

三维湍流高速进气道内外流场的高效高分辨率解*

王保国 刘秋生

清华大学工程力学系, 北京(邮政编码 100084)

卞荫贵

中国科学院力学研究所, 北京(邮政编码 100080)

摘要 本文提出一种高效、高分辨率求解三维复杂流场的隐式算法, 并成功地用于求解高速进气道内外流场的三维、可压缩、雷诺平均 Navier-Stokes 方程组, 获得了三个工况五种流场的三维数值解; 与有关实验数据比较, 结果令人满意。这种算法由 Jameson-Turkel 的 LU 分解法和张涵信 NND 格式的数值通量耦合而成, 湍流采用 Baldwin-Lomax 模型。大量数值计算表明: 该算法能捕捉到复杂的激波系, 有较好的激波分辨率, 迭代收敛较快, 有较高的求解效率。

关键词 LU分解法, NND格式, 激波捕捉, 湍流模型, 数值模拟, 三维进气道。

引 言

在航空航天飞行器中, 进气道是一个很重要的部件。要模拟它的流场既涉及到三维外流流场的计算, 又涉及到三维内流流场的求解, 而且流场中有复杂的激波系和激波间断面, 存在着激波与粘性干扰的问题; 又要遇到湍流的工程模化, 需要求解一组描写湍流平均量的雷诺平均 Navier-Stokes 方程组; 这些复杂的流动特性给数值模拟带来很大困难。

复杂流场数值模拟的关键问题之一是如何提高激波数值解的分辨率和如何提高求解效率。近年来, 为提高分辨率发展了很多格式, 如 TVD^[1]、ENO^[2]、NND^[3,4]、耗散比拟^[5]和矢量通量分裂^[6,7]等格式, 而且还出现了许多高效算法如 Beam-Warming 的 AF 格式^[8]、Jameson-Turkel 的 LU^[9]分解和多层网格技术^[10]等。文献[11]提出的隐式杂交格式对求解定常流动、改善激波附近数值解的分辨率和加快求解速度、提高效率被证实是有益的。本文进一步发展了文献[11]的工作, 将 LU-TVD 格式由 Euler 方程推广到 Navier-Stokes 方程组并用于三维可压缩湍流高速进气道流场的数值模拟。在计算中, Jameson 的 LU 分解被用于 N-S 方程隐式部分的离散化而张涵信 NND 格式的数值通量被用于控制所谓的稳态解残差; Baldwin-Lomax 模型^[12]用于决定全场的湍流粘性系数, 因此

*国家自然科学基金和国家博士后基金资助项目。

本文于1994年11月18日收到, 1995年2月5日收到修改稿。

雷诺平均 N-S 方程组便能求解。

一、三维可压缩层流与湍流的守恒型 N-S 方程组

1. 层流三维 N-S 方程组

积分形式方程组

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} W^* d\Omega + \oint_{\sigma_{\Omega}} \vec{n} \cdot F_{inu} ds = \oint_{\sigma_{\Omega}} \vec{n} \cdot F_{vis} ds \quad (1a)$$

$$\tau = \mu [\nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T] - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{V}) (\vec{i} \vec{i} + \vec{j} \vec{j} + \vec{k} \vec{k}) \quad (1b)$$

$$p = \rho RT \quad (1c)$$

$$p = (\gamma - 1) \left(e - \frac{1}{2} \rho \vec{V} \cdot \vec{V} \right) \quad (1d)$$

$$\lambda = \frac{\gamma \mu R}{(\gamma - 1) Pr} \quad (1e)$$

式中 γ 、 R 、 λ 、 Pr 、 μ 、 ρ 、 p 、 T 、 \vec{V} 、 e 和 τ 分别为比热比、气体常数、热传导系数、Prandtl 数、粘性系数、密度、压强、温度、速度、总内能和粘性应力张量。 W^* 、 F_{inu} 和 F_{vis} 的定义为

$$W^* = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \vec{V} \\ e \end{bmatrix}, \quad F_{vis} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \\ \tau \cdot \vec{V} + \lambda \nabla T \end{bmatrix} \quad (2a)$$

$$F_{inu} = \begin{bmatrix} \rho \vec{V} \\ \rho \vec{V} \vec{V} + p (\vec{i} \vec{i} + \vec{j} \vec{j} + \vec{k} \vec{k}) \\ (e + p) \vec{V} \end{bmatrix} \quad (2b)$$

