

数值模拟二维高速碰撞问题的 拉格朗日任意三角形网格有限体积法*

李荫藩 梁珍璇

谈庆明

(中国科学院计算中心, 北京 100080)

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘 要 描述了一个数值模拟二维高速碰撞问题的拉格朗日任意三角形网格有限体积法, 方法考虑了材料的弹性和塑性性质。文中给出两个计算例题。

关键词 高速碰撞 拉格朗日方法 有限体积(方)法 三角形网格

中图分类号 O241

0 引言

高速碰撞(HVI)现象在许多工业问题中出现,如爆炸成型、爆炸焊接;HVI现象也出现在许多自然现象中如陨石撞击地球、木星彗星大碰撞等。因此,二十年来有关HVI问题的数值方法被许多作者研究,发表了不少编码或软件。

众所周知,在非定常计算流体动力学中有两种数学描述方法:拉格朗日的和欧拉的,相应地有两类数值方法:拉格朗日方法和欧拉方法。与欧拉方法相比,拉格朗日方法有一些优点:网格仅设置在材料上,故拉格朗日方法需要的计算机存储较少;若用同样数目的网格点,拉格朗日方法能够得到更高的分辨率;由于没有对流项,拉格朗日描述方法比欧拉方法要简单,因此要求较少的计算机CPU时间;拉格朗日方法还可以精确描写材料边界和交界面;此外,可以记录和表现物质性质的时间历史,这对于反映材料的本构特性来说是很重要的。但是拉格朗日方法有一个主要的缺点:对于具有大的材料畸变的问题,其计算网格也成为大畸变的。这导致时间步长缩小,解的精度降低甚至被迫中止计算。HVI问题一般都涉及很大畸变,因此若无特殊的辅助措施,用拉格朗日方法计算HVI问题是很困难的。但是上述的优点激励人们去寻求用它计算HVI问题的途径。

任意三角形网格易于表示复杂的几何区域、边界条件和材料变化。对于拉格朗日方法,三角形网格比四边形网格更适宜表示网格畸变,因为当三角形发生大畸变时,因某节点向其对边靠拢时所产生的抵抗力可由流体静压力与三角形体积成反比来表征,当体积趋于零时压力趋于无穷,适当控制时间步长,即可防止网格相交出现。正是基于这种思想,我们发展了一种拉格朗日任意三角形网格有限体积法^[1,8](即在适当“有限体积”上离散积分形式守恒律得到计算格式的一类方法),其算法类似于G.R.Johnson所发展的EPIC^[4]方法。但是在计算中,一些三角形格子仍可变成坏的形状,即具有很长的边及相应很短的高,结果导致降低计算精度,缩小时间步长及增加计算时间。这是三角形网格大畸变的典型现象。故对于任意三角形网格,若无特殊措施,用拉格朗日方法计算HVI问题仍然是很困难的。对于HIV问题必须考虑“靶板”和“抛射体”之间

1994年10月7日收到原稿。

*国家自然科学基金资助项目。

出现滑移, 为此要利用滑移界面技术, 在本文第 4 节将介绍如何用该技术处理大畸变问题。此外, 网格重分技术, 这种把畸变网格恢复成正常形状的技术是处理网格畸变的一种有效方法; 对于任意三角形网格, 因节点可任意排序, 故重分网格相对容易, 在文献[2]中描述了一种任意三角形网格重分技术。

1 基本方程

基本方程是质量、动量和能量守恒律以及状态方程和应力偏量方程。采用二维拉格朗日拉坐标系。径向和轴向坐标分别记以 r 和 z 。 r 方向和 z 方向的速度分量、密度、质量、比总能和压力分别记以 u 、 v 、 ρ 、 m 、 E_T 和 p 。积分形式的守恒律是:

$$\text{质量守恒} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho dV = 0 \quad (1)$$

$$\text{动量守恒} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho u_j dV = - \int_{S(t)} p n_j dS + \int_{S(t)} s_{ij} n_i dS \quad (j=1, 2) \quad (2)$$

$$\text{能量守恒} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho E_t dV = - \int_{S(t)} \rho u_i n_i dS + \int_{S(t)} s_{ij} u_j n_i dS \quad (3)$$

其中 $V(t)$ 为拉格朗日格子, $S(t)$ 为拉格朗日格子的表面, $n = (n_1, n_2)$ 为外法线, $u = (u_1, u_2) = (u, v)$ 为速度向量, s_{ij} 为应力偏量, $s_{11} = s_r, s_{22} = s_z, s_{33} = s_\theta, s_{12} = \tau_{rz}$ 。对于二维拉格朗日柱坐标微分型基本方程是

$$\text{连续方程} \quad \frac{1}{V} \dot{V} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} \quad (4)$$

$$\text{运动方程} \quad \frac{1}{V} \dot{u} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \sigma_r}{\partial r} - \frac{\sigma_\theta}{r} \quad (5)$$

$$\frac{1}{V} \dot{v} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rz}}{\partial r} \quad (6)$$

$$\text{能量方程} \quad \dot{\varepsilon} = -p \frac{1}{V_0} \dot{V} + \frac{V}{V_0} (s_z \dot{\varepsilon}_z + s_r \dot{\varepsilon}_r + s_\theta \dot{\varepsilon}_\theta + \tau_{rz} \dot{\varepsilon}_{rz}) \quad (7)$$

