

绕旋转圆柱流动涡尾流结构和 临界状态特性¹⁾

凌国平

(苏州大学数学系, 苏州 215006)

凌国灿

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 采用作者提出的基于区域分解、有限差分法与涡法杂交的数值方法, 结合高阶隐式差分格式, 和以修正的不完全 LU 分解为预处理器的共轭梯度法作求解器, 系统地研究了雷诺数 $Re = 1\ 000$, 旋转速度比 a ($0.5, 3.25$) 范围内, 绕旋转圆柱从突然起动到充分发展, 长时间内尾流旋涡结构和阻力、升力系数的变化规律。计算所得流动图案与实验流场显示符合很好。数值试验证实了临界状态的存在, 并首次给出了临界状态时的旋涡结构特性, 指出最佳升阻比也在该状态附近得到。

关键词 旋转圆柱, 涡尾流, 有限差分法, 涡法, 预处理共轭梯度法, 不完全 LU 分解

引 言

绕旋转圆柱的流动是一种典型的非定常分离流动。它在改变旋涡的释放规律, 提高升力, 减小阻力, 降低流动引起的振动等一系列现代流动控制研究中, 有着重要的理论和实际应用价值, 一直受到流体力学家们的重视。

圆柱旋转产生的一个最显著的效应, 就是减弱和抑制在圆柱某一边流动的分离和旋涡的释放, 同时加强和发展在圆柱另一边流动的分离和旋涡的释放, 从而使整个流动在垂直来流方向成为不对称的, 将有一个升力作用在圆柱上, 这就是著名的 Magnus 效应。影响流动的参数除了雷诺数 $Re (= 2Ua/\nu, U$ 为来流速度, a 为圆柱半径, ν 为流体的运动粘性系数) 外, 最重要的是旋转速度比 $a (= \Omega a/U, \Omega$ 为圆柱旋转角速度)。早期的研究集中在小 a 和低 Re 的范围。80 年代中, 后期开始对较大 a 和较高 Re 范围的流动进行了一系列实验^[1-3] 和数值^[3-6] 的研究, 但也只限于突然起动后的初始阶段 ($t < 24$), 和柱后的近尾流区, 而对长时间的充分发展流动和柱后涡尾流的整体结构特性仍缺乏研究。多数数值结果与实验结果相符, 但也有例外, 其中最突出的是文[5]。它指出, 在 $Re = 200, a = 3.25$ 时, 有多于一个主涡的所谓单边释放涡现象发生, 这是与文[1]的实验结果相矛盾的。文[1]实验观察指出, 对如此大的 a , 在第一个主涡释放后, 流动即趋于稳定, 以后再无涡释放。最近文[7]对 $Re = 1\ 000$, 较大 a 范围内绕旋转圆柱长时间的流动特性进行了系统的数值研究, 支持了文[1]的结论, 但未对流动从周期性双边涡结构过渡到稳定的单边涡结构之间临界状态的流动特性作进一步的探讨。

¹⁾江苏省自然科学基金和中国科学院力研究所 LNM 开放实验室资助课题
1990-02-09 收到第一稿, 1996-07-30 收到修改稿

本文采用作者(1992)提出的基于区域分解、有限差分法与涡法杂交的数值方法^[8-10],并作了改进:差分离散采用高阶格式,时间步全隐式推进,由此产生一个宽带大型稀疏矩阵方程,采用目前认为属于最优一类的以修正的不完全LU分解作预处理器的共轭梯度法(MLU-CG)^[11,12]进行求解。系统地研究了 $Re=1000, a \in (0.5, 3.25)$ 范围内,绕旋转圆柱从突然起动到充分发展,长时间内整个尾流旋涡结构和阻力、升力系数的变化规律。计算所得典型的流动图案与实验流场显示符合很好。计算证实了临界状态的存在,并首次指出此时的涡尾流呈藕节状单边释放涡的结构,阻力、升力呈微幅周期波动。最后还讨论了控制优化问题,指出最佳升阻比就发生在临界状态附近。

