

# 求解流体力学反问题的数学方法及应用

蔡立

中国科学院力学研究所, 北京 100080

李椿萱

北京航空航天大学, 北京 100083

**摘要** 流体力学反问题是一类重要的非线性问题,这类问题在工程中有广泛的应用,如过坝水流问题,给定流量的射流和翼型设计问题。由于这类流动求解区域不确定,导致问题的非线性特征,使数值计算十分困难。本文将亚、跨声速翼型设计问题为例,提出一种求解流体力学反问题的新方法。

**关键词** 流体力学反问题;翼型设计;非线性力学;跨声速流动

**中图分类号** V211.41

## 0 引言

流体力学中的反问题,即给定物体表面(或自由面)的压力分布,求解物体表面(自由面)几何形状的问题,是一类重要的非线性流体力学问题。这类问题在工程中有着广泛的应用,如水利学中过水坝或过水闸门的出流,空气动力学中的机翼设计问题。由于这类问题中存在着待定的物面(或自由面)边界,使求解区域不确定,导致求解问题的非线性特征,使数值计算十分困难。

与已知物体几何形状进行流场分析的流体力学正问题相比,流体力学反问题的求解远未成熟<sup>[1~4]</sup>,目前求解反问题常用的一种方法是预估修正法,由于非线性问题的解对流动边界几何形状十分敏感,特别是跨声速问题,从而使边界几何形状的修正计算变得十分困难,常常导致计算的不收敛。

针对上述问题,本文提出了一种特殊的流线坐标系下,即位-流函数坐标下,求解翼型设计问题的数值方法。流线坐标系也是一种边界拟合坐标系,由于流线随着计算的进行而调整,因此在流线坐标系下进行数值计算与近年来发展较快的自适应网格技术有许多相似之处。在流线坐标系下进行翼型设计,物面也是流线,对物面的修正可在网格调整中自动完成。特别是由于本文选用的流线坐标系的特殊性,使得用于流线及物面修正的方程与流体力学方程完全等价,从而保证了在此坐标系下进行正、反计算的完全

本文于1995年3月10日收到,8月21日收到修改稿。

相容。因此，本方法有较好的数值收敛性。

## 1 $\varphi$ - $\psi$ 流线坐标系下的基本方程

### 1.1 坐标转换方程

边界拟合坐标变换是Thompson最早提出的一种坐标变换方法，Thompson采用的坐标变换方程是泊松方程。本文提出的 $\varphi$ - $\psi$ 流线坐标系实际上也是一种边界拟合坐标，不同的是使用的坐标变换方程不再是泊松方程，而是用流函数方程和位函数方程作为坐标变换方程。

位函数方程和流函数方程为

$$\begin{aligned} (a^2 - u^2)\varphi_{xx} - 2uv\varphi_{xy} + (a^2 - v^2)\varphi_{yy} &= 0 \\ (a^2 - u^2)\psi_{xx} - 2uv\psi_{xy} + (a^2 - v^2)\psi_{yy} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

方程(1)是以 $x$ 、 $y$ 为自变量， $\varphi$ 和 $\psi$ 为未知函数的微分方程，现进行反变换，将其变换成以 $\varphi$ 和 $\psi$ 为自变量， $x$ 和 $y$ 为未知函数的微分方程，变换关系式为

$$\begin{aligned} \varphi_x &= y_\psi / J, & \varphi_y &= -x_\psi / J \\ \psi_x &= -y_\varphi / J, & \psi_y &= -x_\varphi / J \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $J$ 是Jacobian行列式

$$J = \begin{vmatrix} x_\varphi & x_\psi \\ y_\varphi & y_\psi \end{vmatrix} = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi \quad (3)$$

对(2)式继续求导，可得到 $\varphi_{xx}$ 、 $\varphi_{xy}$ 、 $\varphi_{yy}$ 、 $\psi_{xx}$ 、 $\psi_{xy}$ 和 $\psi_{yy}$ 的表达式，例如

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= \left( \frac{1}{J} y_\psi \right)_\varphi x_\varphi + \left( \frac{1}{J} y_\psi \right)_\psi \psi_x \\ &= \frac{1}{J^2} (-y_\psi^2 x_{\varphi\varphi} + 2y_\varphi y_\psi^2 x_{\varphi\psi} - y_\psi^2 y_\varphi x_{\psi\psi}) \\ &\quad + x_\psi y_\psi^2 y_{\varphi\varphi} - 2x_\psi y_\varphi y_\psi y_{\varphi\psi} + x_\psi y_\varphi^2 y_{\psi\psi} \end{aligned} \quad (4)$$