这里, 上标“ \cdot ”表示时间导数; $V = 1/\rho$ 是比容; V_0 是初始比容, ε 是单位初始体积的内能; $\dot{\varepsilon}_z$ 、 $\dot{\varepsilon}_r$ 、 $\dot{\varepsilon}_\theta$ 是正应变; $\dot{\varepsilon}_{rz}$ 是剪切应变。它们由如下几何关系来确定:

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{u}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_{rz} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

σ_z 、 σ_r 、 σ_θ 是正应力, τ_{rz} 是剪应力, 有如下关系式

$$\sigma_r = s_r - p - Q, \quad \sigma_z = s_z - p - Q, \quad \sigma_\theta = s_\theta - p - Q \quad (8)$$

这里 Q 是人工粘性项。假如应变是在弹性范围, 则弹性应力可由 Hooke 定律得到:

$$\dot{s}_r = 2G(\dot{\varepsilon}_r - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V}) - 2\tau_{rz} \omega_{rz} \quad (9)$$

$$\dot{s}_z = 2G(\dot{\varepsilon}_z - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V}) + 2\tau_{rz} \omega_{rz} \quad (10)$$

$$\dot{s}_\theta = 2G(\dot{\varepsilon}_\theta - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V}) \quad (11)$$

$$\dot{\tau}_{rz} = G\dot{\varepsilon}_{rz} + (\sigma_r - \sigma_z) \omega_{rz} \quad (12)$$

其中 $\omega_{rz} = \frac{1}{2} (\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z})$ 是局部自旋率, G 是弹性剪切模量。

屈服处理:

利用 Von - Misses 屈服条件, 定义等效应力为

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} (s_r^2 + s_z^2 + s_\theta^2) + 3\tau_{rz}^2} \quad (13)$$

材料的单向抗拉强度 \bar{s} 可能是应变、应变率、压力和温度的函数。如果 $\bar{\sigma} \leq \bar{s}$, 则应力是处于弹性状态, 则由 (9)~(12) 所得就是应力结果值。如果 $\bar{\sigma} > \bar{s}$, 则材料屈服, 于是由 (9)~(12) 所得应力乘以因子 $\bar{s}/\bar{\sigma}$ 才是结果值。

材料的破坏处理^[11]:

材料的等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}_p$ 被定义作

$$\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{9} [(\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_z)^2 + (\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\theta)^2 + (\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_\theta)^2]} + \frac{3}{2} \dot{\varepsilon}_{rz}^2 \quad (14)$$

材料的体积应变被定义作

$$\varepsilon_v = \frac{V}{V_0} - 1 \quad (15)$$

其中 V 和 V_0 分别表示当前和初始格子体积。假如一个格子的 $\bar{\varepsilon}_p$ 超过指定的等效塑性应变 ε_p 或它的 ε_v 超过指定的体积应变 $(\varepsilon_v)_p$, 则出现部分破坏, 于是令所有应力为零; 但正的静压力和人工粘性应力仍保留, 从而该格子像流体那样运动。假如 $\bar{\varepsilon}_p$ 超过指定的等效塑性应变 $\varepsilon_e (> \varepsilon_p)$, 则出现完全破坏, 于是令所有应力和压力为零。这种格子本质上从计算中消失, 只是质量被保留在节点上。一些达到完全破坏程度的畸变格子则从计算中被剔除了。

状态方程: 本文利用 Mie - Grüneisen 方程^[10]

$$p = p_v + \Gamma \varepsilon (1 + \mu) \quad (16)$$

其中, $p_v = [k_1 \mu + k_2 \mu^2 + k_3 \mu^3] (1 - \frac{\Gamma \mu}{2})$, $\mu = \frac{V_0}{V} - 1$, Γ 是 Grüneisen 常数, 而 k_1 、 k_2 和 k_3 是材料相关常数。

2 拉格朗日任意三角形网格有限体积法

对于拉格朗日坐标, 利用自动三角剖分技巧把材料区域剖分成三角形网格, 使得外边界(自由面)和材料边界在拉格朗日网格线上。速度被定义在网格节点上, 而密度、压力、应力和应变等则定义在格子中心, 设这些量在格子上是均匀的。为了捕捉激波之类的间断, 引入人工粘性项, 它仅当体积应变率为负时才被应用。我们取线性和二次粘性的组合形式

$$Q = \begin{cases} C_L \rho c_s h |\dot{\varepsilon}_v| + C_0^2 \rho h^2 (\dot{\varepsilon}_v)^2, & \dot{\varepsilon}_v < 0 \\ 0, & \dot{\varepsilon}_v \geq 0 \end{cases} \quad (17)$$