1 控制方程和定解条件

设不可压、粘性流体由无穷远处以均匀速度 U ,沿 X 正方向流向半径为 a ,且以角速度 Ω 按逆时针方向旋转的无限长圆柱(如图1所示)。

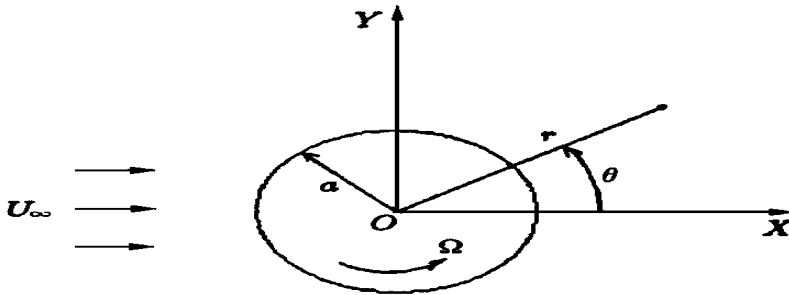


图1 流动示意图

Fig 1 Flow definition sketch

取原点在圆柱轴心,但不随圆柱一起旋转的极坐标系 (r, θ) 。在该坐标系下,以涡量 ω 、流函数 Ψ 的形式表示,并将变量 $t, r, (V_r, V_\theta), \Psi, \omega$ 分别用 $a/U, a/U, U, a$ 和 U/a 无量纲化后的流动控制方程为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rV_r \omega) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(V_\theta \omega) = \frac{2}{Re} \nabla^2 \omega \tag{1}$$

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \tag{2}$$

其中, (V_r, V_θ) 分别为径向与周向速度,它们与流函数 Ψ 的关系为

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, V_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

为加密柱面附近的网格分布,引入变换 $r = \exp(2\pi\xi), \theta = 2\pi\eta$ 。流动控制方程(1)、(2)变成

$$E \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi}(U \omega) + \frac{\partial}{\partial \eta}(V \omega) = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = -E \omega \tag{4}$$

其中, $E = 4\pi^2 e^{4\pi\xi}, U = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = E^{1/2} V_r, V = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = E^{1/2} V_\theta$

边界条件为, 在柱面上 ($\xi = 0$) 满足

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = -E^{1/2} a \\ \omega &= -\frac{1}{E} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

在无穷远处 ($\xi \rightarrow \infty$) 满足

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} &= E^{1/2} \cdot \sin(2\pi\eta) \\ \frac{\partial \omega}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

初始条件为

$$\omega|_{t=0} = 0, \quad \xi > 0 \quad (7)$$

由方程(3)~(7)求得流场中的涡量分布后, 就可推出沿圆柱表面的压力和切应力分布, 进而求出作用在圆柱上的阻力系数 C_d 和升力系数 C_l

$$\left. \begin{aligned} C_d &= \frac{2}{Re} \int_0^1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} - 2\pi\omega \right) \Big|_{\xi=0} \cdot \sin(2\pi\eta) d\eta \\ C_l &= \frac{2}{Re} \int_0^1 \left(2\pi\omega - \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=0} \cdot \cos(2\pi\eta) d\eta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

2 数值求解方法

数值求解的基本思想是作者(1992)提出的基于区域分解、有限差分法和涡法杂交的数值模型, 并在差分格式和求解方法上作了较大改进

将流场分解为靠近柱面范围为 $O(a)$ 量级的内区 Ω_1 和余下的外区 Ω_2 两部分. 内区采用有限差分法, 外区采用网格涡解, 内外区流动通过界面 Γ 互相耦合

对方程(3)中的对流项采用三阶偏心格式, 以 $\frac{\partial}{\partial \xi}(U\omega)$ 为例, 其离散形式为

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(U\omega) = \begin{cases} [(U\omega)_{i+2,j} - 2(U\omega)_{i+1,j} + 9(U\omega)_{i,j} - 10(U\omega)_{i-1,j} + 2(U\omega)_{i-2,j}]/6 & \xi, \quad U_{i,j} > 0 \\ [-2(U\omega)_{i+2,j} + 10(U\omega)_{i+1,j} - 9(U\omega)_{i,j} + 2(U\omega)_{i-1,j} - (U\omega)_{i-2,j}]/6 & \xi, \quad U_{i,j} < 0 \end{cases}$$

方程(3)中的粘性项和方程(4)采用二阶中心差分格式, 方程(3)的时间推进为全隐式的

这样得到的差分方程, 其系数矩阵分别为 9 对角和 5 对角的, 原方法中的求解器对 9 对角矩阵已无效. 这里, 我们对所有的差分方程统一采用对宽带 (多于三对角) 的大型稀疏矩阵都适用的修正的不完全 LU 分解的预处理共轭梯度法 (M LU - CG) 进行求解

