

# 三维有限体平片裂纹的超奇异 积分方程与边界元法

秦太验

(中国农业大学工程基础科学部, 北京 100083)

汤任基

(上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

陈卫江

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘要** 利用 Somigliana 公式及有限部积分的概念, 导出了含任意平片裂纹三维有限体问题的超奇异积分方程组, 并联合使用有限部积分与边界元法, 建立了数值求解方法. 在裂纹前沿附近单元, 采用与理论分析一致的平方根位移模型, 以提高数值结果的精度. 最后计算了若干典型例子的应力强度因子.

**关键词** 三维有限体裂纹问题, 超奇异积分方程, 数值算法, 应力强度因子

## 引言

研究三维裂纹问题具有重要的理论价值和实用价值, 在已有的文献报道中, 比较典型的数值求解方法有有限元法、Schwartz 有限元交替法、边界元法等. Yamamoto 等人用轴对称有限元法计算了含圆片裂纹圆柱体的应力强度因子<sup>[1]</sup>. Nishioka 等人用 Schwartz 交替法与有限元结合的方法计算了含椭圆裂纹圆柱体及表面裂纹问题的应力强度因子<sup>[2]</sup>, 但他们的方法局限于椭圆裂纹. Cruse 用常规的边界元法分析了三维有限体裂纹问题, 但从效果看计算精度并不高<sup>[3]</sup>. Jia 和 Shippy 等则使用奇性边界元法分析三维裂纹问题, 在裂纹前沿附近单元采用具有平方根特性的位移插值函数<sup>[4]</sup>. Sohn 和 Hong 用有限部积分与有限交替法结合的方法求解了类似的裂纹问题<sup>[5]</sup>. 超奇异积分方程是 Ioakimidis (1982 年) 首次引入断裂力学的<sup>[6]</sup>, 已被广泛应用于求解线弹性断裂力学问题. 文 [7] 严格地证明了受任意载荷作用的平片裂纹问题的超奇异积分方程组, 分析了未知解在裂纹前沿的性态, 并给出了性态指数. 本文在文 [8] 的基础上, 进一步导出了三维有限体平片裂纹问题的超奇异积分方程组, 并为其建立了数值求解方法. 在裂纹前沿附近单元, 采用平方根位移模型, 以提高数值计算精度, 并用此计算了若干算例的应力强度因子.

## 1 三维有限体平片裂纹的超奇异积分方程组

设在三维有限弹性体中有一任意形状平片裂纹  $S$  ( $S^+$ ), 弹性体的外边界为  $\Gamma$ , 在裂纹上表面  $S^+$  放置一直角坐标系, 使  $ox_3$  轴与  $S^+$  垂直, 则弹性体内任一点  $p$  处的位移为<sup>[3]</sup>

$$u_k(p) = - \int_{S^+} T_{ki}(p, Q) u_i(Q) ds(Q) + \int_{\Gamma} U_{ki}(p, Q) t_i(Q) ds(Q) - \int_{S^+} T_{ki}^+(p, Q) \tilde{u}_i(Q) ds(Q) \quad (k, i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

式中  $\tilde{u}_i = u_i^+ - u_i^-$  为裂纹面  $S$  的位移间断, 积分核由下式给出

$$U_{ki}(p, Q) = \frac{1}{8} \frac{1}{E(1-\nu)} r [ (3-4\nu) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i} ]$$

$$T_{ki}(p, Q) = - \frac{1}{8} \frac{1}{(1-\nu)^2 r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [ (1-2\nu) \delta_{ki} + 3 r_{,k} r_{,i} ] - (1-2\nu) (r_{,k} n_i - r_{,i} n_k) \right\}$$