其中 c_s 是局部声速, h 是所考虑的三角形格子的最小高; C_L 和 C_0^2 是线性和二次粘性系数, 在计算中所用的典型值是 $C_L = 0.5$ 和 $C_0^2 = 4.0$ 。

动量方程的离散化:

对于每个节点, 例如图 1 中的节点 i , 把节点 i 周围的三角形格子的重心和过节点 i 的格子边的中点按逆时针方向连线得到有限控制体积 Ω_i , 其中 j_1, j_2, \dots, j_6 是过节点 i 的三角形格子的顶点, 点 ①, ②, \dots , ⑥ 是相应三角形格子的重心, 而点 ij_1, ij_2, \dots, ij_6 是相应边的中点。记节点 i 为 $Q_i = (r_i, z_i)$, 记节点 j_k 为 $Q_{jk} = (r_{jk}, z_{jk})$, 记中点 ij_k 为 $Q_{i,j_k} =$

$(r_i + r_{jk}, z_i + z_{jk})/2$, 记重心 ④ 为 $Q_{\odot} = (\bar{r}_k, \bar{z}_k) = (r_i + r_{jk} + r_{jk+1}, z_i + z_{jk} + z_{jk+1})/3, k = 1, \dots, N$; N 是围绕节点 i 的三角形格子的个数, 约定 $r_{jN+1} = r_{j1}, z_{jN+1} = z_{j1}$; $A_k, V_k, \rho_k, M_k (= \rho_k v_k), \sigma_{rk}, \sigma_{zk}, \tau_{rz k}$ 分别是相应三角形的面积, 体积, 密度, 质量, 正应力和剪应力。在有限控制体积 Ω_i 上, 应用格林公式并近似积分动量方程 (2), 于是得到半离散格式

$$\frac{1}{3} \sum_{k=1}^N M_k \frac{\partial}{\partial t} u_i = -\pi \sum_{k=1}^N \{ \bar{r}_k [(z_{jk} - z_{jk+1})\sigma_{rk} + (r_{jk+1} - r_{jk})\tau_{rz k}] - \frac{2}{3} A_k \sigma_{\theta k} \} \quad (18)$$

$$\frac{1}{3} \sum_{k=1}^N M_k \frac{\partial}{\partial t} v_i = -\pi \sum_{k=1}^N \bar{r}_k [(r_{jk+1} - r_{jk})\sigma_{rk} + (z_{jk} - z_{jk+1})\tau_{rz k}] \quad (19)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial t} u_i$ 和 $\frac{\partial}{\partial t} v_i$ 是在控制体积 Ω_i 内的材料的平均加速度分量。用时间向前差分近似上两式中的 $\frac{\partial}{\partial t} v_i$ 和 $\frac{\partial}{\partial t} u_i$, 便得到动量方程的离散化格式。

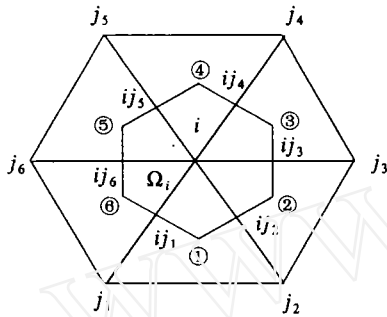


图 1 动量方程控制体积 Ω_i

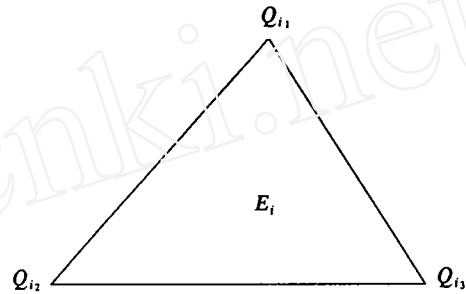


图 2 取格子本身作为其余方程的有限控制体积

其余方程的离散化:

取三角形格子本身作为有限(控制)体积, 应用格林公式并近似积分相应方程就可得到相应离散格式。例如, 对于三角形格子 E_i , 我们有

$$\dot{\varepsilon}_{r_i} = \frac{1}{2A_i} [(z_i - z_j)u_i + (z_j - z_i)u_i + (z_i - z_k)u_i] \quad (20)$$

按上述方法得到的格式类似于 G.R.Johnson 的著名的 EPIC 有限元方法^[4,8]。陈宇对流体力学方程的有限元法和有限体积法离散化格式进行了比较, 证明在一阶格式时两者是一致的^[7]。

离散化格式公式汇集:

