

小振幅振动圆柱在偏心圆域中 诱导的二次定常旋涡流动*

浦群 王玮

中国科学院力学研究所, 北京 100080

摘要 研究在充满粘性不可压缩静止流体的偏心圆柱域中当内柱在垂直于柱轴的平面内作小振幅简谐振动时诱导的二次定常旋涡流动。当 $Rs = U_\infty^2 / \omega \nu$ 为有限量时, Stokes 层外的二次定常整流流动必须用 N-S 方程来描述。以内、外柱 Stokes 层外缘的切向速度为边界条件, 用有限差分法数值求解二维不可压缩 N-S 方程, 给出了不同柱径比 α 和偏心度 β 以及不同 Rs 下的二次定常旋涡流动, 并指出由于偏心带来的流动不对称将使内柱承受使之趋向于外柱中心的定常作用力。

关键词 定常整流流动; 偏心圆柱; 粘性旋涡流动; N-S 方程数值求解

中图分类号 V211.3

0 引 言

半径为 a 的圆柱在静止不可压缩粘性流体中沿与柱轴垂直方向作小振幅简谐振动 $U = U_\infty \cos \omega t$ 时, 由于粘性和惯性的非线性相互作用, 在流体中除了非定常周期运动外, 还将诱导出二阶量的定常流动, 称之为定常整流 (steady streaming) 流动。自 Rayleigh (1883) 最早研究整流现象以来的一百多年间, 对定常整流的研究从理论和实验上已取得了许多成果^[1~6]。研究表明, 对整流流动有几个重要的无量纲参数

$$\varepsilon = U_\infty / \omega a, M = a(\omega / \nu)^{1/2}, Re = U_\infty a / \nu = \varepsilon M^2, Rs = \varepsilon Re = \varepsilon^2 M^2 \quad (1)$$

这里 ε 为无量纲振幅, 有 $\varepsilon \ll 1$; ω 是振动角频率; ν 为流体的运动粘性系数; U_∞ 是振动速度的幅值; M 表示柱体特征尺度与粘性厚度之比; Re 是通常以 U_∞ 为特征速度的雷诺数; Rs 为定常整流雷诺数。当 $M \ll 1$ 时 (相当于低雷诺数情况), 非定常振荡流和定常整流流动波及全流域; 而当 $M \gg 1$ 时, 流体的非定常运动局限于柱体表面厚度为 $0(\sqrt{\nu / \omega})$ 的 Stokes 层内, 在 Stokes 层外缘只存在非零的定常切向速度, 由此驱动层外流体的定常整流流动。研究还表明, 定常整流雷诺数 Rs 对 Stokes 层外的定常整流流场起着决定作用。许多研究都是把外边界考虑为对振动柱而言是中心对称的, 非对称外边界对定常整流如何影响未见报导。我们以偏心圆环域作为典型的非对称外边界, 给出

* 国家自然科学基金资助项目。
本文于1996年5月6日收到, 7月1日收到修改稿。

了 $\epsilon \ll M^2 \ll 1^{[7]}$ 和 $\epsilon^2 \ll Rs \ll 1^{[8]}$ 情况下内柱作小振幅横向简谐振动诱导的定常整流流动。在本文中我们进一步考虑 $Rs=0(1)$ 的情况，即在 Stokes 层外的流动中对流与耗散作用相当，流动须由 N-S 方程描述的定常整流旋涡流动，探讨高雷诺数下非对称外边界对整流流场和柱体受力特性的影响。

1 基本方程和数值方法

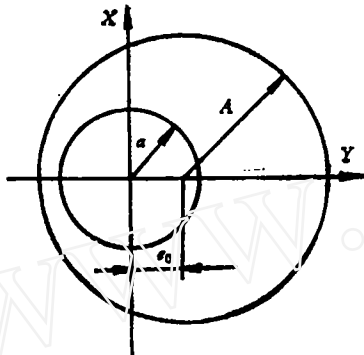


图 1 偏心圆域
Fig. 1 Eccentric circular cylinders

考虑如图 1 所示的两个偏心圆柱，其间充满粘性不可压缩静止流体，内柱在垂直于柱轴的平面内沿 X 轴以 $U_\infty \cos \omega t$ 的速度作小振幅简谐振动，外柱静止不动。定义柱径比 $\alpha = A/a > 1$ ，偏心度 $\beta = e_0/a$ ，有 $0 < \beta < \alpha - 1$ ，这里 A 为外柱半径， e_0 为偏心距。