而  $T_{ki}^+(p, Q)$  则由  $T_{ki}(p, Q)$  令其中的  $Q \in S^+$  获得. 此外,  $r$  为内点  $p$  与  $Q$  点之间的距离,  $n_i$  为边界或  $S^+$  在  $Q$  点的外法向分量. 在式 (1) 中, 未知函数为裂纹面  $S$  上的位移间断  $\tilde{u}_i$  及边界上的面力  $t_i$  或位移  $u_i$ , 所有这些未知量均可由以下一组积分方程解得<sup>[8]</sup>

$$\frac{E}{8(1-\nu^2)} =_{S^+} [ (1-2\nu) \delta_{ki} + 3 r_{,k} r_{,i} ] \tilde{u}_i d_1 d_2 - S_{k33}(p, Q) u_k(Q) ds(Q) =$$

$$- D_{k33}(p, Q) t_k(Q) ds(Q) \quad (p \in S^+; k, i = 1, 2) \tag{2}$$

$$\frac{E}{8(1-\nu^2)} =_{S^+} \frac{1}{r^3} \tilde{u}_3 d_1 d_2 - S_{k33}(p, Q) u_k(Q) ds(Q) =$$

$$- D_{k33}(p, Q) t_k(Q) ds(Q) \quad (p \in S^+) \tag{3}$$

$$c_{ki} u_i(p) + \int_{S^+} T_{ki}(p, Q) u_i(Q) ds(Q) + \int_{S^+} T_{ki}^+(p, Q) \tilde{u}_i(Q) ds(Q) =$$

$$\int_{S^+} (p, Q) t_i(Q) ds(Q) \quad (p \in S^+) \tag{4}$$

式中  $\int_{S^+}$  为有限部积分算子,  $c_{ki}$  为与边界点  $p$  有关的系数,  $S_{k33}$  和  $D_{k33}$  为已知核函数. 这里需要指出, 方程 (2~3) 是一组超奇异积分方程组, 而方程 (4) 则是一组常规边界积分方程.

2 超奇异积分方程组的数值方法

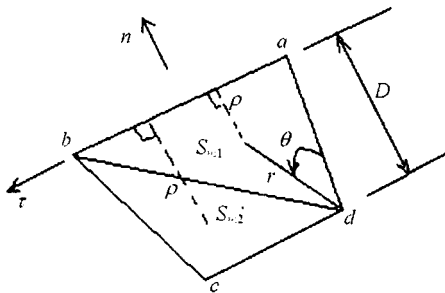


图 1 边界层单元

Fig. 1 Boundary layer element

式 (2) ~ (4) 是一组边界积分方程与超奇异积分方程耦联的积分方程组, 可使用有限部积分与边界元结合的方法数值求解这组方程. 首先将边界和裂纹面  $S^+$  分割成有限个单元. 裂纹面  $S^+$  上的单元分两类: 一类为紧靠裂纹前沿的一层单元, 称为边界层单元; 另一类为非边界层单元. 非边界层单元积分的数值计算可参考文献 [8]. 下面着重介绍  $S^+$  上边界层单元积分的处理方法. 这里须指出, 边界层单元可

分两类: 一类为两个节点为裂纹前沿点, 而另一个节点在  $S^+$  内的三角形单元, 记为  $S_{m1}$ ; 另一类为一个节点为裂纹前沿点, 而另两个节点在  $S^+$  内的三角形单元, 记为  $S_{m2}$ , 这里要求其内侧边与所对裂纹前沿平行, 如图 1 所示 ( $ab \parallel cd$ ). 根据文 [7], 平方根模型建立如下

$$\tilde{u}_i = \left[ \frac{1}{D} \right]^{\frac{1}{2}} [ \tilde{u}_i^{(d)} (1 - L_b) + \tilde{u}_i^{(c)} L_b ] \quad (S_{m1}) \tag{5}$$

$$\tilde{u}_i = \left[ \frac{1}{D} \right]^{\frac{1}{2}} [ \tilde{u}_i^{(c)} (1 - L_d) + \tilde{u}_i^{(d)} L_d ] \quad (S_{m2}) \tag{6}$$

式中  $L_b$  和  $L_d$  分别为单元  $S_{m1}$  和  $S_{m2}$  中与节点  $b$  和  $d$  对应的面积坐标,  $\tilde{u}_i^{(c)}$  和  $\tilde{u}_i^{(d)}$  分别为  $\tilde{u}_i$  在节点  $c$  和  $d$  处的节点值.