$\varphi_{xy}$ 等也可用类似方法导出，在此从略。(4)式中的 $x_\varphi$ 、 $x_\psi$ 、 $y_\varphi$ 和 $y_\psi$ 可以写成 $q$ 和 $\theta$ 的函数，其中 $q$ 为速度模， $\theta$ 为速度矢量与 $x$ 轴之夹角。根据位函数与流函数的定义有

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = q(\cos\theta dx + \sin\theta dy) \\ d\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = \frac{\rho}{\rho_0} q(-\sin\theta dx + \cos\theta dy) \end{aligned} \quad (5)$$

由(5)式解出 $dx$ 、 $dy$

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\cos\theta}{q} d\varphi - \frac{\rho_0 \sin\theta}{\rho q} d\psi \\ dy &= \frac{\sin\theta}{q} d\varphi + \frac{\rho_0 \cos\theta}{\rho q} d\psi \end{aligned} \quad (6)$$

在 $\varphi$ - $\psi$ 坐标系下，以 $\varphi$ 和 $\psi$ 为自变量， $x$ 和 $y$ 看作是 $\varphi$ 和 $\psi$ 的函数，因此有

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \psi} d\psi \quad (7)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \psi} d\psi$$

比较(6)式和(7)式可得

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\cos \vartheta}{q}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\rho_0 \sin \vartheta}{\rho q} \quad (8)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\sin \vartheta}{q}, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\rho_0 \cos \vartheta}{\rho q}$$

用  $x_\varphi$  乘以(1)式中第一个方程, 用  $x_\psi$  乘以(1)式中第二个方程, 二者相加, 将(4)式中给出的  $\varphi_{,x}$  等代入其中, 并用(8)式对结果进行简化, 经过整理, 最后可得到关于几何变量  $x$  的方程

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 (1-M^2) x_{,\varphi\varphi} + x_{,\psi\psi} = 0 \quad (9a)$$

用  $y_\varphi$  乘以(1)式中第一个方程加上  $y_\psi$  乘以第二个方程, 然后用类似的方法对其化简, 最后可得到关于  $y$  的方程

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 (1-M^2) y_{,\varphi\varphi} + y_{,\psi\psi} = 0 \quad (9b)$$

方程组(9)便是所求  $\varphi$ - $\psi$  坐标系下的几何方程, 它给出了几何坐标  $x$ 、 $y$  随  $\varphi$ 、 $\psi$  变化的规律, 不难看出, 亚声速区方程为椭圆型, 而超声速区方程为双曲型。方程(9)的边值条件可提第一边值问题, 也可提第二边值问题, 要根据具体情况而定。一般来说, 对于正问题, 由于物面几何形状已知, 即边界处每一点  $(\varphi, \psi)$  所对应的  $x$ 、 $y$  已知, 因此应提第一边值问题, 而对于流体反问题, 已知的是边界上的速度分布, 因此应提第二边值问题, 即用公式(8)作为边值条件, 有关定解条件问题, 我们将结合具体实例予以讨论。

## 1.2 $\varphi$ - $\psi$ 坐标系中的流体力学方程

方程组(9)的系数中含有  $\rho_0/\rho$  一项, 该项是速度模  $q$  的函数, 因此求解(9)式时, 必须给出计算平面上每一点  $(\varphi, \psi)$  所对应的  $q$  值。为此, 还需要建立速度变量随  $\varphi$ 、 $\psi$  变化的方程。

描述二维定常无粘可压缩流体运动的基本方程是Euler方程组, 其形式为

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{1}{2} q^2 \left( \frac{\kappa}{\kappa-1} \right) \frac{p}{\rho} = \text{常数}$$

在无旋条件下，从 Euler 方程出发，利用速度图法 (Hodograph Method) 可得到速度面上的 Chap leigym 方程<sup>[7]</sup>

$$\begin{aligned} q \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial q} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \\ -\frac{\rho_0}{\rho} (1-M^2) \frac{1}{q} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial \varphi}{\partial q} \end{aligned} \quad (11)$$

