

轴向应力波作用下完善弹性直杆的稳定性分析

汤立群 朱兆祥*

(华南理工大学交通学院 广州 510641)

摘要 应用离散系统的稳定性理论,在“冻结”系数的条件下研究了在轴向应力波作用下弹性直杆的稳定性特点,得出了特征矩阵的特征值随应力波传播的变化规律,这些变化规律表明在研究应力波引起的直杆屈曲问题中,采用冻结边界技术和在应力波阵面上假定横向位移及其一阶导数连续是合理的。研究还表明对于完善系统,单凭线性稳定性理论不足以预言应力波传播引起的动态后屈曲的发展方向。

关键词 稳定性;应力波;直杆

中图分类号 O 389

大量的实验^[3,4]表明在冲击载荷作用下,应力波的传播对结构的屈曲具有重大影响。为了研究应力波对动态屈曲的影响,人们常常从最简单的结构——弹性直杆的行为入手,以期了解应力波传播对屈曲影响的实质。如图 1 所示,一恒值应力波从直杆的左端开始沿直杆向右传播,常见的问题是:直杆何时发生屈曲,为此在众多文章^[5,8~10]中采用了“冻结边界”的技术,即假定在屈曲时刻,瞬时冻结直杆的右边界于应力纵波的波阵面上,然后研究在撞击端与“冻结边界”段之间杆的稳定性问题。然而,这样研究引出的问题:一是用局部“变”长直杆的稳定性来代替整个直杆的稳定性是否合理;二是这样做常常要假定在应力波波阵面处的边界条件(对图 1 所示的问题一般假设为固支边条),该假设的合理性又如何。目前尚未见到文献对这两个问题的回答。

本文试图从另一角度研究应力波引起的直杆稳定性问题,即研究一有限又足够长的完善直杆,当一恒值(P_0)应力纵波从杆的一端起以恒定速度在直杆中传播时,整个直杆在纵波运动的各个时刻的各平凡解的稳定性,也即不再把直杆分成受力段与非受力段来分析。这样通过对整个直杆平凡解的稳定性分析,反映应力波传播对直杆屈曲的影响,同时回答了上述两个问题。

1 基本控制方程

平凡解支的稳定性分析依赖于离散系统的奇异点的稳定性理论^[2],在本文的分析中,将对直杆在空间上离散化,用有限维系统来近似原来的连续系统。对于完善的弹性直杆在小变形、小应变的条件下,直杆的横向位移 w 的控制方程如下^[1]:

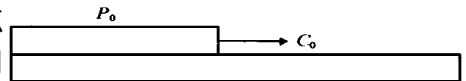


图 1 弹性直杆受轴向应力波的作用

Fig. 1 Axial stress wave propagating along a semi-infinite beam

来稿日期:1997-04-28

* 中国科学院力学研究所

汤立群,1966年生,博士;主要研究方向:结构动力学和材料本构关系。

$$A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - EI \frac{\partial^4 w}{\partial X^4} - \frac{\partial}{\partial X} \left(P \frac{\partial w}{\partial X} \right) \tag{1}$$

其中, X, t 分别是空间和时间坐标, ρ 是材料密度, A_0 是直杆的横截面面积(本文考虑的是等截面杆), I 是横截面的转动惯量。

对方程(1)进行无量纲化,引入如下的变量:

$$p = \frac{P}{EA_0}; \quad y = \frac{w}{r}; \quad x = \frac{X}{r}; \quad t = \frac{tC_0}{r}; \quad p^* = \frac{P_0}{EA_0} \tag{2}$$

其中, $C_0 = \sqrt{E/\rho}$, 弹性纵波波速; $r = \sqrt{I/A_0}$, 直杆横截面的回转半径, 则方程(1)变为:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{3}$$

其中 $p = p^* H(-x)$, $H(\cdot)$ 阶跃函数。

2 奇异点的稳定性理论

对于一个 n 维非线性一阶微分方程组:

$$\frac{dV_i}{dt} = f_i(V_1, V_2, \dots, V_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{4}$$

