

一个求解 Euler 方程的特殊 矩阵分裂格式*

郭文海 马延文 傅德薰

(中国科学院力学研究所)

A SPECIAL MATRIX SPLITTING SCHEME FOR SOLVING EULER EQUATIONS

Guo Wen-hai Ma Yan-wen Fu De-xun

(Institute of Mechanics, Chinese Academia Sinica)

Abstract

A special matrix splitting Scheme is proposed for Solving unsteady compressible Euler equations. Numerical stability of the scheme is analyzed through comparing with the implicit central difference scheme. Numerical experiments show that the scheme is of satisfactory stability and reduced computing compared with the general flux vector splitting scheme. Computational examples about a NACA 0012 airfoil at $M_\infty = 0.63$ and 0.75 are given. The results agree well with the results of other author's.

§ 1. 引言

自[1]提出矢通量分裂格式以来,在求解气动方程方面得到广泛应用。矢通量分裂格式是一种求解守恒型双曲方程组的方法,它将方程中代表质量、动量和能量的矢通量按照矢通量 Jacobian 矩阵正负特征值分裂为两个亚矢通量项,目的在于改进显式格式和隐式格式的计算效率和提高求解时的稳定性。在求解方法上,对于二维问题,需要求解以 4×4 块矩阵为矩阵元的上三角矩阵和下三角矩阵,比中心差分格式需要求解两个块三角矩阵工作量小得多^[2]。但是, Jacobian 矩阵和矢通量计算量要增加一倍。另外,在求解跨音速问题时,在音速线处会出现相当大的数值振荡,需做特殊的数值光滑化处理。

本文的目的,就是要改进矢通量分裂格式的不足,提高求解 Euler 方程乃至 N-S 方

* 1991年8月15日收到。

程的效率。为此,提出了一个特殊矩阵分裂格式。数值实验表明,格式具有良好的计算稳定性,并使计算量减少。

§ 2. 控制方程

二维非定常可压缩守恒型 Euler 方程为

$$\partial_t q + \partial_x E + \partial_y F = 0, \quad (1)$$

其中 $q = (\rho, \rho u, \rho v, e)^T$, $E = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(e + p))^T$,

$$F = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, v(e + p))^T,$$

并有
$$P = (\gamma - 1) \left[e - \frac{1}{2} \rho(u^2 + v^2) \right]. \quad (2)$$

为适应一般物型非定常流计算,引入随时间变化的贴体曲线坐标变换^[3]:

$$\tau = t, \quad \xi = \xi(x, y, t), \quad \eta = \eta(x, y, t). \quad (3)$$

方程(1)变为如下守恒形式:

$$\partial_\tau \tilde{q} + \partial_\xi \tilde{E} + \partial_\eta \tilde{F} = 0, \quad (4)$$

其中 $\tilde{q} = q/J$, $\tilde{E} = (\xi_x q + \xi_x E + \xi_y F)/J$,

$$\tilde{F} = (\eta_x q + \eta_x E + \eta_y F)/J, \quad J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x.$$

定义 ξ 和 η 方向的速度 $U = \frac{d\xi}{d\tau}$, $V = \frac{d\eta}{d\tau}$, 称为逆变速度。与 x, y 向的速度 u, v 的

关系为

$$U = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_t + \eta_x u + \eta_y v. \quad (5)$$

流通量 \tilde{E}, \tilde{F} 关于 \tilde{q} 的 Jacobian 矩阵为

$$\tilde{A} = \partial \tilde{E} / \partial \tilde{q}, \quad \tilde{B} = \partial \tilde{F} / \partial \tilde{q}. \quad (6)$$

§ 3. 差分格式

时间逼近采用二阶精度差分格式:

$$\tilde{q}^{n+1} = \tilde{q}^n + \Delta\tau \partial_\tau \tilde{q}^n + \frac{\Delta\tau^2}{2} \partial_\tau^2 \tilde{q}^n + O(\Delta\tau^3). \quad (7)$$

将方程(4)代入(7)并令 $\delta_\tau \tilde{q} = \tilde{q}^{n+1} - \tilde{q}^n$, 则差分方程(7)变为如下隐式差分方程:

$$\left(I + \frac{\Delta\tau}{2} \partial_\xi \tilde{A} + \frac{\Delta\tau}{2} \partial_\eta \tilde{B} \right) \delta_\tau \tilde{q} = \text{RHS}, \quad (8)$$

其中 $\text{RHS} = -\Delta\tau \partial_\xi \tilde{E} - \Delta\tau \partial_\eta \tilde{F}$.

右端项采用二阶精度中心差分格式:

$$\text{RHS} = -\frac{\Delta\tau}{2\Delta\xi} \delta_\xi \tilde{E} - \frac{\Delta\tau}{2\Delta\eta} \delta_\eta \tilde{F},$$

则差分方程(8)在时间和空间都具有二阶精度。

差分方程(8)左端隐式部分用 Jacobian 矩阵正负特征值分裂法构造差分格式,但又

不同于通常的特征值分裂. 我们要求其分裂在不改变差分精度的前提下使格式具有稳定性好、计算时间短的优点. 为此, 对 Jacobian 矩阵 \tilde{A}, \tilde{B} 做如下分裂:

$$\tilde{A} = \tilde{A}^+ + \tilde{A}^-, \quad \tilde{B} = \tilde{B}^+ + \tilde{B}^- \quad (9)$$

要求矩阵 \tilde{A}^+, \tilde{B}^+ 的特征值不小于零, \tilde{A}^-, \tilde{B}^- 的特征值不大于零. 这样, 在构造差分格式时, 正特征值矩阵用向后差分, 负特征值矩阵用向前差分, 差分方程可写为

$$[I + g(\nabla_{\xi}\tilde{A}^+ + \Delta_{\xi}\tilde{A}^-) + h(\nabla_{\eta}\tilde{B}^+ + \Delta_{\eta}\tilde{B}^-)]\delta_{\tau}\tilde{q} = \text{RHS}, \quad (10)$$

其中 $g = \frac{\Delta\tau}{2\Delta\xi}$, $h = \frac{\Delta\tau}{2\Delta\eta}$, $\nabla_{\xi}, \nabla_{\eta}$ 和 $\Delta_{\xi}, \Delta_{\eta}$ 分别为向后和向前差分. 下面对矩阵 \tilde{A}, \tilde{B} 做一些特殊分裂. 通过对格式稳定性的分析, 找出比较理想的矩阵分裂形式和求解方法.