显然，连同求解域的边界条件，则 (1a) ~ (1e) 式便构成以 ρ 、 \vec{V} 、 e 为未知量的封闭方程组，可用于层流计算。

2. 工程计算湍流流场的主要方法

从雷诺平均 N-S 方程组出发，对其中的 Reynolds 应力项引入湍流模型，建立一组描写湍流平均量的封闭方程组。因此本文针对可压缩湍流流场，采用 Favre 平均并引入 Baldwin-Lomax 模型，这样得到的平均 N-S 方程组在形式上仍与 (1a) 式相同，但这时的 W^* 、 F_{inu} 、 F_{vis} 、 μ 和 λ 应具有下面的定义

$$W^* = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} (\tilde{u} \vec{i} + \tilde{v} \vec{j} + \tilde{w} \vec{k}) \\ \tilde{e} \end{bmatrix}, \quad F_{vis} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\tau} \\ \tilde{\tau} \cdot (\tilde{u} \vec{i} + \tilde{v} \vec{j} + \tilde{w} \vec{k}) + \lambda \nabla \bar{T} \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$F_{inu} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} (\tilde{u} \vec{i} + \tilde{v} \vec{j} + \tilde{w} \vec{k}) \\ \bar{\rho} (\tilde{u} \vec{i} + \tilde{v} \vec{j} + \tilde{w} \vec{k}) (\tilde{u} \vec{i} + \tilde{v} \vec{j} + \tilde{w} \vec{k}) + \bar{p} (\vec{i} \vec{i} + \vec{j} \vec{j} + \vec{k} \vec{k}) \\ (\tilde{e} + \bar{p}) (\tilde{u} \vec{i} + \tilde{v} \vec{j} + \tilde{w} \vec{k}) \end{bmatrix} \quad (3b)$$

$$\mu = \mu_e + \mu_t, \quad \lambda = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \left[\frac{\mu_e}{Pr_e} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right] \quad (3c)$$

式中各带“~”的量均为时均值; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为笛卡儿坐标系的单位矢量; u, v, w 为速度沿 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 方向上的分量; $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ 为 u, v, w 在 Favre 平均下的值; μ_e, μ_t, Pr_e 和 Pr_t 分别为分子粘性系数, 湍流粘性系数, 分子 Prandtl 数和湍流 Prandtl 数(下文计算中取 $Pr_e \approx 0.72, Pr_t \approx 0.9$; 并认为 μ_e 仍由 Sutherland 公式决定, 且 μ_t 由 Baldwin-Lomax 模型计算)。(3a) 式中 $\tilde{\tau}$ 为张量, 它的分量为

$$\tilde{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \quad (4)$$

式中采用了 Einstein 求和约定; δ_{ij} 为 Kronecker 符号; $i, j, k = 1 \sim 3, x_1, x_2, x_3$ 代表 $x, y, z; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ 代表 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 。

二、有限体积离散技术及粘性项的处理

(1a) 式可改写为

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} W d\Omega + \oiint_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot E ds = (\text{粘性项 VIS}) \equiv \text{VIS} \quad (5)$$

这里 W 和 E 定义为

$$W = [\bar{\rho}, \bar{\rho} \tilde{u}, \bar{\rho} \tilde{v}, \bar{\rho} \tilde{w}, \bar{e}]^T, \quad E = F \vec{i} + G \vec{j} + H \vec{k} \quad (6a)$$

$$F = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u} + \bar{p} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{w} \\ (\bar{e} + \bar{p}) \tilde{u} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{v} + \bar{p} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{w} \\ (\bar{e} + \bar{p}) \tilde{v} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \tilde{w} \\ \bar{\rho} \tilde{w} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{w} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{w} \tilde{w} + \bar{p} \\ (\bar{e} + \bar{p}) \tilde{w} \end{bmatrix} \quad (6b)$$

下文省略 (6a) 与 (6b) 式中各量的“-”与“~”; 于是采用有限体积离散技术, 对任一个有限体单元 Ω_{ijk} 则 (5) 式被离散为

$$\frac{\Omega_{ijk}}{\Delta t} \Delta W_{ijk}^* + \sum_{l=1}^6 (F)_l^{(n+1)} = (\text{离散后的粘性项})^{(n+1)} \equiv (\text{DVIS})^{(n+1)} \quad (7)$$

式中 ΔW^* 与 F 的定义为

$$\Delta W^* = W^{(n+1)} - W^{(n)}, \quad F = \vec{s} \cdot E, \quad \vec{s} = s_1 \vec{i} + s_2 \vec{j} + s_3 \vec{k} \quad (8)$$

为便于粘性计算, 引进两个对称辅助矩阵 $[\tilde{A}]$ 、 $[\tilde{B}]$, 它们的元素分别为 a_{ij} 与 b_{ij} ; 即

$$[\tilde{A}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad [\tilde{B}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

它们都是定义在有限体单元面心上的量, 对于单元体体心上的 a_{ij} 可由 (10) 式算出

$$a_{ij} = \frac{1}{\Omega} \sum_{l=1}^6 (u_l s_{il} + u_l s_{jl}), \quad (10)$$

而面心上的 b_{ij} 定义为

$$b_{ij} = u_i s_j + u_j s_i \quad (11)$$

这里 u_1, u_2, u_3 分别表示Favre平均下的分速度 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ ；显然， $a_{ij} = a_{ji}, b_{ij} = b_{ji}$ ；可