预处理共轭梯度法 (PCG) 是近年来计算数学领域内发展十分迅速的一类求解大型稀疏矩阵 A 的极其高效的算法^[11], 其计算效率依赖于预处理器的选择. 目前, 比较先进的预处理器有不完全的 LU 分解 (ILU). 定义下标集 $S_A = \{(i, j): a_{ij} \neq 0\}$. 若仅对矩阵 A 中下标属于 S_A 的 a_{ij} 进行 LU 分解, 这就是 LU 分解. 由于 A 的稀疏性, S_A 中的元素很少, 因此 LU 分解比 LU 分解的计算量要小的多. 若将 LU 分解中略去的量 $-a_{ir}a_{rj}^r$, $(i, j) \notin S_A$ 加到主对角线元上, 就形成最简

单的一种更有效的所谓修正的不完全LU分解方法(MLU)^[11,12]。MLU分解的算法,可简述如下

```

A0 = A
  for r = 1 to n do
    begin
      for j ≥ r and (r, j) ∈ SA do
        arij = ar-1ij
      for i > r and (i, r) ∈ SA do
        arir = ar-1ir / arrr
      for i, j > r and (i, r) ∈ SA and (r, j) ∈ SA do
        begin
          q = - ar-1ir arrj
          if (i, j) ∈ SA then arij = ar-1ij + q
          else arij = ar-1ij + q
        end
      end
    end
  end

```

在同样的精度控制下,MLU-CG方法的求解速度是传统的线松弛LSOR结合LU分解方法的6~8倍^[11,12],且这种计算速度上的优势,随着矩阵规模和复杂性的增加,会变得更加明显。目前,在大型矩阵方程的计算中,后者已被前者所取代。

涡法部分的计算仍与原方法一样,详细过程请参阅文献[8]~[10]。

3 计算结果分析

我们计算了 $Re = 1\,000$ 和 $a \in (0.5, 3.25)$ 范围内,均匀来流绕旋转圆柱的流动。内区细网格,其网格数为 144×240 ,对应物理平面区域为 $a \leq r \leq 3a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。外区粗网格,内外区粗网格总数为 300×240 ,对应物理平面区域为 $a \leq r \leq 110a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。时间步长为 $\Delta t = 0.01$ 。计算的时间范围为 $t = 0 \sim 80$ 。

为验证本文方法的准确性,我们将部分计算所得的流线分布图与已有的实验流场显示照片作了比较。图2是(a) $a = 0.5$, $t = 3$, (b) $a = 3.0$, $t = 4$ 时两者的对比(实验资料均取自文献[3])。可见,计算结果与实验结果是完全吻合的,与其他计算结果^[3-5,7]相比,也相当接近。

随着旋转速度比 a 变化,柱后尾流将呈现不同的流动结构。

图3,4分别是 $a = 0.5$ 和 1.0 时,在各个时刻的流线与涡量分布图。与绕固定圆柱流动时的情形相仿,柱后可见明显的从上、下柱面周期交替释放涡形成的类似Kaman涡街的旋涡结构,但其中心线随 a 的增加,逐渐沿圆柱旋转方向偏移。图5是 $a = 2.0$ 时,在各个时刻的流线与涡量分布图。此时,下方释放的涡与上方释放的涡相比,强度已大大减弱,自 $t = 30.0$ 后,流线的波动也已相当小了。图6是 $a = 3.0$ 时,在各个时刻的流线与涡量分布图。此时,下方涡的发展完全被抑制,上方自第一个主涡释放后,流动即趋于稳定,流线呈平直状,尾流中除了一个与上柱面相连的单边附着涡外,再无其他涡释放。我们的数值结果是支持文献[1,3]的实验结论,并与文[7]的数值结果相一致的。文[5]的计算时间较短(≤ 24),它的结论还有待商榷。