设已知“ n ”时间层各节点位置 (r_i^n, z_i^n) , 三角形格式 E_i 的三顶点按逆时针方向依次是 (r_i^n, z_i^n) , (r_j^n, z_j^n) 和 (r_m^n, z_m^n) , 其面积是 A_i^n , 体积是 V_i^n , 质量是 m_i , 应力状态 $s_{r_i}^n, s_{z_i}^n, s_{\theta_i}^n, \tau_{rz_i}^n$, 体积应变 $\varepsilon_{v_i}^n$; 压力 p_i^n , 密度 ρ_i^n , 内能 e_i^n , 人工粘性 Q_i^n ; “ $n + \frac{1}{2}$ ”时间层的节点速度 $u_i^{n+1/2}, v_i^{n+1/2}$ 和时间步长 $\Delta t^{n+1/2}$ 。以下给出求“ $n+1$ ”层, “ $n+3/2$ ”层各有关量的离散化公式

$$\text{位置} \quad r_i^{n+1} = r_i^n + \Delta t^{n+1/2} u_i^{n+1/2} \quad (21)$$

$$z_i^{n+1} = z_i^n + \Delta t^{n+1/2} v_i^{n+1/2} \quad (22)$$

$$\text{面积} \quad A_i^{n+1} = -\{(r_j - r_i)(z_m - z_j) - (r_m - r_j)(z_j - z_i)\}^{n+1} \quad (23)$$

$$\text{体积} \quad V_i^{n+1} = 2\pi \bar{r}_i^{n+1} A_i^{n+1}, \quad \bar{r}_i^{n+1} = \frac{1}{3} (r_i + r_j + r_m)^{n+1} \quad (24)$$

$$\text{体积应变} \quad \varepsilon_{V_i}^{n+1} = \frac{V_i^{n+1}}{V_0} - 1 \quad (25)$$

$$\text{体积应变率} \quad \dot{\varepsilon}_{V_i}^{n+1/2} = \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{V_0 \Delta t^{n+1/2}} \quad (26)$$

$$\text{密度} \quad \rho_i^{n+1} = \frac{m_i}{V_i^{n+1}} \quad (27)$$

$$\text{应变率} \quad (\dot{\varepsilon}_r)_i^{n+1/2} = \frac{1}{2A_i^{n+1/2}} [(z_j - z_m)u_i + (z_m - z_i)u_j + (z_i - z_j)u_m]^{n+1/2} \quad (28)$$

$$(\dot{\varepsilon}_z)_i^{n+1/2} = \frac{1}{2A_i^{n+1/2}} [(r_m - r_j)v_i + (r_i - r_m)v_j + (r_j - r_i)v_m]^{n+1/2} \quad (29)$$

$$(\dot{\varepsilon}_\theta)_i^{n+1/2} = \left[\frac{\dot{V}}{V} - (\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_z) \right]_i^{n+1/2}, \quad \frac{\dot{V}}{V} \Big|_i^{n+1/2} = \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{V_i^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2}} \quad (30)$$

$$(\dot{\varepsilon}_{rz})_i^{n+1/2} = \frac{1}{2A_i^{n+1/2}} [(z_j - z_m)v_i + (z_m - z_i)v_j + (z_i - z_j)v_m - (r_m - r_j)u_i - (r_i - r_m)u_j - (r_j - r_i)u_m]^{n+1/2} \quad (31)$$

$$\text{局部自旋率} \quad (\omega_{rz})_i^{n+1/2} = \frac{1}{4A_i^{n+1/2}} [(z_j - z_m)v_i + (z_m - z_i)v_j + (z_i - z_j)v_m - (r_m - r_j)u_i - (r_i - r_m)u_j - (r_j - r_i)u_m]^{n+1/2} \quad (32)$$

以上各式中的“ $n+1/2$ ”还是指“ n ”时和“ $n+i$ ”时量的平均,如 $A_i^{n+1/2} = (A_i^n + A_i^{n+1})/2$ 。

$$\text{等效应变率} \quad \bar{\dot{\varepsilon}}_i^{n+1/2} = \sqrt{\frac{2}{9} [(\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_z)^2 + (\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\theta)^2 + (\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_\theta)^2 + \frac{3}{2} \dot{\varepsilon}_{rz}^2]} \Big|_i^{n+1/2} \quad (33)$$

$$\text{等效塑性应变} \quad \bar{\varepsilon}_{p_i}^{n+1} = \bar{\varepsilon}_{p_i}^n + \bar{\dot{\varepsilon}}_i^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \quad (34)$$

应力偏量(试验值)

$$(\bar{s}_r)_i^{n+1} = s_r^n + 2[G(\dot{\varepsilon}_r - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V})_i^{n+1/2} - \tau_{rz}^n \omega_{rz}^{n+1/2}] \Delta t^{n+1/2} \quad (35)$$

$$(\bar{s}_z)_i^{n+1} = s_z^n + 2[G(\dot{\varepsilon}_z - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V})_i^{n+1/2} + \tau_{rz}^n \omega_{rz}^{n+1/2}] \Delta t^{n+1/2} \quad (36)$$

$$(\bar{s}_\theta)_i^{n+1} = s_\theta^n + 2G(\dot{\varepsilon}_\theta - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V})_i^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \quad (37)$$