实验结果表明^[9]，小振幅下振动圆柱的 Stokes 层外缘呈圆柱形，其中心与振动圆柱的平均中心重合，其半径亦不随时间变化。由于 $M \gg 1$ ，Stokes 剪切层很薄，在考虑层外的定常整流流动时，忽略 Stokes 层的厚度，即将 Stokes 层外缘的切向定常整流速度取在柱体表面上。研究还表明，当柱径比大于 7~8 时，外边界对 Stokes 层的影响可忽略不计，因此，对流域的最小尺度足够大的情况，可将无界域中振动圆柱 Stokes 层外缘的速度分布用作内柱 Stokes 层外缘的速度分布。

实验结果表明^[9]，小振幅下振动圆柱的 Stokes 层外缘呈圆柱形，其中心与振动圆柱的平均中心重合，其半径亦不随时间变化。由于 $M \gg 1$ ，Stokes 剪切层很薄，在

对 $Rs=0(1)$ 的情况，Stokes 层外的定常整流由 N-S 方程描述。以 a 为特征长度， ω^{-1} 为特征时间、 U_∞ 为特征速度无量纲化，在 (r, θ) 平面内涡量和流函数形式的 N-S 方程为

$$\begin{cases} \frac{1}{Rs} \Delta \xi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] \\ \Delta \psi = \xi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{cases} \quad (2)$$

采用分式变换 $W_1 = (Z - \delta_1) / (1 - Z\delta_1)$ 则 $Z = X + iY = re^{i\theta}$ 平面内的偏心圆环域变为 $W_1 = \rho e^{i\phi}$ 平面内的同心圆环域，并有

$$a_E = \frac{1 - a^2 - \beta^2 + \sqrt{(\beta^2 - a^2 - 1)^2 - 4a^2}}{2a}, \quad \delta_1 = \frac{a + \beta - a_E}{1 - a_E(a + \beta)} \quad (3)$$

这里 a_E 为 W_1 平面中的外圆半径。

无界域中振动圆柱 Stokes 层外缘的无量纲切向定常整流速度为

$$V_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{3}{2} \sin 2\theta \quad (4)$$

将它变换至 W_1 平面，并参照文献[5、6]计入有界域影响因子，得到 W_1 平面内切向

滑移速度边界条件。

所以，在 (ρ, φ) 平面内所论问题的基本方程是

$$\frac{1}{J_1} \frac{1}{Rs} \Delta \xi = \frac{1}{J_1} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \right], \Delta \psi = J_1 \xi$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, J_1 = \left| \frac{dZ}{dW_1} \right|^2 = \frac{(1 - \delta_1^2)^2}{(1 + \delta_1^2 \rho^2 + 2\rho\delta_1 \cos\varphi)^2} \quad (5)$$

取边界为零流线并考虑到流动对 X 轴对称，则边界条件为

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = -\frac{a_E^4}{(a_E^2 - 1)^2} \cdot Q, \left. \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right|_{\rho=1} = 0 \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right|_{\rho=a_E} = -\frac{a_E^4}{a_E(a_E^2 - 1)^2} \cdot Q, \left. \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right|_{\rho=a_E} = 0 \\ \psi|_{\rho=1} = \psi|_{\rho=a_E} = \psi|_{\varphi=0} = \psi|_{\varphi=\pi} = 0 \\ Q = \frac{(1 - \delta_1^2)^2 [2\delta_1 + (1 + \delta_1^2) \cos\varphi] \sin\varphi}{(1 + \delta_1^2 + 2\delta_1 \cos\varphi)^3} \end{cases} \quad (6)$$

考虑到内柱附近速度梯度较大，宜取较密的计算网格，引入变换 $\rho = e^{-\xi}$ ， $\varphi = \pi\eta$ 在矩形域 $0 \leq \xi \leq (1/\pi) \ln a_L$ ， $0 \leq \eta \leq 1$ 内采用时间相关法进行数值计算。

