

油藏渗流与应力耦合分析中的有限元等效结点力的计算方法

冉启全

(中国科学院力学研究所)

李士伦

(西南石油学院)

摘要 在岩土力学与渗流力学相结合的基础上,建立了油藏渗流与应力耦合作用的数学模型,给出了耦合分析的数值模型和数值求解的思路和步骤。要实现这一耦合分析过程,建立了单元平衡方程,给出了单元等效结点力的计算表达式,对表达式中的自重载荷、孔隙压力载荷、表面力载荷分别进行了分析,并对初应力载荷进行了计算。根据这些计算方法,在建立了单元刚度矩阵、计算了单元等效结点力、形成单元平衡方程之后,将这些方程集合起来,形成总体平衡方程。通过对总体平衡方程求解,即得各结点的位移值及应变、应力场分布。根据有限元的基本理论,建立了油藏渗流与应力耦合分析中的有限元等效结点力的计算方法,为实现油藏渗流与应力耦合分析提供了有效的途径。

关键词 岩土力学 渗流力学 油藏 渗流 应力分析 油藏数值模拟 有限元法

前 言

为了解决石油工程中的复杂问题,石油岩土力学中的油藏渗流与应力耦合研究显得越来越重要,并已受到人们的高度重视。在油藏开采过程中,油藏渗流与应力间存在很强的动态耦合效应,因此,在油藏开采过程中,油藏渗流与应力变化是相互影响、相互制约的,这种相互作用的机理及其数值分析称之为耦合分析。油藏渗流与应力耦合分析是石油岩土力学中必须研究的重大课题。可为油气井定向钻井及井壁的稳定分析、油气井水力压裂及岩石断裂机制研究、合理布置油气井网、预测油气开采动态和计算开采指标等提供理论基础和科学依据。

本文将岩土力学与渗流力学相结合,建立了油藏渗流与应力耦合作用的数学模型,给出了耦合分析的数值模型和数值求解的思路和步骤,计算了耦合数值分析中的有限元等效结点力。并根据有限元基本理论,建立了油藏渗流与应力耦合分析中的有限元等效结点力计算模型,为实现油藏渗流与应力耦合分析提供了有效的途径。

油藏渗流与应力耦合分析的基本原理

在油藏开采过程中,油藏渗流与应力变化是相互制约、相互影响的,要实现渗流与应力的耦合分析就必须同时对油藏渗流与应力变化的动态过程进行仿真模拟。

根据文献[1][2][3],对油藏渗流与应力变化进行耦合分析的基本原理如下:

进行耦合分析的模拟器由渗流模拟器和应力变化模拟器组成。渗流模拟器是一个有限差分模型,用于模拟计算每个时步的孔隙流体压力、饱和度分布以及各开采动态指标。而应力变

化模拟器是一个有限元模型,用于每个时步的位移、应变和有效应力分析。因此,在耦合数值分析中,需要两套网格系统,一套用于渗流模拟的有限差分网格系统,另一套用于应力分析的有限元网格系统。在这两套网格系统中,有限差分网格系统采用块中心网格,而有限元网格系统采用八结点等参单元,这样有限差分网格系统的块中心与有限元网格系统的单元结点一一对应,就能保证两模拟器间信息的正常传递和交流,即渗流模拟器块中心的值就代表变形模拟器单元结点上的值;而变形模拟器单元结点上的值就代表渗流模拟器块中心的值,即代表整个网格块的值。

耦合数值分析的求解采用显示交替求解方式,即应力分析模型的求解滞后于渗流模型一个时步。渗流模型一个时步求解结束,将孔隙流体压力增量与饱和度增量传给应力模型,重新计算载荷分布;而应力模型一个时步求解结束,则将其结果传给渗流模型。

耦合分析过程如下:

- ①求油藏的初始应力场;
- ②运行渗流模拟器,模拟一个时步的渗流动态,获得渗流场(包括孔隙压力和饱和度分布及各开采动态指标);
- ③根据孔隙压力与饱和度的增量,重新计算载荷分布;
- ④运行应力模拟器,求载荷增量引起的应力增量,从而获得应力场;
- ⑤根据应力变化计算新的油藏物性参数,返回②,求解下一个时步的解,直到结束。

