

# 陶瓷材料相变增韧尺寸效应的力学分析\*

张 沛

叶裕恭

(中南工学院建工系, 衡阳, 421001) (中国科学院力学研究所, 北京, 100080)

**摘 要** 利用计及相变剪切效应的陶瓷材料本构关系和裂尖场的双参数表达式, 对平面应变 I 型裂纹定常扩展过程进行渐近分析. 基于渐近场和能量积分, 得到韧性增值的估算公式, 并且根据数值结果和实验现象进一步讨论相变剪切塑性和应力非奇异项的影响.

**关键词** 相变增韧, 剪切效应, 尺寸效应, 双参数

## 1 引言

实验结果<sup>[1,2]</sup>已表明: 与其它材料一样, 相变陶瓷的断裂韧性也具有尺寸效应, 特别是高韧性陶瓷, 如 Mg-PSZ 和 TZP. Hom 等<sup>[3]</sup>的有限元结果也发现, 由于不同网格几何和加载方式, 他们的结果总是高于 Budiansky 等<sup>[4]</sup>. 虽然他们未给造成误差的原因, 但不难看出尺寸效应的作用. 对于幂硬化材料, Hancock 等<sup>[5]</sup>认为尺寸效应是由裂尖约束程度不同造成的. 本文沿用其思想对相变陶瓷材料进行一些探讨.

本文分析基于叶裕恭等<sup>[6]</sup>提出的计及相变剪切效应的本构关系, 通过对裂尖附近环形域进行渐近分析得到平面应变 I 型定常扩展裂纹的尖端场. 同时, 基于渐近场和能量积分<sup>[4]</sup>得到韧性增值估算公式. 文中讨论了相变剪切变形, 以及由试件几何、加载方式等因素决定的应力非奇异项对韧性增值的影响, 给出了实验值分散和理论值偏低的定性解释.

## 2 基本方程和解法

Chen 和 Reyes-Morel<sup>[7]</sup>的实验结果表明, 相变剪切变形与体膨胀具有相当的量级, 两者均不能忽略. 叶裕恭等<sup>[6]</sup>在此基础上提出了相变材料本构关系的唯象理论. 令满足 Drucker 公设的各向同性强化加载面函数  $f$ , 表示为

$$f = \sigma_m + \mu\sigma_e - \sigma_m^c - H \left( \int d\bar{\epsilon}^p \right) = 0 \quad (1)$$

式中,  $\sigma_m$ 、 $\sigma_e$  分别表示三轴应力和等效应力,  $\mu$  称为等效应力敏感因子,  $\sigma_m^c$  为材料常数,  $H$  是累积等效塑性应变的函数.

由正交法则和一致性条件可得到率形式本构方程<sup>[6]</sup>

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\dot{\sigma}_{ij} - 3\nu\dot{\sigma}_m\delta_{ij}] + \frac{\alpha}{H'} (Q_{kl}\dot{\sigma}_{kl})Q_{ij} \quad (2)$$

式中:  $H' = 3(\bar{B} + \mu\bar{G}) / \sqrt{2 + 9\mu^2}$ ,  $Q_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij} + \frac{3}{2}\mu \frac{S_{ij}}{\sigma_e}$ ,

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m\delta_{ij} \quad \text{和} \quad \alpha = \begin{cases} 0, & \text{相变卸载或完全相变} \\ 1, & \text{相变加载} \end{cases}$$

\* 国家自然科学基金资助项目.

1995-11-14 收到第 1 稿, 1996-06-14 收到修改稿.

$\dot{\varepsilon}_{ij}$ 、 $\dot{\sigma}_{ij}$ 、 $\dot{\sigma}_m$  分别表示应变率、应力率和三轴应力率,  $\nu$  和  $E$  分别为泊松比和弹性模量,  $\bar{B}$  和  $\bar{G}$  为相变后体模量和剪切模量.

当  $\mu=0$  时上式退化为 Budiansky 等<sup>[4]</sup>的本构方程. 实验结果表明<sup>[7]</sup>, 对于 Mg-PSZ 材料有  $\bar{B}>0$ ,  $\bar{G}>0$ , 因此  $H'>0$ , 则相变加载准则取决于  $Q_m \dot{\sigma}_m$  的符号. 相变开始和结束的条件为:

$$\begin{cases} \sigma_m + \mu\sigma_r = \sigma_m^*, & \text{相变开始} \\ \theta = \theta^T, & \text{相变结束} \end{cases} \quad (3)$$

式中  $\theta^T$  为常数,  $\theta = \varepsilon_{kk}$  表示相变塑性体膨胀.

小范围相变条件下, 以恒速  $V$  定常扩展的平面应变 I 型裂纹问题的提法和基本方程见文<sup>[8]</sup>. 为讨论不同约束下韧性增值的变化情况, 相变区外弹性场由 K-T 理论给出<sup>[5]</sup>, 即

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T_{ij} \quad (4)$$

式中  $K$  为外部场强度,  $T_{11}=T$ ,  $T_{33}=\nu T$ , 其余  $T_{ij}=0$ .