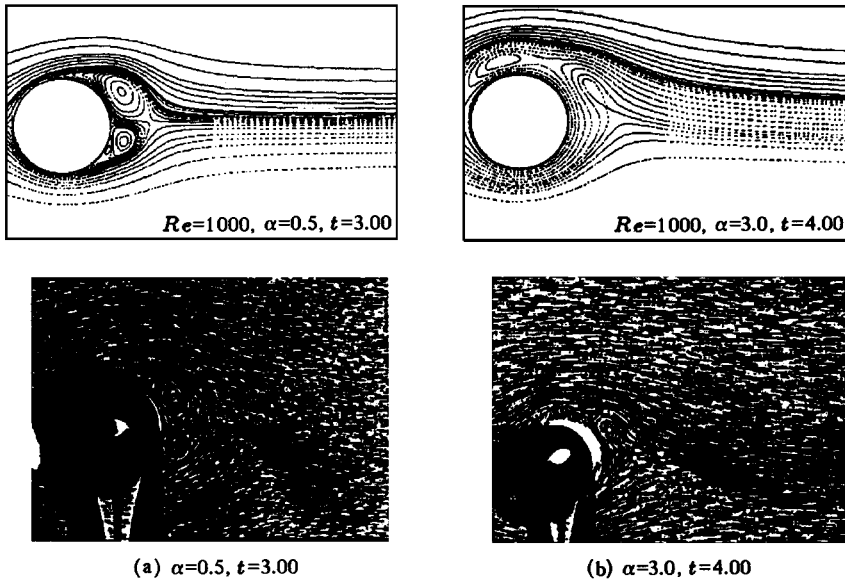


图 2 计算所得流线图和实验流场显示^[3]的比较, $Re = 1000$
 Fig.2 Comparison of the calculated streamline contour and experimental visualization for $Re = 1000$

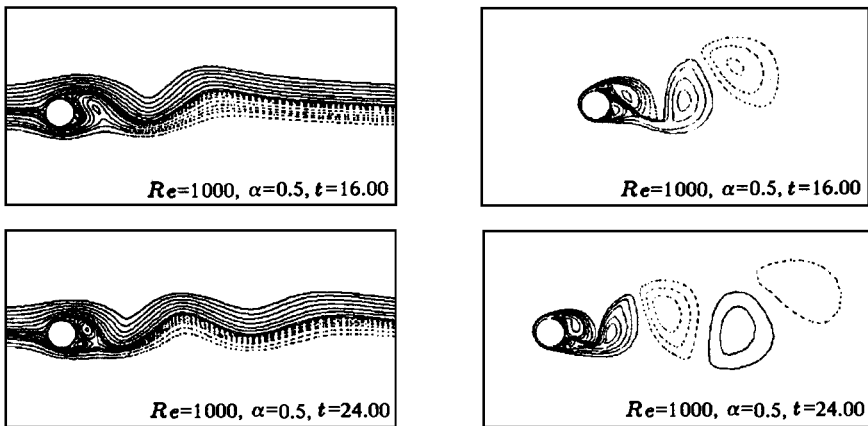


图 3 $Re = 1000, a = 0.05$, 在各时刻的流线与涡量分布图
 Fig.3 Stream line and vorticity contours at different time instants for $Re = 1000, a = 0.05$

可以推测在周期性交替双边释放涡结构, 和稳定的单边附着涡结构之间, 应该存在一种过渡性的所谓临界状态. 对 $Re = 1000$, 我们在临界值 $a_c = 2.2$ 处找到了这种状态. 图 7 就是此时在各个时刻的涡量分布图. 下方释放的涡已弱到可不显示出来的地步, 上方自第一个主涡释放后, 附着涡呈明显的藕节状, 而不是稳定状态时单边附着涡的那种几乎平直的形状. 原因是此时下方附着涡仍存在, 它对上方涡的结构还起着周期性的影响. 所以, 上方涡就成为象藕一样一节节的了, 随着时间的发展它会一节节地脱落. 当然, 这些脱落涡的强度比起主涡来要弱得多了. 这很象文[5]说的单边释放涡的情形, 只是这种结构应该发生在临界状态, 而不是 a 很大的稳定状态.