以证明粘性项 $\sum_{i=1}^6 (\vec{s} \cdot \tau)_i$ 与 $\sum_{i=1}^6 (\vec{s} \cdot \tau \cdot \vec{\nu})_i$ 有如下表达式^[13]

$$\sum_{i=1}^6 (\vec{s} \cdot \tau)_i = \sum_{i=1}^6 \left\{ -\frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{\nu}) \vec{s} + \mu [s_1, s_2, s_3] [\tilde{A}] [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]^T \right\}_i \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^6 (\vec{s} \cdot \tau \cdot \vec{\nu})_i = \sum_{i=1}^6 \left\{ \frac{\mu}{6} [a_{11}, a_{22}, a_{33}] (\Pi) [b_{11}, b_{22}, b_{33}]^T + \mu (a_{12} b_{12} + a_{13} b_{13} + a_{23} b_{23}) \right\}_i \quad (13)$$

这里

$$[\Pi] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

显然借助于 $[\tilde{A}]$ 、 $[\tilde{B}]$ 表达的粘性项具有较少的计算量。

三、三维LU-TVD杂交新格式

非定常 Navier-Stokes 方程属于非线性双曲-抛物型偏微分方程组，它含有反映对流特性的无粘项和反映耗散特性的粘性项。为使差分格式对流场间断面计算有较强的分辨力和对流场求解有较高的效率，所以构造差分格式时更多地把注意力集中到对无粘部分的逼近。考虑到(1)Jameson-Turkel的LU格式具有逐点扫描推进和快速求解的特点，且求解三维问题时只需求两个算子方程，较Beam-Warming的AF格式快，但这种格式在捕捉激波时有振荡，需要加入二阶或四阶人工粘性项去阻尼；(2)控制残差的数值通量计算非常重要，尤其对求解定常流动问题。文献[11]采用Harten数的值通量来控制残差，大量的数值计算表明，这种数值通量给杂交格式带来了耗散机制且使激波的捕捉具有较高的分辨率，另外也不需要人为附加人工粘性项去阻尼数值振荡。但计算中感到Harten的数值通量计算量大。基于上述两点考虑，构造了如下的杂交格式：在求解三维问题时，不但有逐点扫描推进的特点而且仍只要求解两个算子方程，另外控制残差的数值通量采用NND格式中的形式，对通量差分作minmod。

下文中约定：单元体 (i, j, k) 与单元体 $(i+1, j, k)$ 所夹的面为 $(i+1/2, j, k)$ ；对单元体 (i, j, k) 而言， $(i+1/2, j, k)$ 面的外法矢量简记为 $\vec{s}_{i+1/2}$ ，相应的这个面上的 F 与 A 也分别简记着 $F_{i+1/2}$ 与 $A_{i+1/2}$ ；在给出本文格式前，先将 $F^{(n+1)}$ 线性化为

$$F_{i+1/2}^{(n+1)} \approx F_{i+1/2}^{(n)} + A_{i+1/2}^+ \Delta W_i^n + A_{i+1/2}^- \Delta W_{i+1}^n \quad (15)$$

式中 A^+ 与 A^- 满足如下关系

$$A^+ = \frac{\lambda_7}{\lambda_6} (A - \lambda_6 I), \quad A^- = -\frac{\lambda_6}{\lambda_7} (A - \lambda_7 I), \quad (16a)$$

$$\lambda_6 = \lambda_7 - \lambda_6, \quad (16b)$$

$$\lambda_6 = \min[\min(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5), 0] \quad (16c)$$

$$\lambda_7 = \max[\max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5), 0] \quad (16d)$$

$$A^+ + A^- = A = S_1 A + S_2 B + S_3 C \quad (16e)$$

这里 A, B, C 分别为 F, G, H 的 Jacobian 矩阵; I 为单位阵。于是 (7) 式变为

$$\Delta W_{ijk}^n + (\Delta\tau) \text{tr}[(A)'(\Delta W)^* + (A)'(\Delta W)^*] = -(\Delta\tau) R_{ijk}^{\{n\}} \quad (17)$$

这里 $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹; 矩阵 $[A]', [A]^*$ 和 $[\Delta W]^*$ 的定义分别为

$$[A]' = \begin{bmatrix} A_{i-1/2}^+ & A_{i+1/2}^+ & 0 \\ A_{j-1/2}^+ & A_{j+1/2}^+ & 0 \\ A_{k-1/2}^+ & A_{k+1/2}^+ & 0 \end{bmatrix}, \quad [A]^* = \begin{bmatrix} 0 & A_{i-1/2}^- & A_{i+1/2}^- \\ 0 & A_{j-1/2}^- & A_{j+1/2}^- \\ 0 & A_{k-1/2}^- & A_{k+1/2}^- \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$[\Delta W]^* = \begin{bmatrix} \Delta W_{i-1}^n & \Delta W_{j-1}^n & \Delta W_{k-1}^n \\ \Delta W_{ijk}^n & \Delta W_{ijk}^n & \Delta W_{ijk}^n \\ \Delta W_{i+1}^n & \Delta W_{j+1}^n & \Delta W_{k+1}^n \end{bmatrix} \quad (19)$$