对 (11) 式进行变换，将其变换成以  $\varphi, \psi$  为自变量， $q$  和  $\vartheta$  为未知函数的方程，变换公式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial q} &= -\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} / \Delta \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial q}{\partial \psi} / \Delta \\ \frac{\partial \psi}{\partial q} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} / \Delta \\ \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} &= -\frac{\partial q}{\partial \varphi} / \Delta \end{aligned} \quad (12)$$

式中

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial \psi} & \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} \\ \frac{\partial q}{\partial \varphi} & \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \quad (13)$$

将 (12) 式代入 (11) 式可得

$$\begin{aligned} q \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} &= \frac{\partial q}{\partial \psi} \\ \frac{\rho_0}{\rho} (1-M^2) \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} \end{aligned} \quad (14)$$

方程组 (14) 就是  $\varphi, \psi$  坐标系下的流体力学方程，该方程给出了速度变量随  $\varphi, \psi$  变化的规律，不难验证，方程组 (14) 在亚声速区为椭圆型方程，而在超声速区为双曲型方程。

### 1.3 等价证明

至此，我们得到了两组以  $\varphi$  和  $\psi$  为自变量的方程组，方程组 (9) 和 (14)，方程组 (14) 是正交曲线坐标系  $(\varphi, \psi)$  下的流体力学方程组，而方程 (9) 则是笛卡尔坐标系  $(x, y)$  与曲线坐标系  $(\varphi, \psi)$  之间的坐标变换方程。在一般的曲线坐标系中，这两组方程之间没有必然的联系，但由于选用的坐标系  $\varphi$  和  $\psi$  的特殊性，使得 (9) 式和 (14) 式之间存在着联系，即方程 (9) 与 (14) 等价。为证明这一点，只需从 (9) 式出发，推导出方程 (14) 即可。

将 (8) 式代入 (9) 式中，可得

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 (1-M^2) \left( \frac{\sin\vartheta}{q} \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} + \frac{\cos\vartheta}{q^2} \frac{\partial q}{\partial\varphi} \right) - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos\vartheta}{q} \frac{\partial\vartheta}{\partial\psi} + \\
 & \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin\vartheta}{q^2} \frac{\partial q}{\partial\psi} - \frac{\sin\vartheta}{q} \frac{\partial}{\partial\psi} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right) = 0 \\
 & \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 (1-M^2) \left( \frac{\cos\vartheta}{q} \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} + \frac{\sin\vartheta}{q^2} \frac{\partial q}{\partial\varphi} \right) - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin\vartheta}{q} \frac{\partial\vartheta}{\partial\psi} - \\
 & \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos\vartheta}{q^2} \frac{\partial q}{\partial\psi} + \frac{\cos\vartheta}{q} \frac{\partial}{\partial\psi} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

(15)式第一式乘以 $\cos\vartheta$ 与第二式乘以 $\sin\vartheta$ 相加,经整理可得到

$$\frac{\rho_0}{\rho} (1-M^2) \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi}$$

这便是(14)式的第二式。用类似的方法,将(15)式中第一个方程乘以 $\sin\vartheta$ 减去(15)式第二个方程乘以 $\cos\vartheta$ 。经过化简,即可得到(14)式的第一个方程。由此可见,方程(9)和方程(14)完全等价,正是由于这一等价性,保证了我们在利用(9)式对物面形状进行修正时,使得流体力学规律自然满足。

## 2 求解流体力学反问题的数学方法

提出的求解流体力学反问题的方法本质上也是一种预估修正法,即将正计算和反计算交替使用的迭代方法。所谓正计算是已知流场几何边界形状,求解流场中速度分布,此时所用的控制方法是(14)式,反计算则是给定流场边界速度分布,求边界及各流线的几何形式,使用的控制方程是(9)式。

我们以空气动力学中的翼型设计问题为例,来说明这一方法。

翼型设计问题是一个典型的流体力学反问题,现有的翼型设计方法对初始翼型要求很高,本文给出的方法对此有较大改进。

物理平面上流动区域 $D$ 如图1(a)所示,将图1(a)中的流动区域转换到 $(\varphi, \psi)$ 平面上对应的区域 $D^*$ ,这是一矩形区域,如图1(b)。在翼型设计中,远场边界条件最好能用远场解给定,在没有远场解的情况下,用有限远代替无穷远。在 $(\varphi, \psi)$ 平面上翼型设计