由上述耦合分析过程可见,油藏岩土受孔隙压力改变的影响,所受载荷在不同位置和不同时刻是动态变化的,因而如何计算油藏开采过程中不同地点和不同时间下的油藏岩土所受载荷的大小,是实现油藏渗流与应力耦合分析的一个关键问题。

单元平衡方程的建立

在油藏渗流与应力耦合分析中,用等参有限元法求解应力分布问题。它的核心问题之一就是建立平衡方程。首先利用有效应力原理,根据虚位移原理及虚功等效原则,来建立单元结点力和结点位移之间的关系式,即单元的平衡方程。

对于任意油藏岩土单元,它受到的外力有体积力和表面力。设岩土单元在外力作用下发生了虚位移,而岩土单元在内部应力作用下发生了虚应变。根据虚位移原理,即在外力作用下处于平衡状态的岩土单元,当发生所允许的任意小虚位移时,外力在虚位移上所作的功等于岩土单元内的应力在虚应变上所作的功。即

$$\iiint_V \{\epsilon^*\}^T \{\sigma\}^T dV = \iiint_V \{f^*\}^T \{p_v\} dV + \iint_A \{f^*\}^T \{p_s\} dA \quad (1)$$

式中 $\{p_v\}$ ——单位体积的体积力(此处仅指自重); $\{f^*\}$ ——单元内任意点的虚位移;
 $\{p_s\}$ ——单位面积的表面力; $\{\epsilon^*\}$ ——单元内任意点的虚应变;
 $\{\sigma\}^T$ ——总应力。

由于油藏岩土多孔介质中饱含流体,承受了孔隙流体压力,因此,根据有效应力原理

$$\{\sigma^{-T}\} = \{\sigma\} - P\{m\} \quad (2)$$

则有

$$\iiint_V \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV = \iiint_V \{f^*\}^T \{p_v\} dV + \iint_A \{f^*\}^T \{p_s\} dA + \iiint_V \{\varepsilon^*\}^T P \{m\} dV \quad (3)$$

式中 p ——孔隙流体压力； $\{\sigma\}$ ——有效应力。

由于油藏岩土体经过离散化之后，力是从单元的公共边界传递到另一个单元的。这种作用在单元边界面上的表面力以及作用在单元上的体积力等都需要等效移置到结点上，也就是用等效的结点力来替代所有作用在单元上的力。这样，油藏岩土单元是在等效结点力的作用下处于平衡状态。

根据虚功等效原则，即等效结点力在结点虚位移上所作的功与外力在相应的虚位移上所作的功相等，则有

$$(\{\delta^*\})^T \{F\}^e = \iiint_V \{f^*\}^T \{p_v\} dV + \iint_A \{f^*\}^T \{p_s\} dA + \iiint_V \{\varepsilon^*\}^T P \{m\} dV \quad (4)$$

式中 $\{\delta^*\}^e$ ——结点虚位移； $\{F\}^e$ ——单元等效结点力。

由(3)式和(4)式可得单元平衡方程为

$$[K]^e \{\delta\}^e = \{F\}^e \quad (5)$$

式中 $\{\delta^*\}^e$ ——单元结点位移； $[K]^e$ 是单元的刚度矩阵。

根据多重积分在两种坐标系间的变换公式，可将整体坐标系下的单元刚度矩阵变换为局部坐标系下的单元刚度矩阵，即

$$[K]^e = \iiint_V [B]^T [D] [B] dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (6)$$

而单元等效结点力

$$\{F\}^e = \iiint_V [N]^T \{p_v\} dV + \iint_T [N]^T \{p_s\} dA + \iiint_V [B]^T P \{m\} dV \quad (7)$$