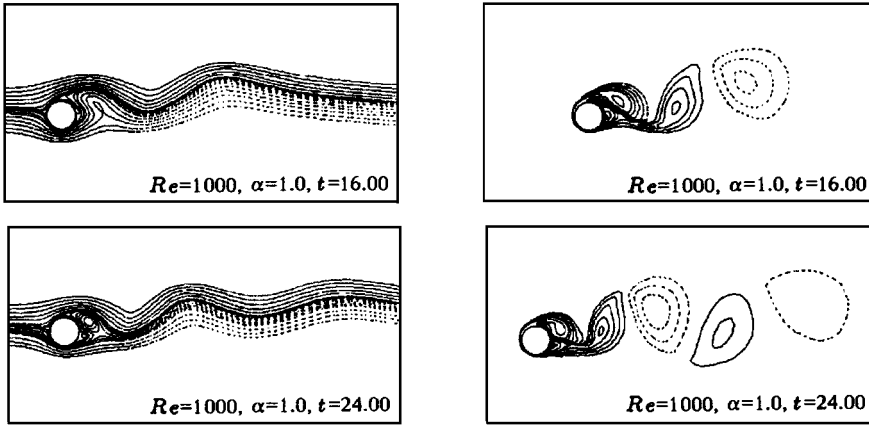


图 4 $Re = 1000, \alpha = 1.0$, 在各时刻的流线及涡量分布图
 Fig.4 Streamline and vorticity contours at different time instants for $Re = 1000, \alpha = 1.0$

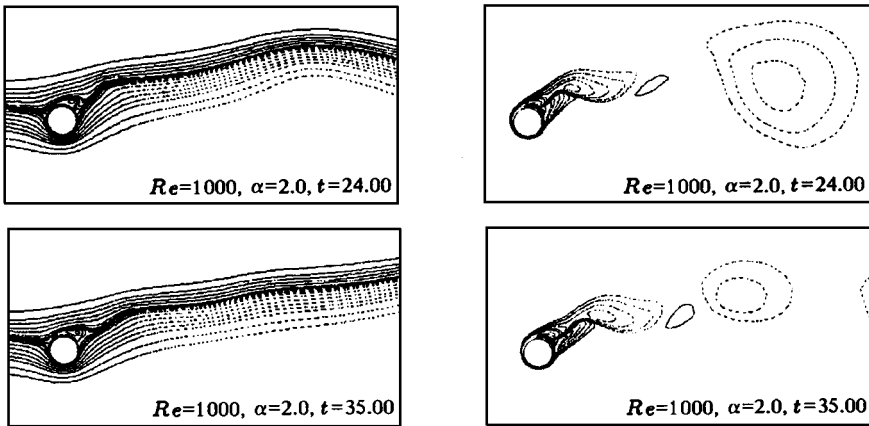


图 5 $Re = 1000, \alpha = 2.0$, 在各时刻的流线及涡量分布图
 Fig.5 Streamline and vorticity contours at different time instants for $Re = 1000, \alpha = 2.0$

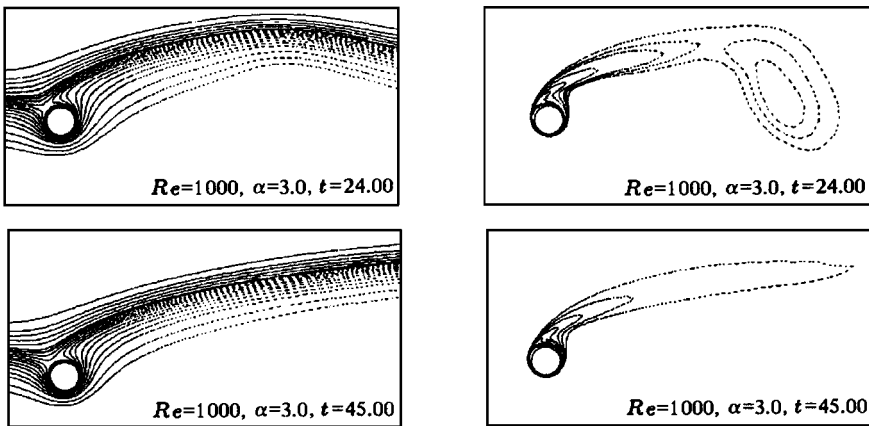


图 6 $Re = 1000, \alpha = 3.0$, 在各时刻的流线及涡量分布图
 Fig.6 Stream line and vorticity contours at different time instants for $Re = 1000, \alpha = 3.0$