对涡量和流函数方程分别用 ADI 差分格式和 FACR 法进行数值求解。为了更好地满足固壁表面的流函数和切向速度边界条件，采用文献[10]的思想，在壁面附近提出流量的边界条件。

为保证计算的稳定性和收敛性，本文计算中取时间步长为 0.03~0.01。

2 算例和结果分析

在 $a=10$ 、 $\beta=2$ 以及 $a=12$ 、 $\beta=2$ 、 4 ，下对 $Rs=10$ 、 30 、 50 、 70 、 100 进行了计算。

典型的流谱结果及相应的速度矢量分布给出于图 2。由图可见，由于偏心，Stokes 层外的定常整流旋涡流动对 Y 轴明显不对称，偏心的一边涡流受到压缩，流函数的最大值相应也较小。与同心圆柱的情况一样，随着 Rs 增加，除主阶涡 A、B 外，在外柱表面中部附近形成两个高阶的反向分离涡流 C 和 D [见图 2 (a)]，但由于偏心，C 涡的尺度比 D 涡要小。计算表明，随着流场不对称的增加，即 $(\alpha + \beta)/(\alpha - \beta)$ 增加，C 涡缩小而 D 涡

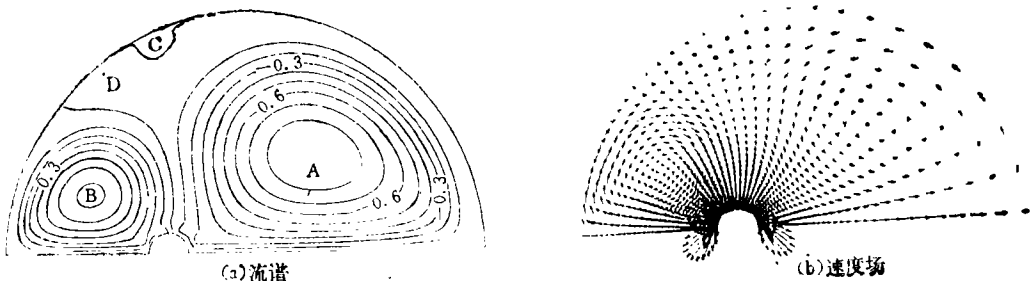


图 2 定常整流 ($\alpha=12, \beta=4, Rs=100$)
Fig. 2 Steady streaming flow ($\alpha=12, \beta=4, Rs=100$)

增大,且两分离点位置逆时针偏移。偏心的增加使更多的流量在流域大的一边,因而推迟了分离涡C出现,即要在更高的 Rs 下A涡的外柱附近流动才发生分离。

图3给出不同 α 和 β 下主阶涡流A和B的涡心位置随 Rs 的变化。由图可见,与同心柱相仿,随 Rs 增大,涡心的径向距离 r_0 很快增加,但增加到某一临界 Rs 值后,如图中参数此值约为 $Rs=30$,径向距离基本不变。同一 Rs 下,径向距离主要受流域尺度所控制。然而,涡心的周向角 θ_0 却更明显地受到偏心的影响。偏心大时,A涡趋于振动轴的幅度比B涡大得多。B涡在较低的 Rs 时,如图对 $(\alpha+\beta)/(\alpha-\beta)=2$, $Rs=70$ 时,涡心位置已基本不变,而在相应的 Rs 下,A涡仍在向离开振动轴方向发展。即流域的减小约束了涡心位置的变化。

对于无界域中或较大 α 的同心圆域中内柱振动诱导的Stokes层外的定常整流,当 Rs 较大时振动圆柱以动量流不变的Bickley射流形式向周围流体提供定常运动的能量,对一般同心柱情况,虽然由于外边界约束射流与Bickley射流不一样,但由于 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 方向流动对称,动量流对力的平衡没有贡献。对外边界约束不对称的偏心圆柱情况则不相同。为对振动柱两边射流的动量流进行比较,定义单位长度平均动量流 $N_L =$