剪应力(试验值)

$$(\bar{\tau}_{rz})_i^{n+1} = \tau_{rz}^n + [G\dot{\varepsilon}_{rz}^{n+1/2} + (\sigma_r^n - \sigma_z^n)\omega_{rz}^{n+1/2}] \Delta t^{n+1/2} \quad (38)$$

Von Misses 屈服条件

$$\text{等效应力} \quad \bar{\sigma}_i^{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} (s_r^2 + s_z^2 + s_\theta^2) + 3\tau_{rz}^2} \Big|_i^{n+1} \quad (39)$$

材料的单向抗拉强度 \bar{s}_i^n 就取为材料的屈服应力 s_{ep} , 即

$$\bar{s}_i^n = s_{ep} \quad (40)$$

$$(s_{ij})_i^{n+1} = \begin{cases} (\bar{s}_{ij})_i^{n+1}, & \text{若 } \bar{\sigma}_i^{n+1} \leq \bar{s}_i^n \text{ (弹性状态)} \\ (\bar{s}_{ij})_i^{n+1} \frac{\bar{s}_i^n}{\bar{\sigma}_i^{n+1}}, & \text{若 } \bar{\sigma}_i^{n+1} > \bar{s}_i^n \text{ (屈服)} \end{cases} \quad (41)$$

其中 $(s_{11})_i^{n+1} = (s_r)_i^{n+1}$, $(s_{22})_i^{n+1} = (s_z)_i^{n+1}$, $(s_{33})_i^{n+1} = (s_\theta)_i^{n+1}$, $(s_{12})_i^{n+1} = (\tau_{rz})_i^{n+1}$ 分别是应力偏量和剪应力的结果值, $(\bar{s}_{11})_i^{n+1} = (\bar{s}_r)_i^{n+1}$, $(\bar{s}_{22})_i^{n+1} = (\bar{s}_z)_i^{n+1}$, $(\bar{s}_{33})_i^{n+1} = (\bar{s}_\theta)_i^{n+1}$, $(\bar{s}_{12})_i^{n+1} = (\bar{\tau}_{rz})_i^{n+1}$ 。

人工粘性项

$$Q_i^{n+1/2} = \begin{cases} C_L \rho_i^{n+1/2} c_{s_i}^{n+1/2} h |\dot{\varepsilon}_{V_i}^{n+1/2}| + C_0^2 \rho_i^{n+1/2} h^2 (\dot{\varepsilon}_{V_i}^{n+1/2})^2, & \dot{\varepsilon}_{V_i}^{n+1/2} < 0 \\ 0, & \dot{\varepsilon}_{V_i}^{n+1/2} \geq 0 \end{cases} \quad (42)$$

内能和压力

$$\varepsilon_i^{n+1} = \frac{\varepsilon_i^n - \frac{1}{2} [(p+Q)_i^n + Q_i^{n+1/2} + p_{V_i}^{n+1}] \dot{\varepsilon}_{V_i}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} + \Delta E d}{1 + \frac{1}{2} \Gamma (1 + \mu)_i^{n+1} \dot{\varepsilon}_{V_i}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2}} \quad (43)$$

$$\Delta E d = (\bar{s}_{r_i}^{n+1/2} \dot{\varepsilon}_r^{n+1/2} + \bar{s}_{z_i}^{n+1/2} \dot{\varepsilon}_z^{n+1/2} + \bar{s}_{\theta_i}^{n+1/2} \dot{\varepsilon}_{\theta}^{n+1/2} + \bar{\tau}_{rz_i}^{n+1/2} \dot{\varepsilon}_{rz}^{n+1/2}) \left(\frac{\bar{V}_i^{n+1/2}}{V_0} \right) \Delta t^{n+1/2} \quad (44)$$

$$p_i^{n+1} = p_{V_i}^{n+1} + \Gamma \varepsilon_i^{n+1} (1 + \mu)_i^{n+1} \quad (45)$$

$$p_{V_i}^{n+1} = (k_1 \mu + k_2 \mu^2 + k_3 \mu^3) \left(1 - \frac{\Gamma \mu}{2} \right)_i^{n+1} \quad (46)$$

$$\mu_i^{n+1} = \left(\frac{V_0}{V} \right)_i^{n+1} - 1 \quad (47)$$

法向应力

$$\sigma_{r_i}^{n+1} = s_{r_i}^{n+1} - p_i^{n+1} - Q_i^{n+1/2} \quad (48)$$

$$\sigma_{z_i}^{n+1} = s_{z_i}^{n+1} - p_i^{n+1} - Q_i^{n+1/2} \quad (49)$$

$$\sigma_{\theta_i}^{n+1} = s_{\theta_i}^{n+1} - p_i^{n+1} - Q_i^{n+1/2} \quad (50)$$