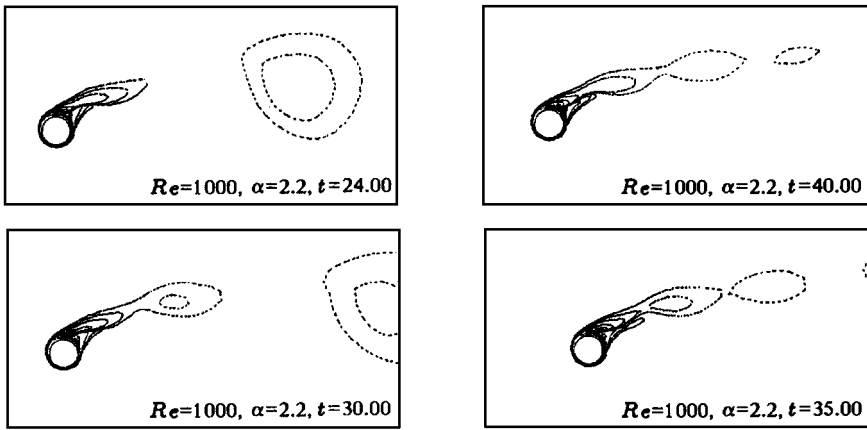


图 7 $Re=1000, \alpha=2.2$, 在各时刻的涡量分布图

Fig 7 Vorticity contours at different timeinstants for $Re=1000, \alpha=2.2$

图 8, 图 9 分别是对不同的 $a (= 0.5, 1.0, 2.0, 3.0)$ 阻力系数 C_d 和升力系数 $C_l (\times (-1))$ 随时间变化的曲线. 对于 $a=0.5, 1.0$ 小于临界值的情形, C_d, C_l 呈现较大幅度的同频周期波动 (注意: 与绕固定圆柱流动时 C_d 变化频率是 C_l 的 2 倍的情形不同). 对于 $a=3.0$ 大于临界值的情形, C_d, C_l 趋于稳定值. 对于 $a=2.0$ 接近临界值的情形, C_d, C_l 有微幅的同频周期波动.

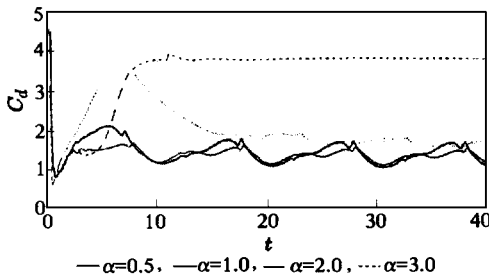


图 8 阻力系数随时间的变化

$Re=1000; a=0.5, 1.0, 2.0, 3.0$

Fig 8 The variation of the drag force coefficient with time for $Re=1000; a=0.5, 1.0, 2.0, 3.0$

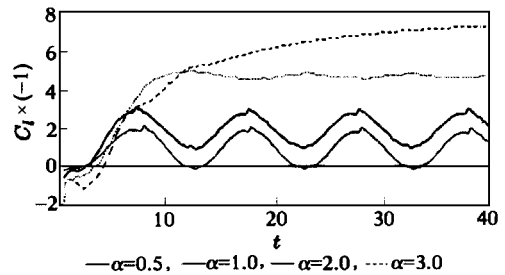


图 9 升力系数随时间的变化

$Re=1000; a=0.5, 1.0, 2.0, 3.0$

Fig 9 The variation of the lift force coefficient with time for $Re=1000; a=0.5, 1.0, 2.0, 3.0$

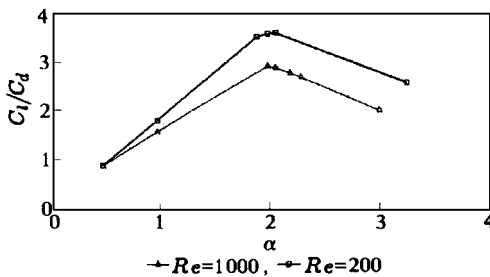


图 10 平均升阻比 \bar{C}_l/\bar{C}_d 随 a 的变化

Fig 10 The variation of \bar{C}_l/\bar{C}_d with a

研究绕旋转圆柱流动的一个重要目的, 是实现用旋转圆柱的方法进行流动控制优化的问题. 从图 8, 图 9 可以看出, 随着 a 的增加, 升力、阻力均呈增加趋势, 但增加的幅度不一样. 因此, 有可能在某一 a 处, 升阻比可获得极大值. 图 10 是 Re 分别为 1000, 200 时, 平均升力系数 $\bar{C}_l (\times (-1))$ 和平均阻力系数 \bar{C}_d 之比 \bar{C}_l/\bar{C}_d 随 a 的变化曲线图. 可见, 平均升阻比 \bar{C}_l/\bar{C}_d 都将在临界值附近取得极大值. 这再一次表明了研究临界状态的流动特性, 对流动控制优化问题的重要性.