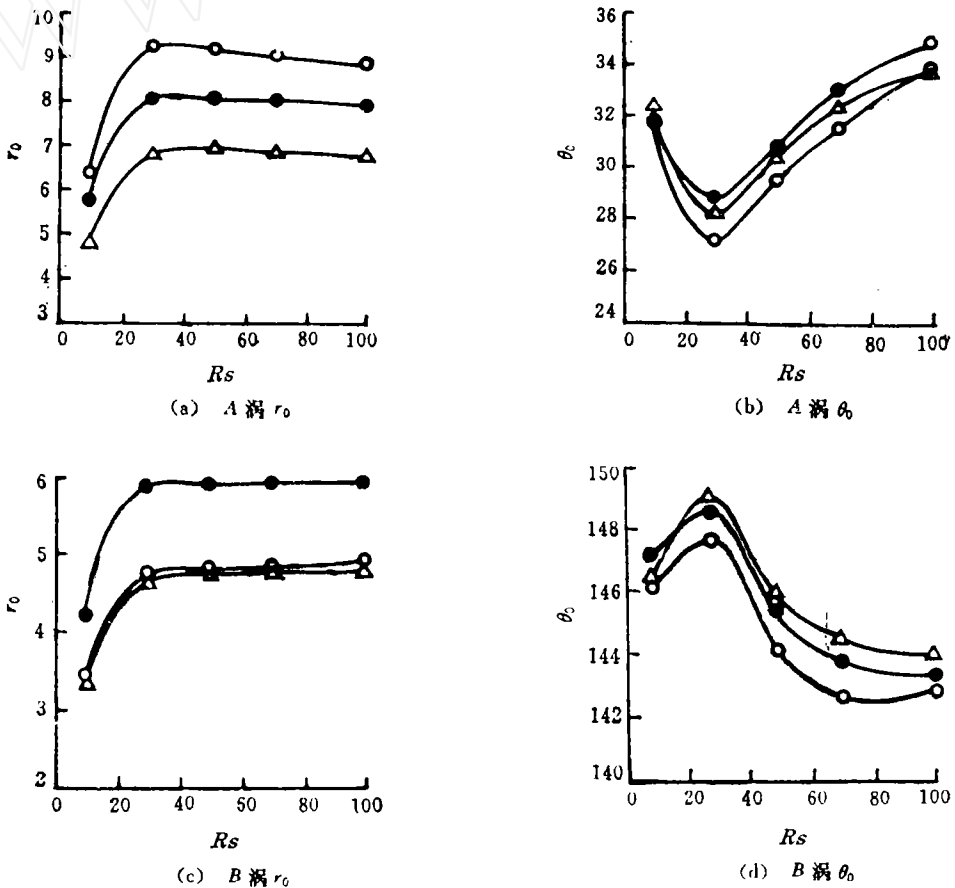


图3 A、B涡涡心位置

Fig. 3 Vortex center for vortex A and B

—○— $\alpha = 12, \beta = 4$ —●— $\alpha = 12, \beta = 2$ —△— $\alpha = 10, \beta = 2$

$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \int_{-Y_{\infty}}^{Y_{\infty}} V_x^2(r_i, \theta) dY$ ，取相同的积分限及径向区间进行计算。对不同 α, β 和 Rs 的计

算结果列于表 1。其中 $2.0 \leq r_i \leq 3.5$ ， $Y_{\infty} = 0.921$ 。

由表 1 可见，无论 α, β 或 Rs 如何变化，都有 $N_L|_{\theta=\pi} / N_L|_{\theta=0} > 1$ ，因此推断，内柱将承受一个使之趋于回复到外柱中心的定常作用力。算例表明，该力将随 Rs 的增加而增大，并随流场不对称的增加，即随 $(\alpha + \beta) / (\alpha - \beta)$ 的增加而增大。