与以上建立的平方根模型有关的超奇异积分需专门处理, 这里以式 (2) 为例, 介绍其处理方法. 设参考点  $P$  与单元  $S_{m1}$  节点  $d$  重合, 则有关的超奇异积分为

$$J_{m1} = \int_{S_{m1}} \left(\frac{r}{D}\right)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} [(1-2\nu) d_{ab} + 3\nu r_{,a} r_{,b}] (1-L_b) d_1 d_2$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{R^3} [4S_b - 1 - 2(1+2S_b)\ln 2] [(1-2\nu) + 3R_{,R} R_{,J}] dS_b \quad (\nu = 1, 2) \quad (7)$$

$$J_{m2} = \int_{S_{m1}} \left(\frac{r}{D}\right)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} [(1-2\nu) + 3\nu r_{,r} r_{,J} L_b] d_1 d_2$$

$$= 4(\ln 2 - 1) \int_0^1 \frac{1}{R^3} [(1-2\nu) + 3R_{,R} R_{,J}] S_b dS_b \quad (\nu = 1, 2) \quad (8)$$

式中  $S_{m1}$  为单元  $S_{m1}$  的面积,  $R$  为连线  $dQ$  与  $ab$  的交点与  $d$  点之间的距离,  $S_b$  为  $ab$  边上对应于节点  $b$  的面积坐标. 若参考点  $P$  与单元  $S_{m2}$  的节点  $d$  或节点  $c$  重合, 则可使用类似上述方法处理. 在完成所有单元积分后, 可将积分方程组 (2) ~ (4) 化为一组线性代数方程, 求解这组代数方程, 即得边界  $S^+$  上位移和面力及裂纹面  $S^+$  上位移间断在各节点上的值, 由此便可得到边界  $S^+$  及裂纹面  $S^+$  上的所有未知函数及裂纹前沿附近的奇性应力场, 裂纹前沿应力强度因子由下式计算

$$\left. \begin{aligned} K_I(Q_0) &= \frac{E}{8(1-\nu^2)} \left[ \frac{2}{D} \int \tilde{u}_3^{(d)} (1-S_b) + \tilde{u}_3^{(c)} S_b \right] \\ K_{II}(Q_0) &= \frac{E}{8(1-\nu^2)} \left[ \frac{2}{D} \int \tilde{u}_n^{(d)} (1-S_b) + \tilde{u}_n^{(c)} S_b \right] \\ K_{III}(Q_0) &= \frac{E}{8(1+\nu)} \left[ \frac{2}{D} \int \tilde{u}^{(d)} (1-S_b) + \tilde{u}^{(c)} S_b \right] \end{aligned} \right\} \quad \text{用有9}$$

式中,  $\tilde{u}_n$ ,  $\tilde{u}$  分别为关于局部坐标系  $(x_3, n)$  的法向和切向位移间断.

### 3 算例与数值结果

为验证上述方法, 并说明其应用, 本文作了若干数值例子的计算.

#### 例 1 受拉伸载荷作用的含圆形裂纹圆柱体问题

设圆柱体中有一圆形裂纹, 裂纹位于圆柱的中心对称位置, 其半径为  $a$ , 圆柱的半径为  $R$ , 高为  $2h$ , 在圆柱的上下底面均作用均匀拉伸载荷. 裂纹前沿的应力强度因子列于附表, 表中

附表 圆柱体中圆形裂纹的应力强度因子  $K_I / K_I^0$  ( $h/R = 1, \nu = 1/3$ )

Table Stress intensity factor of cylinder with apenny-shape crack				
$a/R$	0.05	0.25	0.5	0.75
Yamamoto			1.114	1.402
Nishioka			1.111	1.410
Sohn				1.39
This paper	1.006	1.020	1.109	1.389