同时令尖端场的速率、应力渐近表达式为:

$$\begin{cases} V_i = k(V/E)y_i(\theta)(2\pi r)^s/s & (i=1,2) \\ \sigma_{ij} = ky_i(\theta)(2\pi r)^s + Q\delta_{ij} & (i=3,6) \end{cases} \quad (5)$$

式中  $k, s$  为待定常数,  $Q$  用来表征裂尖约束程度.

(5)式能较精确地描述裂尖场, 且非常适合于工程应用. 将该式代入基本方程后得到一组关于  $y_i$  且具有本征值  $s$  的六阶一次常微分方程组. 该方程组可由试射法与自动调整步长的四阶 Runge-Kutta 法求解, 每步计算初值由 Newton 线性搜索法给出, 最后求解出  $s$  和  $y_i$ .

### 3 韧性增值估算

与文<sup>[8]</sup>一样, 应力在弹-相变边界上应满足相变开始条件和连续条件. 由此可得到相变区的尺寸:

$$R = \frac{1}{c_1^2} \frac{K^2}{2\pi(\sigma_m^*)^2}, \quad H = R \sin\beta \quad (6)$$

式中  $R, H$  分别为相变区的水平和垂直尺寸,  $\beta$  为相变卸载开始的角度,  $c_1$  为常数,  $H$  与  $R$  的关系源于文<sup>[2]</sup>的结论: 裂尖前缘相变区呈圆弧状. 同时假定相变区的存在对弹性场影响很小. 文<sup>[3]</sup>和<sup>[8]</sup>的分析结果表明, 相变区塑性变形沿径向迅速减小, 因此该假设近似成立.

由渐近场决定的应力可得到  $Q$  与  $T$  的关系:

$$K = c_2 \sigma_m^* (2\pi R)^{-s}, \quad Q = \sigma_m^* - c_3 \sigma_m^* \quad (7)$$

式中,  $c_2, c_3$  为常数,  $\sigma_m^* = (1-c_1)\sigma_m - T$ .

通过运算, 由相变结束条件可给出完全相变区高度  $H_v$ :

$$\frac{H_v}{H} = \left( \frac{E\theta^T}{c_4 \sigma_m^*} \right)^{\frac{1}{s}} \sin\beta \quad (8)$$

式中  $c_4$  为常数.

利用能量积分得到韧性增值的估算公式<sup>[4]</sup>. 能量主要来源于裂尖前缘的塑性变形和尾区内残余应力二部分. 通过分析可知, 尾区内残余应力为

$$\sigma_{11} = \sigma_{33} = -\frac{E\theta}{3(1-\nu)} \left(1 + \frac{3}{2}\mu\right) \quad (9)$$

因此韧性增值为

$$AJ = 2c_5\sigma_m^* \Theta^T H + 2c_6 Q \Theta^T H + \frac{2}{9} \frac{c_7}{1-\nu} E (\Theta^T)^2 H \left( 1 + \frac{3}{2} \mu \right) \quad (10)$$

式中  $c_5, c_6, c_7$  均为  $H_v/H$  的函数.

为了便于讨论,引入裂尖应力强度因子  $K_{tip}$ ,则(10)式化为

$$K_{tip}/K = \sqrt{1 - c_8\omega - c_9\omega^2} \quad (11)$$

式中:  $\omega$  为相变强度,  $c_8 = (c_5 f_2 + c_6 f_3) \sin\beta / [\pi c_1^2 (1+\nu)^2]$ ,

$$c_9 = c_7 \left( 1 + \frac{3}{2} \mu \right)^2 \sin\beta / [9\pi c_1^2 (1+\nu)^3], f_1 = \frac{T}{\sigma_m^c}, f_2 = 1 - c_1 - f_1, f_3 = 1 - c_3 f_2.$$

#### 4 数值结果

本文取 35 mol% 的 Mg-PSZ 材料进行数值分析.  $E=208$  GPa,  $\nu=0.3$ ,  $\bar{B}/E=0.063$ ,  $\bar{G}/E=0.226$  以及  $\mu=0, 0.1, 0.2, 0.5, 0.6$ . 表 1 给出了渐近计算的结果.

表 1 各系数的计算结果

$\mu$	$s$	$\beta$	$1/c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$
0	-0.40835	64°	0.0978	2.860	14.31	0.04139
0.1	-0.38109	66°	0.2668	1.374	6.72	0.07367
0.2	-0.35505	67°	0.4178	1.163	5.36	0.13377
0.5	-0.30111	68°	0.3461	2.494	8.93	0.54056
0.6	-0.28761	70°	0.0901	11.364	34.07	0.64912

除  $Q, T$  值外,  $\sigma_m/\sigma_c$  也可以表征裂尖约束程度. 这个参数可追溯到 Rice 和 Tracey 对空洞生长的计算, 具有明确的物理含义. 图 1 给出了  $\sigma_m/\sigma_c$  沿角度变化的情况. 当  $\mu$  值较小时, 变化不大,  $Q$  值的影响会大; 当  $\mu$  值较大时, 随着  $\mu$  增加, 裂尖前缘  $\sigma_m/\sigma_c$  迅速增加, 因此约束程度加强,  $Q$  值影响下降.