破坏准则: 如 $\bar{\varepsilon}_{p_i}^{n+1} > \varepsilon_p$ 或 $\varepsilon_{V_i}^{n+1} > \varepsilon_V$, 则所有应力分量量和剪应力都置零, 如 $p < 0$ 则 p 也置零。如 $\varepsilon_{p_i}^{n+1} < \varepsilon_e$, 则所有应力和压力都置零。

时间步长 Δt^{n+1}

$$\Delta t^{n+3/2} = c_i \min \left[\frac{h_{\min}}{\sqrt{c_0^2 \frac{Q}{\rho} + c_s^2}} \right]_i^{n+1} \quad (51)$$

其中 $c_i (< 1)$ 是保险系数, 如 $\Delta t^{n+3/2} > 1.1 \Delta t^{n+1/2}$ 则取 $\Delta t^{n+3/2} = 1.1 \Delta t^{n+1/2}$,

$$\Delta t^{n+1} = \frac{1}{2} (\Delta t_{n+3/2} + \Delta t_{n+1/2}) \quad (52)$$

速度计算

$$u_i^{n+3/2} = u_i^{n+1/2} - \Delta t^{n+1} \frac{\pi \sum_{k=1}^N \{ \bar{r}_k [(z_{jk} - z_{jk+1}) \sigma_{rk} + (r_{jk+1} - r_{jk}) \tau_{rz k}] - \frac{2}{3} A_k \sigma_{\theta k} \}^{n+1}}{\frac{1}{3} \sum_{k=1}^N M_k} \quad (53)$$

$$v_i^{n+3/2} = v_i^{n+1/2} - \Delta t^{n+1} \frac{\pi \sum_{k=1}^N \bar{r}_k [(r_{jk+1} - r_{jk}) \sigma_{zk} + (z_{jk} - z_{jk+1}) \tau_{rz k}]^{n+1}}{\frac{1}{3} \sum_{k=1}^N M_k} \quad (54)$$

其中 N 是过节点 i 的三角形格子的个数。

3 滑移面技术

对于 HVI 问题往往需考虑两个面间的滑移, 例如弹体和靶板, 我们按照文献[5]的精神发展了滑移面技术, 其要点如下:

(1) 由指定一主节点列来确定“主”滑移线。

(2) 由指定一从节点列来确定“从”滑移线, 从节点间间隔应和主节点列间间隔大致相同。

- (3) 对每个积分时间间隔, 以通常方式应用运动方程到“主”和“从”节点。
- (4) 检查以确定从节点和主滑移线间是否发生“相交”。
- (5) 如果发生了“相交”, 沿主滑移线法向把从节点移到主滑移线上。
- (6) 调整该“从”节点和它所“相交”的主滑移线上某线段两端点的法向速度。

例如, 在图 3 上节点 S 按运动方程从 A 运动到 B, 然后把它置于主滑移线上位置 C 处, 线 BC 是垂直于主滑移线的, 然后调整从节点 C 和主节点 i 和 j 上的法向速度。

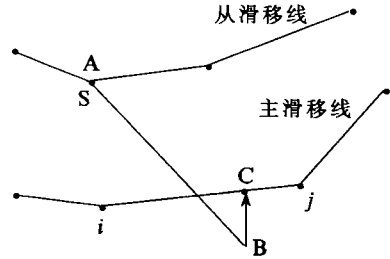


图 3 滑移面技术

为保证不发生“主”和“从”滑移线边材料间“相交”, 我们利用“两次扫描”方法, 即第二次扫描是“主”、“从”滑移线交换“角色”重新扫描一次。

如果一个三角形格子有(一、二或三)边位于滑移线上, 该格子材料又处于完全破坏状态, 即该格本质上从计算中“消失”了, 应该如何自动调整重新定义滑移线呢? 我们怎样能得到先滑的滑移线, 剔除掉过失的不先顺的部份呢? 我们参照文献[6], 发展了一种节省内存, 数据结构更合理的侵蚀界面技术处理这个困难问题, 其要点描述如下。

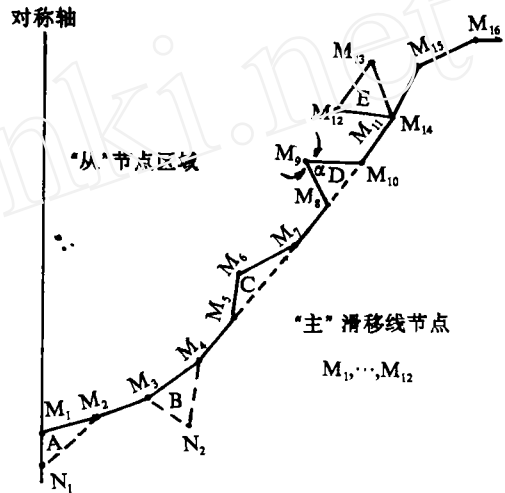


图 4 侵蚀界面技术示意图

侵蚀界面技术。图 4 是侵蚀界面技术示意图。节点列 ($M_1, M_2, \dots, M_{15}, M_{16}$) 连线构成主滑移线。当从主滑移线(面)的始节点 M_1 运动至终节点 M_{16} 时, 从节点总是在其左侧。格子 A, B 和 C 是完全破坏的, 即它们的等效塑性应变超过了指定的等效塑性应变 ϵ_e ;