当存在点 $S(V_1^S, V_2^S, \dots, V_n^S)$ 使得方程组:

$$\left. \frac{dV_i}{dt} \right|_{V_1=V_1^S, V_2=V_2^S, \dots, V_n=V_n^S} = 0 \tag{5}$$

则点 S 被称为方程组(4)的奇异点^[2]。

方程(4)在奇异点 S 邻域的特性,一般来说只取决于方程在奇异点邻域的线性项,因为

$$\begin{aligned} \frac{dV_i}{dt} &= f_i(V_1, V_2, \dots, V_n) = f_i(V_1^S, V_2^S, \dots, V_n^S) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial V_j} \right)_S (V_j - V_j^S) + \dots \\ &g \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial V_j} \right)_S (V_j - V_j^S) \right] = A_{ij}^S (V_j - V_j^S) \end{aligned} \tag{6}$$

对于式(6)的一阶常系数线性方程组,其矩阵 A^S 的稳定性有如下定义:若 A^S 的所有特征值 λ_j 有负实部,即 $\text{Re}(\lambda_j) < 0 (j = 1, \dots, n)$, 则 A^S 稳定;若 $\max \text{Re}(\lambda_j) < 0$, 且该特征值只对应于 A^S 简单的初等因子,称 A^S 拟稳定。文[6]的定理说明方程(4)在奇异点 $S(V_1^S, V_2^S, \dots, V_n^S)$ 周围的稳定特性取决于如下方程的根:

$$\det \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial V_j} \right)_S - \lambda \delta_{ij} \right] = 0 \tag{7}$$

当方程(7)的所有根 λ_j 中只要有一个根的实部取正值,则方程(7)在这奇异点周围将是不稳定的。

因为方程(4)的平凡解支 $V_i(\cdot) = 0$ 必能满足(5)式的定义,故平凡解支上所有的解均为奇异点,因此这时方程(4)在平凡解周围的特性,在一般情况下取决于方程(4)的线性化形式。

3 稳定性分析

3.1 方程的离散化

如图 2 所示,用有限差分对式(3)在空间上进行离散化,其中,把整个直杆等分成 $n + 1$ 个

节点,但只有 $n - 1$ 个自由度,每个网络的长度为 x ,位移 y_i 定义在网络的整点上,而轴向载荷 p_i 定义在半格点上。

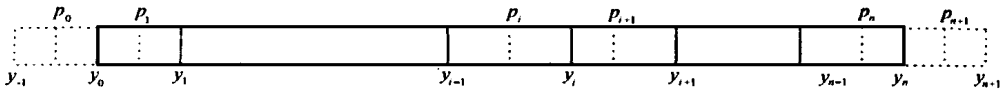


图 2 直杆的离散化

Fig. 2 The discreted bar

$$\frac{d^2 y_i}{d^2} = -\frac{1}{x^4} y_{i-2} + \left(\frac{4}{x^4} - \frac{p_i}{x^2} \right) y_{i-1} + \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{p_i + p_{i+1}}{x^2} \right) y_i + \left(\frac{4}{x^4} - \frac{p_{i+1}}{x^2} \right) y_{i+1} - \frac{1}{x^4} y_{i+2} \quad (8)$$

写成广义形式为:

$$\left(\frac{d^2 y_i}{d^2} \right) = g_i(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (9)$$

这里, g_i 可以看成是一个广义力,而且当 $y_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 时,有 $g_i = 0$ 。式(9) 是二阶微分方程组,必须先化成一阶微分方程组,引入如下变量:

$$q_1 = \dot{y}_1, q_2 = \dot{y}_2, \dots, q_{n-1} = \dot{y}_{n-1} \quad (10)$$

和 $2n - 2$ 维向量 V ,即

$$V^T = (y_1, \dots, y_{n-1}, q_1, \dots, q_{n-1}) = (V_1, \dots, V_{2n-2}) \quad (11)$$

这样(9) 式就可以用如下的一阶微分方程组所等价:

$$\frac{dV_i}{d} = f_i(V_1, V_2, V_{2n-2}) \quad (i = 1, 2, \dots, 2n-2) \quad (12)$$