$K_I^0$  为无限体圆形裂纹前沿的应力强度因子<sup>[8]</sup>。由表可知, 本文结果与 Yamamoto 用轴对称有限元法<sup>[1]</sup>, Nishioka 用 Schwartz 有限元交替法<sup>[2]</sup>及 Sohn 用有限部积分-有限交替法<sup>[5]</sup>获得的结果接近。

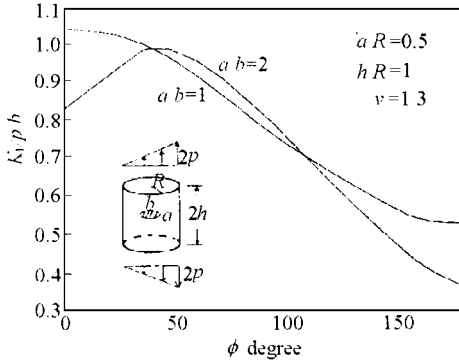


图 2 受拉伸与弯曲载荷作用的含椭圆裂纹圆柱裂纹前沿应力强度因子

Fig. 2 Stress intensity factor of cylinder with an elliptical crack subjected tension and bending loads

#### 4 结 论

本文使用超奇异积分方程与边界元法, 研究了三维有限体裂纹问题, 在裂纹前沿附近单元中, 采用与理论分析一致的平方根位移模型, 结果表明该方法计算量较小, 数值精度高稳定性好。作为一种通用性数值方法, 随着现代计算机技术的不断发展, 它对于解决工程中关心的一般三维裂纹问题具有实用意义。

#### 参 考 文 献

- 1 Yamamoto Y, Sumi Y. Stress intensity factors in a cracked axisymmetric body calculated by the finite element method. *J Soc Naval Architects of Japan*, 1973, 133: 179 ~ 187
- 2 Nishioka T, Atluri SN. Analytical solution for embedded elliptical cracks and finite element alternating method for elliptical surface-cracks, subjected to arbitrary loadings. *Engng Fracture Mech*, 1983, 17 (3): 247 ~ 268
- 3 Cruse TA. Boundary integral equation method for three-dimensional elastic fracture mechanics analysis. AFOSR-TR-75-083, 1975, AccessionNo. AD-A011660
- 4 Jia ZH, Shippy DJ, Rizzo FJ. Three-dimensional crack analysis using singular boundary elements. *Int J for Numer Methods in Engng*, 1989, 28: 2257 ~ 2273
- 5 Sohn GH, Hong CS. Application of singular integral equations to embedded planar crack problems in finite body. in *Boundary Element Vol. 2*, (Ed. Brebbia CA), Springer-Lerlog, 1985, 8-57-67
- 6 Ioakimidis NI. Application of finite-part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity. *Acta mechanica*, 1982, 45: 31 ~ 47
- 7 汤任基, 秦太验. 三维断裂力学的超奇异积分方程方法. *力学学报*, 1993, 25 (6): 665 ~ 675
- 8 Qin TY, Tang RJ. Finite-part integral and boundary element method to solve embedded planar crack problems. *Int J of Fracture*, 1993, 60: 373 ~ 381

**HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS AND  
BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR  
PLANAR CRACK PROBLEMS IN  
THREE-DIMENSIONAL FINITE BODIES**

Qin Taiyan

*(Dept. of Engineering Basic Sciences, China Agricultural University, Beijing 100083, China)*

Tang Renji

*(Dept. of Engineering Mechanics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)*

Chen Weijiang

*(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)*

**Abstract** Using the Somigliana representation and the concepts of finite-part integrals, a set of hypersingular integral equations of a planar crack in a three-dimensional finite body and subjected to arbitrary loads are derived, and a numerical method is proposed by combining the finite-part integral method with the boundary element method. According to the analytic theory of hypersingular integral equations, the square root models of displacement discontinuities in the elements near the crack front are applied, and thus the computing precision is raised. Finally, the stress intensity factors of several typical planar crack problems are calculated.

**Key words** planar crack problem in 3-D finite body, hypersingular integral equation, numerical method, stress intensity factor