这里 ΔW_{i+1}^n 与 ΔW_{k-1}^n 等分别省略了下标 j, k 与 i, j ; 另外 (17) 式中符号 $\Delta\tau$ 与 $R^{\{n\}}$ 的定义为

$$R_{ijk}^{\{n\}} = (F_{i+1/2} + F_{i-1/2} + F_{j+1/2} + F_{j-1/2} + F_{k+1/2} + F_{k-1/2} + \text{DVIS})^{\{n\}} \quad (20)$$

$$\Delta\tau = \Delta t / \Omega_{ijk} \quad (21)$$

这里 DVIS 为离散后的粘性项。按照 Jameson-Turkel 的思想构造 L 与 U 算子, 对 (17) 式作 LU 分解便有

$$[(\Delta\tau) A_{i-1/2}^+, (\Delta\tau) A_{j-1/2}^+, (\Delta\tau) A_{k-1/2}^+, I + \Delta\tau(A_{i+1/2}^+ + A_{j+1/2}^+ + A_{k+1/2}^+)] [\Delta\tilde{W}_{i-1}^{\{n\}}, \Delta\tilde{W}_{j-1}^{\{n\}}, \Delta\tilde{W}_{k-1}^{\{n\}}, \Delta\tilde{W}_{ijk}^{\{n\}}]^T = -(\Delta\tau) R_{ijk}^{\{n\}} \quad (22)$$

$$[(\Delta\tau) A_{i+1/2}^-, (\Delta\tau) A_{j+1/2}^-, (\Delta\tau) A_{k+1/2}^-, I + \Delta\tau(A_{i-1/2}^- + A_{j-1/2}^- + A_{k-1/2}^-)] [\Delta W_{i+1}^{\{n\}}, \Delta W_{j+1}^{\{n\}}, \Delta W_{k+1}^{\{n\}}, \Delta W_{ijk}^{\{n\}}]^T = \Delta\tilde{W}_{ijk}^{\{n\}} \quad (23)$$

显然, 它们均可以逐点扫描推进, 计算起来十分方便。

为了保证数值计算的稳定性, 过去在解 L 算子方程 (22) 式时要人为加进二阶和四阶人工粘性项。为避开引入人工粘性, 本文仍采用文献 [11] 提出的杂交格式的思想, 将 (22) 式右端项中的 $R_{ijk}^{\{n\}}$ 修改为 $\tilde{R}_{ijk}^{\{n\}}$ 即

$$\tilde{R}_{ijk}^{\{n\}} = (\tilde{F}_{i+1/2} + \tilde{F}_{i-1/2} + \tilde{F}_{j+1/2} + \tilde{F}_{j-1/2} + \tilde{F}_{k+1/2} + \tilde{F}_{k-1/2})^{\{n\}} \quad (24)$$

这里 \tilde{F} 为张涵信 NND 格式的数值通量^[3]

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{i+1/2} = & F_i^+ + F_{i+1}^- + \frac{1}{2} \text{minmod}(\Delta F_{i-1/2}^+, \Delta F_{i+1/2}^+) \\ & - \frac{1}{2} \text{minmod}(\Delta F_{i+1/2}^-, \Delta F_{i+3/2}^-) \end{aligned} \quad (25)$$

式中

$$\Delta F_{i+1/2}^+ = F_{i+1}^+ - F_i^+, \quad \Delta F_{i+1/2}^- = F_{i+1}^- - F_i^- \quad (26)$$

在有限体积法中, 对 $i+1/2$ 面而言 F_i^+ 的值可由下式定义

$$F_i^+ = F^+(W_i) (S_1)_{i+1/2} + G^+(W_i) (S_2)_{i+1/2} + H^+(W_i) (S_3)_{i+1/2} \quad (27)$$

式中 $F^+(W_i)$, $G^+(W_i)$, $H^+(W_i)$ 分别就是 F^+ , G^+ , H^+ ,它们可由 F, G, H 的正负分裂得到,这里 F, G, H 的定义同(6)式。

边界条件:由于进气道内、外流场边界很复杂,因此边界条件的提法也相应地要复杂些。

(1) 由特征分析,当来流边界亚声速时需要给定边界上的四个流场参数,超声速时需给定五个。

(2) 进气道出口条件:(a)出口为亚声速时则需要给定一个条件,例如给定出口处的背压分布;(b)出口为超声速时则不规定另外的条件。

(3) 在物面上,速度满足无滑移条件。然而,在有限体积法中,在物面处对单元体的动量积分有影响的不是物面上速度的分布而是壁面压力和壁面切应力 τ_w 的分布。壁面处的压力可由 $(\partial p/\partial n)_w=0$ 来决定;壁面及近壁面处的切应力可用壁面律来估算。另外,有时还假定壁面绝热条件即满足 $(\partial T/\partial n)_w=0$ 的关系式。