单元等效结点力的计算

单元平衡方程的建立关键在于单元等效结点力的计算。单元的等效结点力是由作用在单元上的各种外力等效移置到结点上，再逐点加以合成而得到的。

油藏岩土所承受的载荷主要有自重、孔隙压力、表面力及初应力载荷等。(7)式可进一步表示为

$$\{F\}^e = \{F_{gravity}\}^e + \{F_{surface}\}^e + \{F_{pore}\}^e \quad (8)$$

式中 $\{F_{gravity}\}^e$ 是单元的自重等效移置到结点上的等效结点力； $\{F_{surface}\}^e$ 是单元的表面力等效移置到结点上的等效结点力； $\{F_{pore}\}^e$ 是单元的孔隙压力等效移置到结点上的等效结点力。

各自的计算方法如下：

1. 自重载荷

由于油藏岩土为饱含油、气、水多相流体的多孔介质，因而其密度为

$$\rho = (1 - \varphi)\rho_s + \varphi S_o \rho_o + \varphi S_w \rho_w + \varphi S_g \rho_g \quad (9)$$

因 $\{p_v\}$ 为单位体积的自重，故有

$$\{p_v\} = [0 \quad 0 \quad -\rho g]^T \quad (10)$$

则自重载荷的等效结点力为

$$\begin{Bmatrix} F_{zi}^e \\ F_{yi}^e \\ F_{xi}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\iiint_V N_i \rho g dx dy dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i \rho g |J| d\xi d\eta d\zeta \end{Bmatrix} \quad (11)$$

如果考虑密度的空间变化,则可以利用形函数由单元各结点处的密度直接插值求得单元内任意点的密度,即

$$\rho = \sum_{j=1}^8 N_j \rho_j \quad (12)$$

若考虑密度的空间变化时,自重载荷的等效结点力为

$$\begin{Bmatrix} F_{zi}^e \\ F_{yi}^e \\ F_{xi}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\iiint_V N_i (\sum_{j=1}^8 N_j \rho_j) g dx dy dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i (\sum_{j=1}^8 N_j \rho_j) g |J| d\xi d\eta d\zeta \end{Bmatrix} \quad (13)$$

2. 孔隙压力载荷

孔隙压力载荷是由于孔隙流体压力的改变所引起的,这种外力载荷被视为分布体积力载荷,由虚功等效原则导出的孔隙压力载荷的等效结点力表达式推导如下

因为 $\{m\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ $[B_i] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,x} & N_{i,y} \\ N_{i,x} & 0 & N_{i,x} \end{bmatrix}$ (14)

则有 $[B_i]^T = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & N_{i,z} \\ 0 & N_{i,y} & 0 & N_{i,x} & N_{i,z} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}$ (15)

所以 $\begin{Bmatrix} F_{zi}^e \\ F_{yi}^e \\ F_{xi}^e \end{Bmatrix} = \iiint_V [B_i]^T p \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dx dy dz$ (16)

即 $\begin{Bmatrix} F_{zi}^e \\ F_{yi}^e \\ F_{xi}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \iiint_V \frac{\partial N_i}{\partial x} p dx dy dz \\ \iiint_V \frac{\partial N_i}{\partial y} p dx dy dz \\ \iiint_V \frac{\partial N_i}{\partial z} p dx dy dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial x} p |J| d\xi d\eta d\zeta \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial y} p |J| d\xi d\eta d\zeta \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial z} p |J| d\xi d\eta d\zeta \end{Bmatrix}$ (17)

如果考虑压力的空间变化,则可以利用形函数由单元各结点处的压力直接插值求得单元

内任意点的压力,即

$$p = \sum_{j=1}^8 N_j p_j \quad (18)$$

因此考虑压力的空间变化时,孔隙流体压力载荷的等效结点力为

$$\begin{Bmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \\ F_{zi}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \iiint_V \frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^8 N_j p_j \right) dx dy dz \\ \iiint_V \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\sum_{j=1}^8 N_j p_j \right) dx dy dz \\ \iiint_V \frac{\partial N_i}{\partial z} \left(\sum_{j=1}^8 N_j p_j \right) dx dy dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^8 N_j p_j \right) |J| d\xi d\eta d\zeta \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\sum_{j=1}^8 N_j p_j \right) |J| d\xi d\eta d\zeta \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial z} \left(\sum_{j=1}^8 N_j p_j \right) |J| d\xi d\eta d\zeta \end{Bmatrix} \quad (19)$$