显然,对于方程(12) 的平凡解 $y_i(\cdot) = 0$ 且 $q_i(\cdot) = 0$ 也是方程的奇异点。

3.2 边界条件的离散化

图 2 中直杆有 $n + 1$ 个节点,但只有 $n - 1$ 个自由度,是因为在直杆的左端采用固支边界条件:

$$y_0 = 0, \quad y_{-1} = y_1 \quad (13)$$

在直杆的右端,为了方便起见也采用固支边界条件:

$$y_n = 0, \quad y_{n+1} = y_{n-1} \quad (14)$$

将式(13) 和式(14) 代入式(8) 能得到靠近边界的两个分量 g_1, g_{n-1} 。

3.3 特征矩阵 A

平凡解支的稳定性特性取决于式(12) 的 Jaccobi 矩阵 A 的特征值, A 为:

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial V_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2n-2) \quad (15)$$

由式(11) 则 A 等于:

$$\text{稳定} \quad A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{n-1} \\ D & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (16)$$

其中 I_{n-1} 是 $n - 1$ 阶的单位矩阵,而 D 是 $n - 1$ 阶方阵:

$$D_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (17)$$

很容易证明矩阵 D 是个实对称阵,但是 A 却是个非对称的实矩阵,在矩阵 A 中除了 p_i 是时间相关外,别的都是常数,根据 p 的定义,有

$$p_i = p^* H\left(-\left(i - \frac{1}{2}\right) x\right) \tag{18}$$

因此 A 也是时间相关的。严格来说,常系数矩阵的稳定性理论在这里并不完全适用,我们将采用冻结系数法,即只考虑直杆在有限个时刻的平凡解的稳定性,这些时刻被假定为应力波从杆的第 0 个节点开始传播到第 1 个节点,第 2 个节点, ..., 第 n 个节点的这个时刻,因此时间 t 取如下的离散值:

$$t = m \tau = m \times x \quad (m = 1, 2, \dots, n) \tag{19}$$

至此,我们所讨论的应力波引起的直杆稳定性问题变成求在上述各个时刻矩阵 A 的特征值。

式(16) 给出矩阵 A 与矩阵 D 之间的相互关系,下面求它们的特征值间的相互关系。设 λ_A 为矩阵 A 的特征值, λ_D 为矩阵 D 的特征值,则它们分别满足:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda_A I_{2n-2}) &= 0 \\ \det(D - \lambda_D I_{n-1}) &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

把式(16) 代入式(20) 得:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda_A I_{2n-2}) &= \begin{vmatrix} -\lambda_A I_{n-1} & I_{n-1} \\ D & -\lambda_A I_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & I_{n-1} \\ D - \lambda_A^2 I_{n-1} & -\lambda_A I_{n-1} \end{vmatrix} = \\ &= \pm \det(D - \lambda_A^2 I_{n-1}) = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

比较式(20) 和式(21),显然有

$$\lambda_A^2 = \lambda_D \text{ 或 } \lambda_A = \pm \sqrt{\lambda_D} \tag{22}$$

因为 D 是实对称矩阵,故 λ_D 均为实数,所以矩阵 A 的特征值是实数,或是一对共轭纯虚数。

3.4 矩阵特征值的求解

由于计算机技术的发展,使得即使在微机上求解高阶(上百阶) 矩阵的所有特征值已不再困难,因此也可以通过直接求解矩阵的所有特征值,然后再去判断矩阵的稳定性。根据式(22),可以先求出实对称矩阵 D 全部特征值,然后求 A 的特征值实部。

4 计算结果和讨论

4.1 计算结果

图 3 和图 4 反映的是在相同载荷($p_0 = 0.001511$) 作用下,杆长 l 分别取 400 和 600 时,矩阵 A 在不同时刻的特征值的前 6 个最大实部值随时间 t 的变化趋势。