(4) 远场边界可利用法线方向的Riemann不变量建立无反射边界条件。

采用时间推进法计算流场时,还需要给出初始的近似流场。本文采用了简单的一维无粘流提供了初始的近似流场。

四、典型算例及讨论

针对国外某型号高速进气道,本文完成了三种工况五种流场的三维流场计算。这五种流场是①进口马赫数 $M_\infty=0.85$,进气攻角 $\alpha=0^\circ$ 时三维Euler流场计算;② $M_\infty=3.0$, $\alpha=0^\circ$ 时三维Euler流场的计算;③ $M_\infty=3.0$, $\alpha=5^\circ$ 时三维Euler流场计算;④ $M_\infty=3.0$, $\alpha=0^\circ$ 时三维湍流Navier-Stokes流场的计算;⑤该型号设计工况 $M_\infty=2.65$, $\alpha=0^\circ$ 时三维湍流Navier-Stokes流场的计算。

1. 网格生成及紧靠壁面第一条网格线的设计

由于进气道形状复杂,本文采用了一种代数——TTM法生成三维贴体网格。其具体做法是:用代数方法沿周向作一系列子午截面,而后在每个子午截面上用TTM法^[14]解Poisson方程,生成贴体网格。显然,这种办法简单且灵活性较好。

在湍流计算中,一个至关重要的问题是如何保证粘性区域中有足够小的网格雷诺数^[15],因此网格设计在粘流计算中就格外重要。在网格设计中,本文采用了网格间距按等比规律由壁面向通道中心逐渐变大的分布规律,同时严格控制了紧靠壁面第一条网格线的位置,使其落到壁面附近充分发展的湍流区内。分析近壁区的流动,近壁区的湍流可分为粘性底层区、过渡区和湍流核心区;在湍流的工程计算中,整个内层的速度分布可归纳成如下壁面律

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & (y^+ \leq 30) \\ \frac{1}{K} \ln(Ey^+) & (30 \leq y^+ \leq 100) \end{cases} \quad (28)$$

式中 u^+ 和 y^+ 分别为无量纲切向速度和无量纲壁面法向距离; K 与 E 分别为 Karman 常数和表面粗糙度参数; 在本文高速进气道三维湍流计算时, 我们放弃了对粘性底层和复杂过渡区的详细模拟, 把紧靠壁面的第一条网格线设计到 $y^+ = 20 \sim 100$ 的范围内。显然, 这样做就使湍流计算存在着一个网格事先预估, 事后校核、调整的网格设计过程。检查第一条网格线上的 y^+ 值, 如不符合 y^+ 的范围, 则重新调整网格分布。在本文计算中, 由于采用了壁面律, 有效地减少了壁面附近的网格点数, 在本文三维无粘与粘性计算中, 分别采用了 $30 \times 30 \times 15$ 与 $30 \times 50 \times 25$ 的网格。

2. 涡量、壁面切应力及湍流粘性系数的计算

涡量 $\vec{\omega}$ 用下式计算

$$|\vec{\omega}| = [(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 + (\omega_3)^2]^{1/2} \quad (29)$$

式中 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 为 $\vec{\omega}$ 在直角坐标系中的分量; 在有限体积法中, 体心上的 ω_i 值可近似为

$$\omega_i \approx \frac{1}{\Omega} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) d\Omega = \frac{1}{\Omega} \sum_{l=1}^6 (u_3 s_{2l} - u_2 s_{3l}) \quad (30)$$

这里 u_1, u_2, u_3 为 \vec{v} 在直角坐标系下的分速度; 对于 ω_2 和 ω_3 也有类似的表达式。

壁面剪切应力 τ_w 可按下面办法计算: 设近壁第一条网格线落到了壁面附近充分发展的湍流区内, 今考查该网格线上任一网格点 C_1 , 并将该点处的速度、密度、涡量和离开壁面的法向距离分别记作 $(u)_1, (\rho)_1, (|\vec{\omega}|)_1$ 和 $(r)_1$; 假设与点 C_1 邻近的壁面点为 C_w , 该点的密度和粘性系数分别为 ρ_w 和 μ_w 并且假设 $\rho_w = (\rho)_1, \mu_w = (\mu)_1$, 于是点 C_1 处的参数也应满足(28)式便得出

$$(u)_1 \left(\frac{\tau_w}{\rho_w} \right)^{-1/2} = \frac{1}{K} \ln \left[\frac{E}{\mu_w} (r)_1 (\rho_w \tau_w)^{1/2} \right] \quad (31)$$