4 结 论

- 1) 旋转速度比 a 对柱后尾流的旋涡结构和升力、阻力系数的变化, 有着决定性的影响
- 2) 存在临界的 a_c . 当 $a < a_c$ 时, 尾流呈类似 Kaman 涡街的周期交替双边释放涡结构, 阻力、升力呈较大幅度同频周期波动. 当 $a > a_c$ 时, 尾流呈稳定的单边附着涡结构, 阻力、升力呈稳定值. 当 $a = a_c$ 时, 尾流呈节状单边释放涡结构, 阻力、升力呈微幅同频周期波动
- 3) 最大升阻比可在临界状态附近得到
- 4) 对高阶差分格式形成的宽带矩阵方程, 推荐采用高效的带预处理器的共轭梯度法(如本文的 M LU - CG 方法) 求解

参 考 文 献

- 1 Coutanceau M, Menard C. Influence of rotation on the near-wake development behind an impulsively started circular cylinder. *J. Fluid Mech.* 1985, 158: 399~ 446
- 2 Badr HM, Dennis SCR. Time-dependent viscous flow past an impulsively started rotating and translating circular cylinder. *J. Fluid Mech.* 1985, 158: 447~ 488
- 3 Badr HM, Coutanceau M, Dennis SCR, et al. Unsteady flow past a rotating circular cylinder at Reynolds numbers 10^3 and 10^4 . *J. Fluid Mech.* 1990, 220: 459~ 484
- 4 Chang CC, Chern R-L. Vortex shedding from an impulsively started rotating and translating circular cylinder. *J. Fluid Mech.* 1991, 233: 265~ 298
- 5 Chen Y-M, Ou Y-R, Pearlstein AJ. Development of the wake behind a circular cylinder impulsively started into rotating and rectilinear motion. *J. Fluid Mech.* 1993, 253: 449~ 484
- 6 Ou Y-R. Mathematical modeling and numerical simulation in external flow control. Flow Control, Springer-Verlag, 1995
- 7 Chew YT, Cheng M, Luo SC. A numerical study of flow past a rotating circular cylinder using a hybrid vortex scheme. *J. Fluid Mech.* 1995, 299: 35~ 71
- 8 凌国灿, 凌国平, 王运平. 钝体分离旋涡流动的区域分解, 杂交数值模拟— I 理论方法及其应用. 中国科学, A 辑, 1992 (1): 70~ 79
- 9 凌国灿, 凌国平, 顾启扬. 高雷诺数下绕钝体分离流动的一种新数值算法. 华中理工大学学报, 1992, 20(4): 87~ 93
- 10 Ling Guo-ping, Ling Guo-can. A numerical study of the vortex motion in oscillating flow around a circular cylinder at low and middle Kc numbers. *Acta Mechanica Sinica*, 1994, 10(3): 212~ 219
- 11 吕涛, 石济民, 林振宝. 区域分解算法. 北京: 科学出版社, 1992
- 12 石济民, 林振宝, 岳兴业. M LU - CG 方法在三维三相黑油模型中的应用. 石油勘探与开发, 1994, 21(6): 52~ 58

NUMERICAL STUDY ON VORTEX PATTERNS AND CRITICAL STATE CHARACTERS IN THE WAKE OF A ROTATING CIRCULAR CYLINDER

Ling Guoping

(Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou 215006, China)

Ling Guocan

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract A hybrid finite difference and vortex method, which is based on domain decomposition and proposed by the authors (1992), is used for calculating the flow around a rotating circular cylinder at Reynolds number $Re = 1000$ and the rotation velocity ratio $a = (0.5, 3.25)$ respectively. Some improvements are made in solution process: a high order full implicit difference algorithm is adopted, and the Solvers is replaced by a very efficient modified incomplete LU decomposition conjugate gradient method (MLU-CG). The long-time fully developed features about the variations of the vortex patterns in the wake, and drag, lift forces on the cylinder are given. The calculated stream line contour plots agreed well with the experimental visualized flow pictures. The existence of the critical state is numerically shown for the first time, and the vortex patterns at corresponding states are given, too. The maximum lift to drag force ratio can be obtained near the critical state.

Key words rotating circular cylinder, vortex wake flow, finite difference method, vortex method, preconditioned conjugate gradient method, incomplete LU decomposition