三角形格子 D 有两边 M_8M_9 和 M_9M_{10} 在主滑移面(线)上, 其夹角 α 小于指定的角度; 三角形格子 E 有三边 $M_{11}M_{12}$, $M_{12}M_{13}$ 和 $M_{13}M_{14}$ 在主滑移线(面)上, 即 M_{11} 和 M_{14} 两节点重叠了; 格子 D 和 E 也作为完全破坏格来处理。结果主滑移线(面)重新定义作 ($N_1, M_2, M_3, N_2, M_4, M_5, M_7, M_8, M_{10}, M_{11}, M_{15}, M_{16}$) 诸节点的连线, 而节点 $M_1, M_6, M_9, M_{12}, M_{13}$ 和 M_{14} 被指定为新主滑移线的从节点。在计算中也采取两次扫描方法, 第一次扫描取滑移面技术中的一条滑移线(面)为这里的主滑移线(面), 第二次扫描取另一条滑移线(面)作为侵蚀界面技术中的主滑移线(面)。

4 数值算例

基于上述方法, 我们研制了一个计算机程序 TLEFPF, 这里给出弹丸撞击厚靶和薄靶两个数值算便说明方法是成功的。

例 1 是直径为 0.5cm 的铝球以速度 $v_p = 5\text{km/s}$ 垂直撞击 $8\text{cm} \times 4\text{cm}$ 的厚靶板。因 z 轴是对称轴, 计算取对称轴右半部份, 利用 961 个网格点和 1816 个三角形格子。屈服应力 $s_{ep} = 3.43 \times 10^8\text{Pa}$, 状态方程中的常数 $k_1 = 7.52 \times 10^{10}\text{Pa}$, $k_2 = 1.08 \times 10^{11}\text{Pa}$, k_3

$= 3.67 \times 10^{10} \text{Pa}$, $\Gamma = 2.13$; 初始密度 $\rho_0 = 2.74 \text{g/cm}^3$, 弹性剪切模量 $G = 2.36 \times 10^{10} \text{Pa}$, 破坏参数取 $\varepsilon_p = 0.7$, $\varepsilon_v = \infty$, $\varepsilon_e = 2.0$ 。我们以坑底速度 $\leq 50 \text{m/s}$ 作为开坑结束的标准, 结果坑深为 1.0cm , 坑径为 1.81cm , 与文献[9]的实验结果相近。图 5 给出它在碰撞后 $t = 6.8 \mu\text{s}$ 时的网格图。

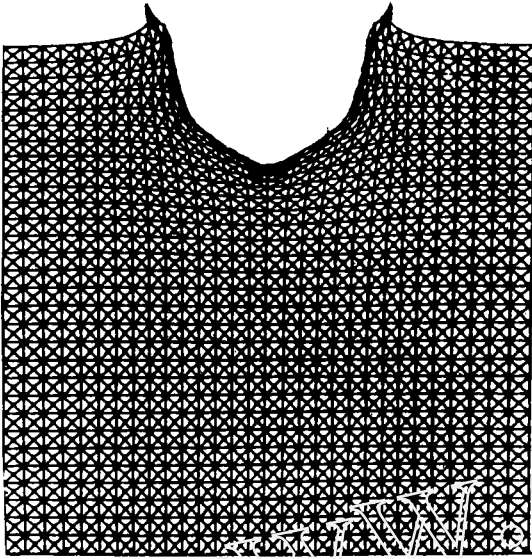


图 5 铅球撞靶后 $6.8 \mu\text{s}$ 时的网格图

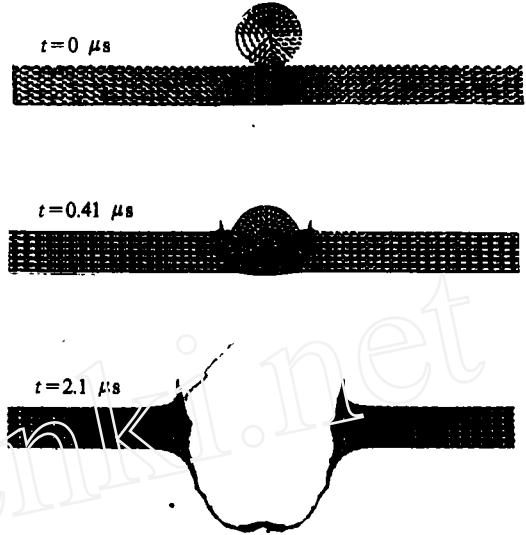


图 6 撞靶后不同时刻的网格图

例 2 是直径为 0.5cm 的铝球以速度 $v_p = 7 \text{km/s}$ 垂直撞击厚度为 0.3cm 的铝薄板。计算中用到的其它参数同上例。图 6 至图 7 给出它在碰撞后若干时刻的网格图, 孔径为 1.63cm , 与文献[12]很接近。图中, “•”是完全破坏格子的节点, 这些节点保持其质量, 以完全破坏前所具有速度运动。它可能具有所形成的碎片云的某些特性。碎片