3. 表面力载荷

设单元的某边界面上作用的面力为 $\{p_s\} = [p_{sx} \quad p_{sy} \quad p_{sz}]^T$, 则可得此面上各结点的等效结点力为

$$\begin{Bmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \\ F_{zi}^e \end{Bmatrix} = \iint_A N_i \begin{Bmatrix} p_{sx} \\ p_{sy} \\ p_{sz} \end{Bmatrix} dA \quad (20)$$

式中曲面积分是在单元上作用分布力 $\{p_s\}$ 的某个边界上进行的。例如,在对应于 $\zeta=1$ 的面上进行积分,按照数学分析的公式

$$dA = |\vec{S} \times \vec{T}|_{\zeta=1} d\xi d\eta \quad (21)$$

可得

$$\begin{Bmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \\ F_{zi}^e \end{Bmatrix} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N_i \begin{Bmatrix} p_{sx} \\ p_{sy} \\ p_{sz} \end{Bmatrix}) |\vec{S} \times \vec{T}|_{\zeta=1} d\xi d\eta \quad (22)$$

若单元的某个面上只作用着外法线方向载荷 $\{p_s\}$, 设 n 表示该曲面的外法线方向, 则有

$$p_{sx} dA = p_s \cos(n, x) dA = p_s dy dz \quad (23)$$

于是(20)可以写为

$$F_{xi}^e = \iint_A N_i p_s dy dz \quad (24)$$

这样将原来的第一类曲面积分化为第二类曲面积分。例如,对于 $\zeta=\pm 1$ 的面上,由坐标变换式可给出 y, z 和 ζ, η 之间的关系,因此 $dy dz$ 可用 $d\zeta d\eta$ 来表示。通过计算和归纳,可将(24)式写成如下形式

$$\begin{Bmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \\ F_{zi}^e \end{Bmatrix} = \pm \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (p_s N_i \vec{S} \times \vec{T})_{\zeta=\pm 1} d\xi d\eta \quad (25)$$

对于 $\zeta=\pm 1$ 及 $\eta=\pm 1$ 的面上,相应的计算公式只须在上式右端对 ξ, η, ζ 和 $\vec{S}, \vec{T}, \vec{V}$ 同时进行轮换即可。

4. 初应力载荷

在初应力已知的情况下受载,如何将初应力施加在系统上进行求解,即将初应力转换为等

效结点力是非常重要的。

设初应力为 $\{\sigma^0\}$,根据虚位移原理及虚功等效原则有

$$(\{\delta^*\})^T \{F_{\sigma^0}\}^e = \iiint_V \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma^0\} dV = \iiint_V [B]^T (\{\delta^*\})^T \{\sigma^0\} dV \quad (26)$$

即初应力的等效结点力为

$$\{F_{\sigma^0}\}^e = \iiint_V [B]^T \{\sigma^0\} dV \quad (27)$$

由于

$$\{\sigma^0\} = [\sigma_x^0 \quad \sigma_y^0 \quad \sigma_z^0 \quad \tau_{yz}^0 \quad \tau_{zx}^0 \quad \tau_{xy}^0]^T \quad (28)$$

$$[B_i]^T = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & N_{i,z} \\ 0 & N_{i,y} & 0 & N_{i,x} & N_{i,z} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (29)$$

所以有

$$\begin{Bmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \\ F_{zi}^e \end{Bmatrix} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \sigma_x^0 + \frac{\partial N_i}{\partial z} \tau_{zx}^0 + \frac{\partial N_i}{\partial y} \tau_{xy}^0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \sigma_y^0 + \frac{\partial N_i}{\partial z} \tau_{yz}^0 + \frac{\partial N_i}{\partial x} \tau_{xy}^0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \sigma_z^0 + \frac{\partial N_i}{\partial y} \tau_{yz}^0 + \frac{\partial N_i}{\partial x} \tau_{zx}^0 \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (30)$$

根据以上计算方法,在建立了单元刚度矩阵,计算了单元等效结点力,形成单元平衡方程之后,将这些方程集合起来,就可形成总体平衡方程,通过对总体平衡方程求解,即得各结点的位移值及应变、应力场分布。