因此由(31)式便可算出 C_w 点处的剪切应力 τ_w 值。

湍流涡粘系数 μ_t 的计算, 本文采用了 Baldwin-Lomax 模型^[12]。文献[13]和本文所作的大量计算都表明: 从中心流道到壁面, 涡粘系数的变化相当剧烈, 数值变化的范围相当大。

3. 无粘与粘性流的三维计算分析

对格式的收敛问题: 本文以残差下降三个数量级作为收敛标准, 在 Courant 数取为 6 的情况下, 对三维 Euler 方程要经 300 多个时间步, 对三维 Navier-Stokes 方程要经 400 多个时间步流场才收敛。上述计算在装加速板的 286 微机(大约 300 万次/秒)上进行, 在 $30 \times 30 \times 15$ 的网格下作三维无粘计算, 每完成一个时间步用 1~2 分钟的 CPU 时间; 在 $30 \times 50 \times 25$ 的网格下作三维湍流 Navier-Stokes 方程计算, 每完成一步要花 2~3 分钟。显然, 在上述微机上用 15~20 个小时就可以得到一个三维、湍流、高速进气道内外流场的收敛解, 这本身就体现了该方法的高效性和较强的生命力; 同时也显示了它既经济又方便的特色, 它为进气道湍流流场的工程计算提供了方便。

对格式的激波分辨率: 图 1、图 2 分别给出 $M_\infty = 3.0$, 进气攻角 α 分别为 0° 和 5° 时 Euler 方程下全场等马赫线的分布。可以看到零攻角下计算出的三维流场具有很好的对

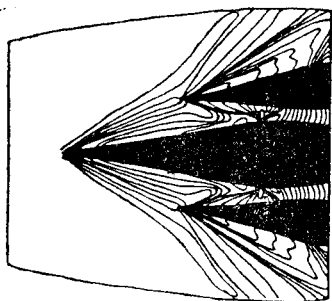


图 1 子午面上全场等马赫线($M_\infty = 3.0, \alpha = 0^\circ$)
 Fig.1 Mach number contours.
 ($M_\infty = 3.0, \alpha = 0^\circ$)

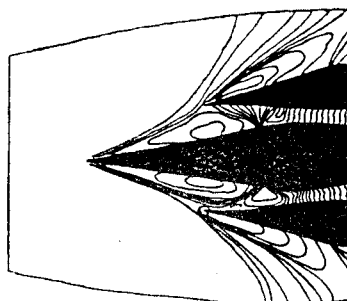


图 2 子午面上全场等马赫线($M_\infty = 3.0, \alpha = 5^\circ$)
 Fig.2 Mach number contours
 ($M_\infty = 3.0, \alpha = 5^\circ$)

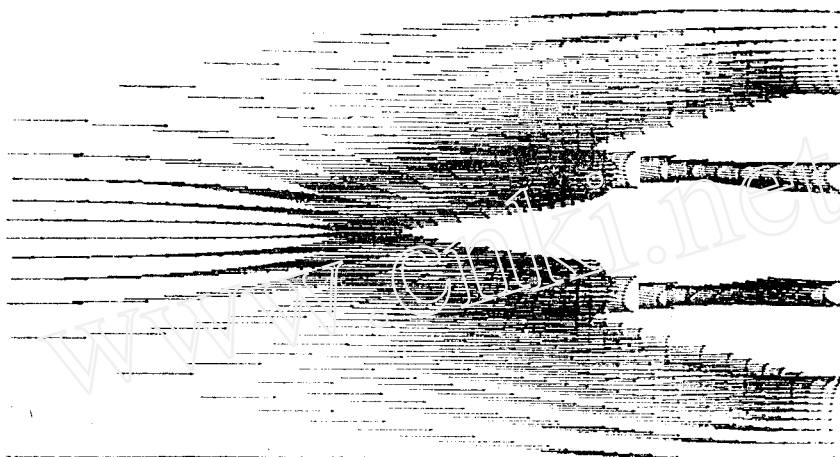


图 3 子午面上全场速度矢分布($M_\infty = 3, \alpha = 0^\circ$, 欧拉解)
 Fig.3 Velocity vectors distributions($M_\infty = 3, \alpha = 0^\circ$, 欧拉解)