4.2 讨论

从中可以看出,当时间 $t = 50$ 时,即应力纵波传播的距离 $x = 50$,矩阵中出现了实部大于零的特征值,即 $t > 50$ 后,直杆开始产生非平凡解。在计算中为了便于比较,杆中载荷的幅值均取 0.001511。相比可以看出,二者的曲线簇在应力波传至杆的另一端之前($t < 400$) 是基本一致的,尤其是第 1、第 2 两条曲线,虽然在第 1 条曲线的起始位置有略微的差别,但考虑到这是对高阶矩阵求解特征值的结果,这些差别也是在可接受的范围之内。说明直杆足够长时,杆

的右边界确实对屈曲特性没有什么影响,也就是说“冻结边界”的技术在研究应力波引起的直杆屈曲问题时是可行的。

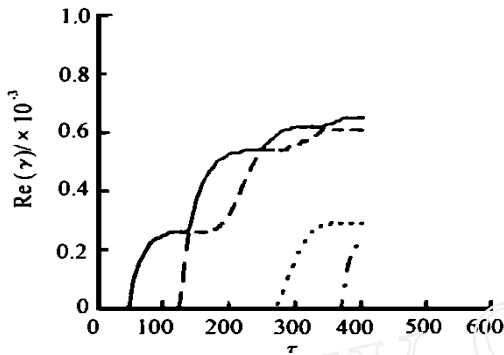


图 3 特征值实部随应力波传播的变化趋势
($l = 400$)

Fig.3 The variation of the reals of eigenvalues with the propagating stress wave when $l = 400$

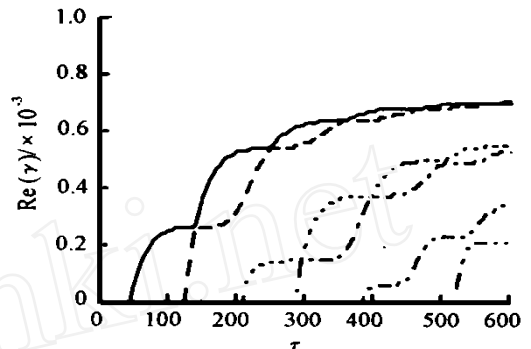


图 4 特征值实部随应力波传播的变化趋势
($l = 600$)

Fig.4 The variation of the reals of eigenvalues with the propagating stress wave when $l = 600$

文[10]对图1的问题应用冻结边界于应力波波阵面和假定在应力波波阵面为固支条件,并在作用相同的载荷 p^* 下,得到如图5所示的特征曲线簇,可以看出它与图4是十分相似的,作为一个定性结果,这说明对于假定应力波波阵面的横向位移及其一阶导数均为连续是合理的,因为若在波阵面直杆横向位移是另外一种边界条件,那么特征曲线簇的形状也会明显改变^[9]。但是图4和图5之间又存在明显的差异,即两曲线簇在时间轴上的位置不一样,前者更早出现不稳定解。导致这个差异的原因可能是在本文分析中采用有限维离散系统来近似连续系统。对该问题的深入探讨有赖于两系统的稳定性的收敛证明。

图4和5的每一点均代表一个非平凡解,我们称之为特征点,这说明在应力波传播引起的动态屈曲问题中,随着参数(时间或应力波传播距离)的变化,屈曲特征不再是象静

态问题那样只是一系列离散的特征点,而显示出一系列连续的点或一簇特征曲线。但是,在一簇特征曲线中,直杆的后屈曲将选择其中哪一个点作为初始点,是否为第一个非零特征点,若是图4中的第一个特征点,那么由于该点的特征值实部为零,随着时间的发展,方程的解不会扩展,这与后屈曲的基本要求相矛盾。这说明对于应力波引起的屈曲问题单凭线性的稳定性理论无法预言后屈曲的发展方向。对该问题的最终解决也许要依赖非线性分叉理论的发展,并分析出每一个解支的稳定性,从而确定后屈曲的起始点,或者如文[5,7,9,10]引入用于判断后屈曲起始点的准则。对于以时间为参数的屈曲问题要应用非线性分叉理论较为困难,因为此时相对平凡解的分叉常常不再是分叉点而是分叉线或分叉面,从图4可以看出本文的问题是属于分叉线问题。

