扩散问题. 分别采用 3 种计算格式: 上风、混合和 Quick 格式, 编制程序, 对一台实验炉进行数值计算, 以比较 3 种格式减小伪扩散的效果, 并将计算结果和实验数据进行了比较, 结果表明 Quick 格式具有较好的效果.

关键词 伪扩散, 等温流场, 差分格式, 炉内流动

1 引 言

在湍流流动的数值模拟中, 采用上风差分格式来计算对流项, 可以有效地改进中心差分格式中的稳定性及物理真实性问题, 使得高雷诺数下的湍流数值模拟能够顺利进行. 其后在上风格式的基础上又发展了混合格式、乘方格式等, 但是, 在流动计算中不但有计算的稳定性问题, 而且还有计算精度问题. 当流体的流动方向和计算网格的排列方向不一致时, 就会引起数值计算中的伪扩散, 对于某些流动形式的研究指出, 这种由于计算方法的近似性所引起的伪扩散有时会远远大于真实的物理扩散.

产生这种伪扩散的根本原因在于将流过每一

控制容积面的多维流动处理成局部一维流动. 前述的几个计算格式对减小伪扩散还有缺陷, 目前, 已经研究出的几个改进方案, 如雷思比^[1]提出的斜上风格式 (SUDES) 方法, 就充分考虑了界面的多维流动特性, 对于某些流动形式, 能有效减小伪扩散^[2]. 另外一个改进方案是 Leonard 所提出的 Quick 格式^[3], 它是利用三点二次的抛物差值来逼近函数值的, 数学上具有比上风格式更高的精度, 并已作过验证, 具有令人满意的效果^[4].

本文所模拟的炉内四角切圆形式的等温流场, 由于计算中所安排的矩形网格刚好与四个角的喷口射流成一较大的夹角 (近于 45°), 因此, 极易发生伪扩散. 以往的文献曾针对一些简单的流动形式进行过二维的数值计算, 探讨不同格式的影响, 但对于这种在工业中广泛应用的典型流动形态的计算中, 很少有人作过系统的分析和探讨, 与实验结果进行对比则更为鲜见. 基于这点, 本文探讨了 3 种计算格式: 上风、混合和 Quick 格式用于计算四角切圆形式的三维等温流场时, 对伪扩散的影响效果, 并将计算结果和实验测量数据进行了比较, 得到了较为满意的效果.