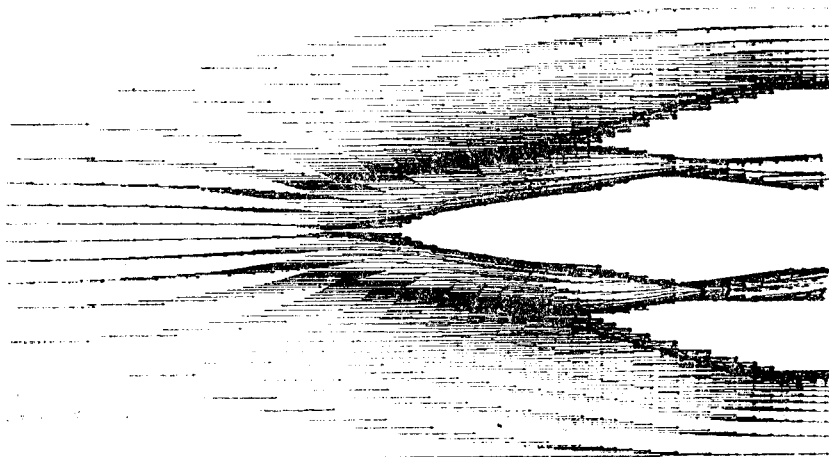
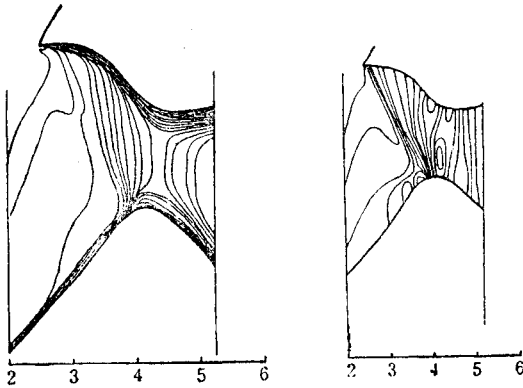


图 4 子午面上全场速度矢分布($M_\infty = 3, \alpha = 0^\circ$, 粘性流)
 Fig.4 Velocity vectors distributions($M_\infty = 3, \alpha = 0^\circ$, 粘性流)

称性,它反映了零攻角下三维流场的重要特点。本文算出的进气道内通道出口截面的马赫数在 $\alpha=0^\circ$ 时为2.2左右。对 $\alpha=5^\circ$ 时,本文算出的攻角影响非常显著,这时子午面上流场的上、下两部分的流动有明显差别。以进气道内通道出口截面的马赫数为例,算出的上通道出口马赫数为2.15,下通道出口为2.42,两者相差0.27;从图1与图2两种工况的计算结果可以清楚地看出:两种工况下流场都有复杂的激波系并且还存在着激波反射。能捕捉到如此复杂的激波系,它显示了本格式具有高分辨率的特点。



(a) 粘流 (b) 无粘流
图5 内流道等马赫线分布的局部放大图
($M_\infty=3, \alpha=0^\circ$)
Fig.5 Enlarged Mach number contours
($M_\infty=3, \alpha=0^\circ$)

算出的两张图中可以看出它们在速度剖面上的差异,图5给出了该进气条件下两种流场模型时的等马赫线局部放大图。显然,两者有着不同的流场结构,尤其是近壁区域差别更大。

4. 计算与实验结果的比较

模拟进气道真实的流场,粘性影响必须考虑。在高速进气道中,进口马赫数较高、进口雷诺数较大,进气道内外流场的波系复杂,流动处于湍流状态,因此雷诺平均Navier-Stokes方程组成为模拟这类流场的基本方程。为了与实验比较,我们计算了该型号进气道的设计工况,这时 $M_\infty=2.65, \alpha=0^\circ$,该工况下 $Re=8.53 \times 10^6/m$;计算时从雷诺平均N-S方程组出发,采用本文发展的LU-TVD格式进行数值求解,以残差下降三个数量级作为收敛标准,此时仅用420个时间步便得到这个三维流场的收敛解。计算中仍选用Baldwin-Lomax湍流模式。图6给出了该工况下全场等马赫线分布的计算结果,图7与图8分别给出沿进气道中心体表面与唇罩内侧表面上的压力分布曲线,显然计算与实验结果基本上一致。

对于进气道的同一种进气条件,不同的流动模型计算出的流场结构也不相同。图3和图4分别给出了 $M_\infty=3.0, \alpha=0^\circ$ 时三维Euler解与三维湍流Navier-Stokes方程解的全场速度矢量分布图。从本文计

算出的全场速度矢量分布图。从本文计

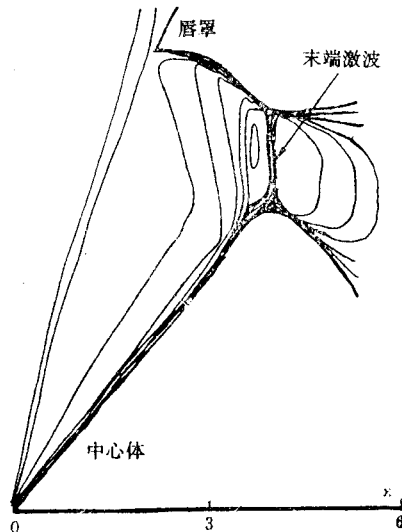


图6 子午面上全场等马赫线分布
(粘流, $M_\infty=2.65, \alpha=0^\circ$)
Fig.6 Mach number contours
(粘流, $M_\infty=2.65, \alpha=0^\circ$)