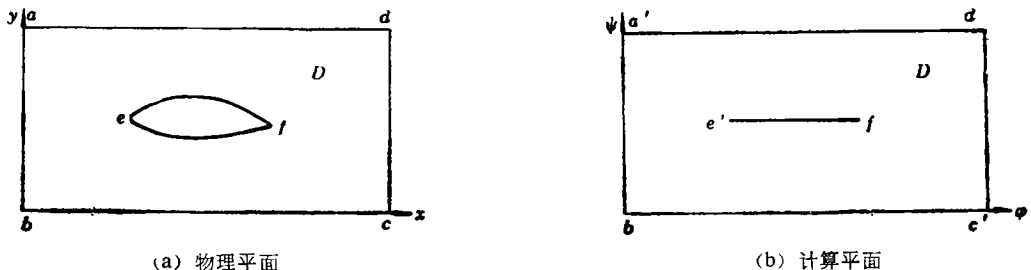


图1 翼型设计示意图  
Fig.1 Airfoil design sketch

问题可按如下步骤进行。

(1) 给定初始物面形状和初始流线位置，在  $(\varphi, \psi)$  平面上均匀构造网格。

(2) 进行正计算，在给定物面边界形状的条件下，求解流场各速度分布，即在  $D^*$  上用有限差分法求 (14) 式。其边界条件为：在无穷远边界上  $(AB, BC, CD$  和  $DA$  四条边上) 提第一边值问题，即

$$\begin{aligned} q &= q \\ \vartheta &= \vartheta \end{aligned} \tag{16}$$

在物面上，对翼型设计问题，速度  $q$  已知， $\vartheta$  值也可由假定的物面形状求出，即

$$\begin{aligned} q &= q_{\text{物面}} \\ \vartheta &= \arctg\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{物面}} \end{aligned} \tag{17}$$

在上述边界条件下，求解 (14) 式，得到  $(\varphi, \psi)$  平面上每一点的  $q, \vartheta$  值。

(3) 进行反计算。在给定速度分布情况下，对物面和流线形状进行修正。即求解 (9) 式。远场边界条件仍然是第一边值问题，即给定远场每一点  $(\varphi, \psi)$  所对应的  $(x, y)$  值，物面边界条件可由 (8) 式给出

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \psi} &= \left(-\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \vartheta}{q}\right)_{\text{物面}} \\ \frac{\partial y}{\partial \psi} &= \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \vartheta}{q}\right)_{\text{物面}} \end{aligned} \tag{18}$$

上式右端项中的  $q, \vartheta$  均为已知。在上述边界条件下，求解 (9) 式，可得到新的物面及流线形状。

(4) 重复 2、3 两步，进行多次迭代直至收敛为止。

上述计算过程中采用的差分格式与 Marman-Cole 的格式相同<sup>[6]</sup>，即在亚声速区使用中心格式，在超声速区采用迎风格式。最后，我们得到了计算平面上每一点  $(\varphi, \psi)$  对应的  $q, \vartheta, x$  和  $y$ ，相当于物理平面上每一点  $(x, y)$  求出了其对应的  $\varphi, \psi, q$  和  $\vartheta$  的值。

本文给定压力分布，计算了翼型的几何形状。图 2 为 6% 双圆弧翼型的情况。流动状态为  $M_\infty = 0.861, \alpha = 0$ ，计算中压力分布数据取自文献[5]。图 3 为 NACA 0012 翼型的计算结果，流动状态为  $M_\infty = 0.85, \alpha = 1^\circ$ ，压力分布取自文献[8]，图 4 为 RAE2822 的计算结果，流动状态为  $M = 0.75, \alpha = 3^\circ$ ，压力分布取自文献[7]。