参 考 文 献

- 冉启全. 流固耦合多相多组分渗流数学模型的建立. 油气井测试,1996,5(3)
- 冉启全. 流固耦合油藏数值模拟理论与方法研究. 渗流力学进展. 北京:石油工业出版社,1996
- 冉启全. 用综合数值模拟方法预测油藏开采过程中的应力分布. 钻采工艺,1995,18(4)
- 郑宏. 关于岩土工程有限元分析中的若干问题. 岩土力学,1995,(3)

本文收稿日期:1996-12-09

WELL TESTING (YOUQIJING CESHI)

Vol. 6 No 3 (Serial No. 49) 1997

ABSTRACTS

• THEORETICAL RESEARCH •

A New Method of Type Curve Matching-The Method of Using the Ratio Between Dimensionless Pressure and Time. 1997, 6(3):1~6

Ma Qiang (Downhole Operating Company of Huabei Petroleum Geological Bureau)

A new transient pressure analysis method of the well with wellbore storage and skin effect in infinite reservoir is presented in this paper, that is the matching method using the ratio of dimensionless pressure and time. Using this method, the dimensionless pressure must be got, then using $p_{wD}/(t_D/C_D)$ and $1-p_{wD}/(t_D/C_D)$ as longitudinal axis, t_D/C_D as horizontal axis, $C_D e^{2S}$ as Parameter, the semi-log and log-log type curve are got. This kind of type curve is called the PTR type curve. This kind of type curve had significant characters in early time and late time, so that it is easy to get good matching. when C_s is known, the matching is only need to move the type curve in horizontal direction, that decrease the multisolution. If C_s is unknown, C_s can be modified to get good matching. This method is suitable for pumping well.

Subject heading: homogeneous reservoir, wellbore storage, transient testing, typical curve fitting, analytical method

A Study of a New Pressure Characteristic Function in Well Testing. 1997, 6(3):7~11

Hu Ze, Zhao Birong (Xinan Petroleum University)

In order to enhance the mode character of the well test models, a new pressure characteristic function-wavelet transformation of pressure derivative is given. Pressure characteristic function curve with significant characters is one kind of curve with oscillation shape and its value between positive and negative. The results of study indicate that this kind of new pressure characteristic function curve is a good characteristic curve for well testing interpretation models, as an artificial intelligent method, the input mode characteristics of model diagnosis is easy for a computer to distinguish. With introduction of the new pressure characteristic function, the satisfied results of model diagnosis may be obtained.

Subject heading: well test interpretation, pressure, characteristic equation, wavelet processing, Fourier transform

Calculating Method for the Force at the Effect Node in Finite Element in the Couple Analysis of Porous Flow and Stress in Reservoir. 1997, 6(3):12~17

Ran Qiquan, Li Shilun (Institute of Mechanics of Academia Sinica, Xinan Petroleum University)

Based on the correlation of rock mechanics and porous flow mechanics, the mathematical model considering the porous flow and stress effect in the reservoir was build up. The numerical model and solving method and steps were also given. In order to execute couple analysis process, element equivalence equation and calculation formation for the force at every effect node in the element were made. The analysis of the effect factors in the formation such as sole weight load, pore pressure load, surface force load were analyzed. The initial stress load was also calculated. According to these methods, after making up the element stiffness matrix, calculating the force at the effect node of the element and making up the element equivalence equation, integrating all the equations, the total equivalence equation was build up. Then the value of movement, strain and distribution of the stress field were got. According to the basic thesis of the finite element, the calculation method for the force at the effect node in finite element in the couple analysis of porous flow and stress in reservoir was build up. That is an effect method to execute the couple analysis of porous flow and stress effect.

Subject heading: percolation mechanics, oil reservoir, percolation, stress analysis, oil reservoir numerical simulation, finite element method

Well Test Method for Vertically Fractured Wells in Multilayered Reservoir. 1997, 6(3):18~22

Liu Yuerou, Liu Ciqun (Institute of Porous Flow and Fluid Mechanics of CNPC and Academia Sinica)