从表 1 可看到,  $c_2$  恒大于零. 由参数  $k > 0$  可得到相变陶瓷材料发生相变的必要条件为  $f_2 > 0$ . 且易发现, 随着  $\mu$  增加,  $Q$  值减小.

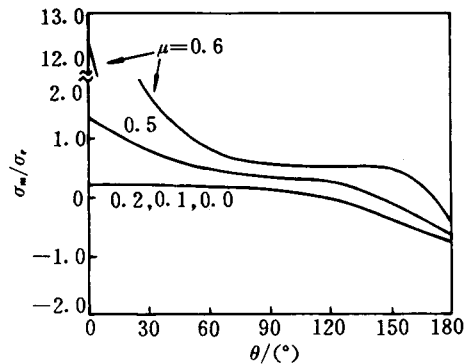


图 1 不同  $\mu$  值下  $\sigma_m/\sigma_c$  沿角度变化情况

表 2 韧性增值的计算结果

$\mu$	0	0.1	0.2	0.5	0.6
$H_v/H$	0.100	0.100	0.050	0.010	0.020
$f_1 = -0.5$	0.6003	0.2853	0.2863	0.5248	0.1687
$K_{tip}/K$	(0.8467)	(0.7436)	(0.7170)	(0.6703)	(—)
$f_2 = -1.0$	0.9072	0.6897	0.6181	0.8402	0.6759
	(0.8967)	(0.8154)	(0.7988)	(0.7563)	(—)

\* 括号里的值为不计  $Q$  项的韧性增值; (—) 表示该项无值.

表 2 给出了在取  $\omega=10$  时韧性增值随  $\mu$  和  $Q$  变化的情况. 可以看到, 计入应力非奇异性

后使  $K_{up}/K$  更接近实测值,其大小减少许多.同时也发现, $\mu$  值增加,使应力奇异性指数降低,也使  $K_{up}/K$  下降,但尺寸效应更明显.

本文通过渐近解和能量分析,对韧性增值进行定量估计,其结论与实验是一致的.因此对具有压力敏感性材料的断裂韧性估计需要考虑尺寸效应的影响.更广泛情况下的韧性增值和  $Q$  值须进行有限元计算,其结果另文给出.

### 参 考 文 献

- 1 Inghels E, Heuer A H. Fracture mechanics of high-toughness magnesia-partially stabilized zirconia. *J Am Ceram Soc*, 1990, 73:2023
- 2 Marshall D B et al. Crack-tip transformation zone in toughened zirconia. *J Am Ceram Soc*, 1990, 73:2659~2666
- 3 Hom C L, McMeeking R M. Numerical results for transformation toughening in ceramics. *Int J Solids Struct*, 1990, 26:1211~1223
- 4 Budiansky B et al. Continuum theory of dilatant transformation toughening in ceramics. *Int J Solids Struct*, 1983, 19:337~355
- 5 Hancock J W et al. Toughness and constraint parameterized by  $T$ . In: constraint effects in fracture (ed. Hackett E M et al) ASTM STP 1171, 121~140
- 6 Ye Y G et al. A computational modeling of transformation toughening in ceramics. *Proc Asian-Pacific Conf Fract Strength '93*, Tsuchiura, Ibaraki, Japan, 1993:671~676
- 7 Chen I W, Reyes-morel P E. Implication of transformation plasticity in zirconia-containing ceramics, I: shear and dilatation effects. *J Am Ceram Soc*, 1986, 69:181~189
- 8 张希,叶裕恭.相变增韧陶瓷平面应变 I 型定常扩展裂纹的渐近分析(I). *固体力学学报*, 1995, 16(4): 347~354

## ANALYSIS OF SIZE EFFECT ON TRANSFORMATION TOUGHENING IN CERAMICS

Zhang Xi

(Department of Civil Engineering, Zhongnan Institute of Technology, Hengyang, 421001)

Ye Yugong

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080)

**Abstract** Based on the constitutive law including the shear effect of transformation and two-term expansion of near-tip fields, the asymptotic analysis is carried out for plane-strain mode I steadily-growing crack problems in ceramics. The equation for evaluating toughness enhancement is obtained by means of asymptotic fields and the energy balance. Furthermore, the effects of shear deformation and non-singular stress on the toughening are discussed on the basis of numerical results and experimental observation.

**Key-words** transformation toughening, shear effect, size effect, two-parameter theory