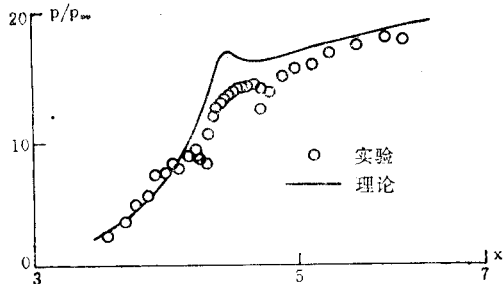


图 7 中心体表面上的压力分布 ($M_\infty = 2.65, \alpha = 0^\circ$)
Fig.7 Surface pressure distributions
($M_\infty = 2.65, \alpha = 0^\circ$)

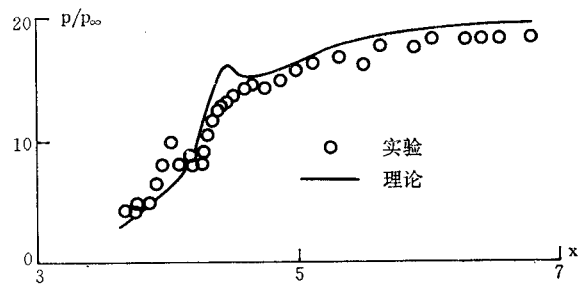


图 8 唇罩内侧表面上的压力分布 ($M_\infty = 2.65, \alpha = 0^\circ$)
Fig.8 Surface pressure distributions
($M_\infty = 2.65, \alpha = 0^\circ$)

五、结 论

本文给出一种高效率、高分辨率的 LU-TVD 杂交新格式，并对高速进气道的三个工况五种流场进行了三维数值计算。结果表明，该格式计算稳定、能够捕捉到复杂的激波系，表明了具有较高的激波分辨率，而且迭代收敛较快，当 Courant 数取为 6 且收敛标准定作残差下降三个数量级，则获得进气道内外流场的一个三维湍流、雷诺平均 Navier-Stokes 方程解只花 400 多个时间步，体现了本格式在算法上的高效率。

参 考 文 献

- 1 Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *J. Comp. Phys.*, 1983, 49(3):357~393
- 2 Harten A, Osher S, Chakravarthy S R. Uniformly High Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes. *J. of Comp. Phys.*, 1987, 71:231~303
- 3 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式. *空气动力学学报*, 1988, 6(2):143~165
- 4 Zhang H X, Zhuang F G. NND Schemes and Their Applications to Numerical Simulations of Two and Three Dimensional Flows. *Advances in Applied Mechanics*, 1992, 29:193~256
- 5 傅德薰, 马延文. 耗散比拟法数值求解航天飞机超声速粘性绕流问题. *中国科学 A 辑*, 1993, 23(1):39~46
- 6 黄东海, 沈孟育. 三维跨音速叶栅粘流的数值模拟. *计算流体力学的理论、方法和应用*. 北京: 科学出版社, 1992, 235~238
- 7 王保国, 陈乃兴. 一个高分辨率的矢量通量分裂——TVD 杂交新格式. *应用力学学报*, 1990, 7(2):83~89
- 8 Beam R, Warming R. An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations. *J. AIAA*, 1978, 16:393~402
- 9 Jameson A, Turkel E. Implicit Schemes and LU Decompositions. *Math. Comp.*, 1981, 37(156):385~397
- 10 Brandt A. Multi-Level Adaptive Solution to Boundary Value Problems. *Math. Comp.*, 1977, 31(138):333~390
- 11 王保国. 新的解跨音速 Euler 方程的隐式杂交方法. *航空学报*, 1989, 10(7):309~315
- 12 Baldwin B, Lomax H. Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows. *AIAA Paper 78-257*, 1978.
- 13 王保国. 三维高速进气道无粘及粘性流场计算. 中国科学院力学所博士后出站论文, 1993, 1~100
- 14 Thompson J F et al. *J. Comp. Phys.*, 1974. 15:299~319
- 15 张涵信等. 高精度差分求解气动方程的几个问题. *空气动力学学报*, 1993, 11(4):347~356

**An Efficient High-Resolution Hybrid Scheme For Solving
Three Dimensional Reynolds-Averaged Navier-Stokes
Equations of High Speed Inlet Flows**

Wang Baoguo Liu Qiusheng

(Dep. of Engineering Mechanics, Tsinghua University)

Bian Yingui

(Institute Of Mechanics, Chinese Academy Of Sciences)

Abstract A new and efficient three-dimensional implicit hybrid scheme for Navier-Stokes equations is presented. The basic scheme is the coupling of the Jameson and Turkel's LU decompositions and Prof. Zhang Hanxin's NND concept. The improved LU decompositions is applied to discretize the implicit part of the equations and Zhang's modified flux function to calculate the right hand side operators of the hybrid scheme. Numerical calculations were made of supersonic inlet flows with mixed external-internal compressions. Some of the computed results were compared with available wind tunnel data.

Key words LU scheme, NND scheme, turbulence model, shock wave capture, numerical simulation, 3-D inlet.