表 1 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 方向平均动量流

Table 1 Average momentum flux along $\theta = 0$ and $\theta = \pi$

α, β	Rs	$N_L _{\theta=0}$	$N_L _{\theta=\pi}$	$N_L _{\theta=\pi} / N_L _{\theta=0}$
$\alpha = 10, \beta = 2$	50	0.357	0.485	1.359
	70	0.327	0.466	1.425
	100	0.303	0.499	1.456
$\alpha = 12, \beta = 2$	50	0.324	0.423	1.305
	70	0.284	0.400	1.385
	100	0.269	0.479	1.410
$\alpha = 12, \beta = 4$	50	0.305	0.493	1.618
	70	0.266	0.476	1.791
	100	0.252	0.454	1.800

3 结 论

(1) 以内、外柱 Stokes 层外缘切向速度为边界条件数值求解二维不可压缩 N-S 方程，给出了高雷诺数下偏心圆柱间内柱作小振幅振动诱导的柱间 Stokes 层外的定常整流旋涡流场。

(2) 与同心圆柱相仿，小振幅振动圆柱诱导生成四个主阶涡流，大 Rs 下流动呈现边界层流动特性，并在较大 Rs 时，外柱附近边界层流动分离，形成高阶分离涡流。由于边界不对称，定常整流旋涡分布亦不对称。随着流动偏心的增加，分离点位置向偏心一边偏转，同时，偏心的增加将使流域大的一边发生分离的临界 Rs 值增大。

(3) 偏心使振动柱左右类射流流动的动量流不对称将使内柱承受使之趋于外柱中心的定常作用力，此力随流域不对称的增加和 Rs 的增加而增大。

参 考 文 献

- 1 Riley N. Oscillatory Viscous Flows. Review and Extension, *J. Inst. Maths. Appl.*, 1967, 3: 419~434
- 2 Bertelsen A F. An Experimental Investigation of High Reynolds Number Steady Streaming Generated by Oscillating Cylinders, *J. Fluid Mech.*, 1974, 64: 589~597
- 3 Kim S K, Troesch A W. Streaming Flows Generated by High-Frequency Small -amplitude Oscillations of Arbitrarily Shaped Cylinders, *Phys. Fluids A*, 1989, 1(6): 975~985
- 4 Pattani P G, Olson M D. Periodic Solutions of Rigid Body-Viscous Interaction, *Intern. J. for Numer. Meth. Fluids*, 1987, 7: 652~695
- 5 Duck P W, Smith F T. Steady Streaming Induced Between Oscillating Cylinders, *J. Fluid Mech.*, 1979, 91: 93~110
- 6 Haddon E W, Riley N. The Steady Streaming Induced Between Oscillating Circular Cylinders, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 1979, 32: 265~282
- 7 Wang Wei, Pu Qun, Lin T C. Steady Streaming Flow Induced Between Eccentric Oscillating Cylinders, Proc. of ICFM- II, Beijing, 1993, 737~742
- 8 王伟, 浦群, 林同骥. 低 Re 数偏心圆柱间定常整流流动, 水动力学研究与进展, 1993, 8(2): 172~175
- 9 Sorokodum E D. Flow Near a Vibrating Cylinder, *Fluid Dyn.*, 1982, 17(4): 654~656
- 10 沈孟育, 区国翰. 圆柱体不可压粘性流体非定常绕流的数值模拟, 中国科学, 1991, A(7): 767~775

The Steady Secondary Vortex Flow Induced by an Oscillating Circular Cylinder in an Eccentric Circular Container

Pu Qun Wang Wei

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing 100080)

Abstract An incompressible viscous fluid is contained in the annulus between eccentric circular cylinders. In this paper the steady secondary vortex flow behaviors are studied, which is induced by the inner cylinder with small amplitude harmonic oscillation while the outer cylinder is fixed. The streaming flow outside of unsteady Stokes layer is governed by full N-S equation at $Rs = U_0^2 / \omega \nu \geq 0(1)$. By using a finite-difference method, the N-S equations with tangential streaming velocity at the edge of the Stokes layer on the inner and outer cylinders are solved numerically. The steady secondary vortex flows are obtained for different radius ratios a , eccentricities β and Rs . From the asymmetric nature of the steady jet-like flows at $\theta = 0$ and $\theta = \pi$, it was found that there is a force on the inner cylinder and its direction is towards the center of the outer cylinder at large Rs .

Key words steady streaming flow; eccentric cylinders; viscous vortex flow; numerical solution of N-S equation