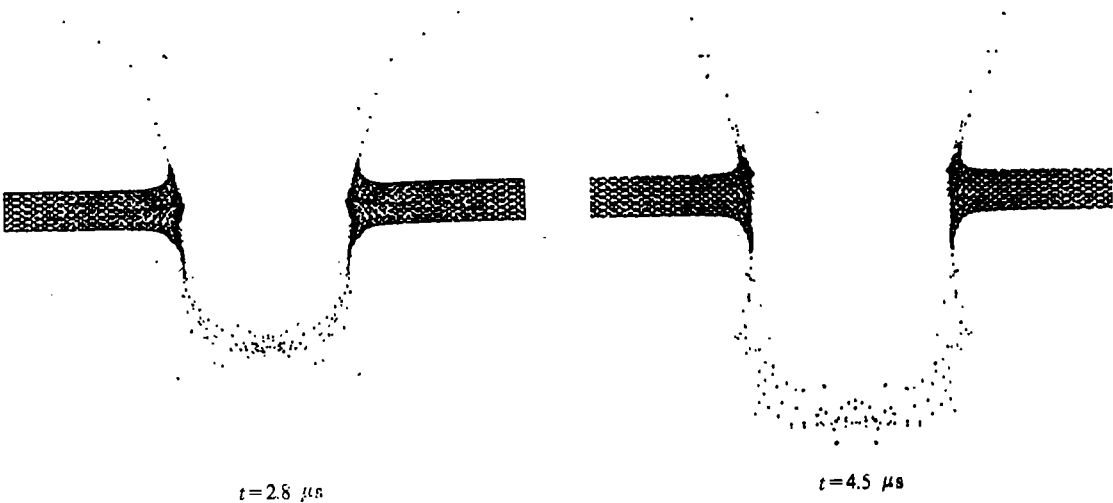


图 7 铝球以 $v_p = 7 \text{km/s}$ 撞靶后若干时刻的网格图

云头部的飞行速度是 4.1km/s, 与文献[12]的结果 3.5km/s 相差不很大。

5 结论

本文所描述的拉格朗日任意三角形网格有限体积有限能力对大畸变的 HVI 问题进行数值模拟。

参考文献

- 1 李荫藩等. 数值模拟弹塑性流动的拉格朗日任意三角形网格有限体积法及其在 HVI 问题中的应用, 中国科学院计算中心研究报告, 1991
- 2 吴坚等. 拉格朗日坐标下的任意三角形网格的重分技术, 中国科学院计算中心研究报告, 1992
- 3 梁珍璇等. 编码 TLEFPF 的介绍, 中国科学院计算中心研究报告, 1992
- 4 Johnson G R. *Journal of Applied Mechanics*, 1976, 43(3)
- 5 Johnson G R. *Journal of Applied Mechanics*, 1981, 48:30~34
- 6 Stecher P F and Johnson G R. Lagrangian Computations for projectile penetration into thick plates, in *Computers in Engineering 1984*, edited by Graver W A, ASME, 292~299
- 7 陈宇. 关于流体力学方程的有限元法和有限体积法离散化格式的比较, 流体力学数值方法讨论会(洛阳), 1985
- 8 李荫藩等. 关于 EPIC-2 程序的一个注记, 弹塑性流体力学与辐射流体力学数值计算讨论会(无锡), 1985
- 9 孙庚辰. 谈庆明等. 金属厚靶的超高速碰撞开坑实验, 第四届爆炸力学学术会议论文集, 合肥, 1990
- 10 Rice M H, McQueen R G and Walsh J M. *Solid State Phys*, 1958, 6:1~63
- 11 Charles E, Anderson Jr. *Int J Impact Engng*, 1987, 5:33~59
- 12 Zhang Deliang, Tan Qingming et al. *Acta Mechanica Sinica*, 1992, 8(4):374~382

A LAGRANGIAN ARBITRARY TRIANGULAR MESH FINITE VOLUME METHOD FOR NUMERICAL SIMULATING 2-DIMENSIONAL HIGH VELOCITY IMPACT PROBLEM

Li Yinfan and Liang Zhenxuan

Computing Center, Academia Sinica, Beijing 100080

Tan Qingming

Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080

ABSTRACT In this paper, a lagrangian arbitrary triangular mesh finite volume method for numerical simulating 2-dimensional high velocity impact problem is described. The elasticity and plasticity of material are considered. Some computational results of several impact examples are shown.

KEY WORDS high velocity impact, lagrangian method, finite volume method.