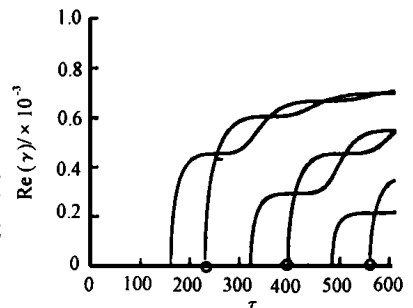


图 5 特征值随应力波传播的变化
(解析解)

Fig.5 The variation of the reals of eigenvalues with the propagating stress wave (analytic solution)

5 结论

本文应用离散系统的奇异点的稳定性理论研究了在应力波沿直杆传播的过程中直杆平凡解支的稳定性特点。在研究过程中,本文做了如下假定:(1)用有限维离散系统近似直杆的连续系统;(2)应用冻结系数法,即研究的是直杆在有限个时刻的平凡解的稳定性。其中离散系统的稳定性和连续系统的稳定性之间的相近程度或收敛性本文并未给出,该工作有待于进一步深入研究。

计算结果反映了在应力波传播引起的完善直杆的屈曲问题中:(1)采用冻结边界技术即忽略直杆未受力段的影响是可行的。(2)在应力波波阵面假定直杆横向位移为固支边界是合理的。(3)本文认为对于单凭线性稳定性理论不足以预言应力波引起的动态后屈曲的初始方向。

参 考 文 献

- 1 Sevin E. On the elastic bending of columns due to dynamic axial forces including effect of axial inertia. *J Appl Mech*, 1960, 27 (1): 125 ~ 131
- 2 Davis H T. Introduction to nonlinear differential and integral equations. New York: Dover, 1962
- 3 Abrahamson G A, Goodier J N. Dynamic flexural buckling of rods within an axial plastic compression wave. *J Appl Mech*, 1966, 33(2): 241 ~ 247
- 4 Ari-Gur J, Weller T, Singer J. Experimental and theoretical studies of columns under axial impact. *Int J Solids Struct*, 1982, 18 (8): 619 ~ 641
- 5 魏 勇, 朱兆祥, 李永池. 轴向冲击载荷作用下直杆弹性动态屈曲的研究. *实验力学*, 1988, 3: 258 ~ 264
- 6 廖晓昕著. 稳定性的数学理论及应用. 武汉: 华中师范大学出版社, 1988
- 7 朱兆祥. 应力波引起的弹性结构的屈曲准则. 见: 余同希, 王大钧主编. 塑性力学和地球动力学文集. 北京: 北京大学出版社, 1990. 56 ~ 70
- 8 Teng N G, Su X Y. Impact bifurcation of semi-infinite elastic thin bars. *Acta Mechanica Sinica*, 1989, 5(1): 77 ~ 82
- 9 Jiang Zhaobiao, Zhu Zhaoxiang. The impact buckling of cylindrical shell induced by axial stress wave. *Proc 2nd ISIDL*. Chengdu, China: 1992
- 10 Tang Liqun, Zhu Zhaoxiang. Impact buckling and postbuckling of slender elastic bars. In: Zheng Zheming eds. *Proc of IU TAM Symposium on Impact Dynamics*. Beijing: Peking University Press, 1994

ANALYSIS OF STABILITY OF PERFECT STRAIGHT ELASTIC BAR UNDER AXIAL STRESS WAVES

*Tang Liqun Zhu Zhaoxiang**

(College of Traffic and Communications, South China Univ. of Tech.)

Abstract The stability characteristics of straight elastic bars under axial stress wave was studied by means of the stability theory of discrete systems on the condition that the coefficients are “frozen”. The derived variation laws of the eigenvalues of the characteristic matrix with the propagation of stress waves indicate that in studying the buckling problems of this straight elastic bar, it is reasonable to adopt the boundary-freezing technique and to assume the transverse displacement and its first-order derivative to be continuous at the stress wave front. The study also showed that only the linear stability theory is not enough to predict the beginning point of the dynamic post-buckling induced by stress wave for perfect systems.

Key words stability; stress wave; bars

* Institute of Mechanics, CAS