上述计算中计算结果均与真实物面坐标吻合较好。图 2 计算时初始翼型为 1% 的双圆弧

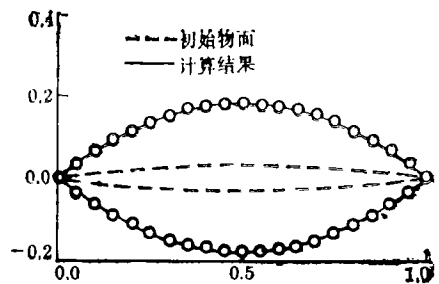


图 2 6% 双圆弧翼型的计算结果  
Fig.2 Calculation results of 6% circular airfoil

翼型,图3和图4计算时,初始翼型为6%的双圆弧翼型。由此可见,方法可在初始翼型与最终结果相差较大时也获得收敛解。

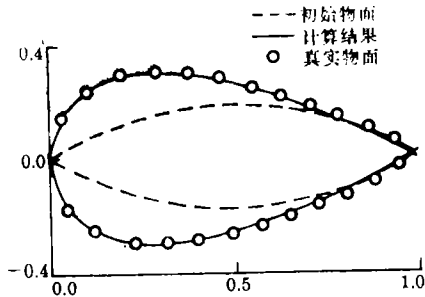


图3 NACA0012翼型的计算结果  
Fig.3 Calculation results of NACA0012 airfoil

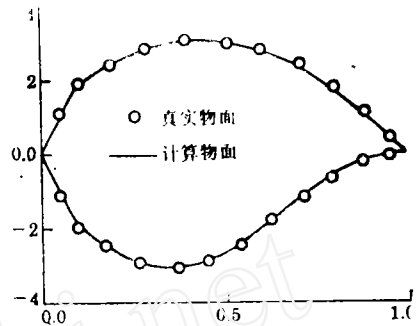


图4 RAE2822翼型的计算结果  
Fig.4 Calculation results of RAE2822 airfoil

### 3 讨 论

数值计算表明,本文提出的 $\varphi, \psi$ 坐标系下求解反问题的数值方法是可行的,该方法与其它反方法相比主要特点为:首先,采用的边界修正公式是与流体力学方程完全等价的一组方程,从而保证了在边界修正过程中流体力学的各守恒规律能自然满足。其次,在对边界形状修正的同时,也对流场中流线形状进行了修正。我们知道,非线性问题的解对边界形状十分敏感,预估修正时,如仅对边界给以修正,而不对流场进行相应调整,是导致计算不收敛的一个原因。由于本方法采用了上述措施,因此,其收敛性较好,所以在较差的初场情况下,也可得到收敛解。此外,方法通过拟合坐标变换,将不规则的流动区域变成 $(\varphi, \psi)$ 平面上的矩形区域,在计算平面上采用均匀网格对应其物理平面上的映象,网格在物理变量变化剧烈区域自动加密,而在物理变量变化较小的区域自动稀疏这一自适应特点。方法不难推广用于解决其它流体力学反问题。

### 参 考 文 献

- 1 Volpe G, Melnik R G. AIAA-81-1233, 1981.
- 2 Monlden T H. Fundamentals of Transonic Flow, John Wiles Sons, 1984.
- 3 Redeker G, Wichmann G. AIAA paper 88-4418, 1988.
- 4 Takanashi S. AIAA Paper 84-2155, 1984.
- 5 Knhectel E D. NASA TN-D15.
- 6 Murman E M, Cole J D. AIAA J., 1971, 9:114~121.
- 7 Pulliam T H, Steger J L. AIAA Paper 85-0360, 1985.
- 8 Rizzi A. AIAA Paper 84-1644, 1984.

## The Mathematical Method of the Inverse Fluid Problem and Its Applications

Cai Li

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing 100080*)

Li Chunxuan

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083*)

**Abstract** The inverse fluid problem is frequently encountered in the engineering e.g. the free jet trajectory, overflow gates and dams, airfoil design, etc. In the classical fluid dynamics, it is very difficult to determine the location and the geometric shape of moving boundary accurately. In this paper, a new iterative algorithm for inverse problem is presented by using coordinate systems. Because the state of transonic flow is very sensitive to the variations of the boundary conditions, now the body fitted coordinate systems are widely used in the numerical calculations of transonic flows. The streamline coordinate system is one of the body fitted coordinate systems. Meanwhile, the shape of the streamlines is adjusted with the calculation getting on, so calculation in this coordinate system is similar to the adaptive grid technique. The numerical solutions are good in stability and convergence, the comparison of the present results to the other numerical solutions and experimental data is satisfied.

**Key words** nonlinear mechanics, inverse problem, airfoil design