§ 4. 特殊矩阵分裂格式

矩阵 \tilde{A}, \tilde{B} 的四个特征值分别为

$$U, U, U + a_{\xi}, U - a_{\xi}; V, V, V + a_{\eta}, V - a_{\eta},$$

其中 $a_{\xi} = a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}$, $a_{\eta} = a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}$, a 为音速.

首先进行如下矩阵分裂, 其中 $\lambda(\tilde{A}^+), \lambda(\tilde{B}^+)$ 分别为矩阵 \tilde{A}^+, \tilde{B}^+ 的四个特征值, \tilde{A}^+, \tilde{B}^+ 为数量矩阵:

$$\begin{cases} \lambda(\tilde{A}^+) = |U| + a_{\xi}, \\ \lambda(\tilde{B}^+) = |V| + a_{\eta}, \\ \tilde{A}^+ = \lambda(\tilde{A}^+)I, \quad \tilde{A}^- = \tilde{A} - \tilde{A}^+, \\ \tilde{B}^+ = \lambda(\tilde{B}^+)I, \quad \tilde{B}^- = \tilde{B} - \tilde{B}^+. \end{cases} \quad (11)$$

将分裂(11)代入差分方程(10), 用近似因式分解方法进行求解

$$\begin{cases} (I + g\nabla_{\xi}\tilde{A}^+ + h\nabla_{\eta}\tilde{B}^+)\delta_{\tau}\tilde{q}^* = \text{RHS}, \\ (I + g\Delta_{\xi}\tilde{A}^- + h\Delta_{\eta}\tilde{B}^-)\delta_{\tau}\tilde{q} = \delta_{\tau}\tilde{q}^*. \end{cases} \quad (12)$$

将(12)展开得

$$\begin{cases} (I + g\tilde{A}^+ + h\tilde{B}^+)\delta_{\tau}\tilde{q}_{i,j}^* = \text{RHS} + g(\tilde{A}^-\delta_{\tau}\tilde{q}^*)_{i-1,j} + h(\tilde{B}^-\delta_{\tau}\tilde{q}^*)_{i,j-1}, \\ (I - g\tilde{A}^- - h\tilde{B}^-)\delta_{\tau}\tilde{q}_{i,j} = \delta_{\tau}\tilde{q}_{i,j}^* - g(\tilde{A}^-\delta_{\tau}\tilde{q})_{i+1,j} - h(\tilde{B}^-\delta_{\tau}\tilde{q})_{i,j+1}. \end{cases} \quad (13)$$

从(13)可以看到, $\delta_{\tau}\tilde{q}_{i,j}^*$ 只与 $\delta_{\tau}\tilde{q}_{i-1,j}^*$ 和 $\delta_{\tau}\tilde{q}_{i,j-1}^*$ 有关; $\delta_{\tau}\tilde{q}_{i,j}$ 只与 $\delta_{\tau}\tilde{q}_{i+1,j}$ 和 $\delta_{\tau}\tilde{q}_{i,j+1}$ 有关, 用正负扫描的办法就可求出全流场的 $\delta_{\tau}\tilde{q}^*$ 和 $\delta_{\tau}\tilde{q}$, 其中 i, j 分别为沿 ξ, η 方向计算网格点的序号.

值得注意的是, 因为 \tilde{A}^+, \tilde{B}^+ 为数量矩阵, (13)中的第一个差分方程只需做标量运算即可求出, 无疑节省了计算时间. 第二个差分方程每步进行四阶矩阵求逆. 另外, 因 \tilde{A}^+, \tilde{B}^+ 和 \tilde{A}^-, \tilde{B}^- 很容易求出, 使正负特征值分裂矩阵的计算量大大减少, 从而在很大程度上克服了矢通量分裂格式 Jacobian 矩阵计算量增加的缺点.

在计算稳定性方面, 由于以上矩阵分裂加强了方程(13)左端矩阵主对角优势, 应该使稳定性加强. 我们用 C 网格(图 1)对 NACA0012 翼型跨音速绕流做计算, 发现以上分裂格式(11)的稳定性并不理想, 原因如下:

1. 扫描方向对计算稳定性的影响.

对差分方程(10)进行近似因式分解时,有四种分解形式,(12)只是其中的一种,其它三种如下:

$$\begin{cases} (I + g\Delta_\xi \tilde{A}^- + h\Delta_\eta \tilde{B}^-)\delta_\tau \tilde{q}^* = \text{RHS}, \\ (I + g\nabla_\xi \tilde{A}^+ + h\nabla_\eta \tilde{B}^+)\delta_\tau \tilde{q} = \delta_i \tilde{q}^*; \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} (I + g\nabla_\xi \tilde{A}^+ + h\Delta_\eta \tilde{B}^-)\delta_\tau \tilde{q}^* = \text{RHS}, \\ (I + g\Delta_\xi \tilde{A}^- + h\nabla_\eta \tilde{B}^+)\delta_\tau \tilde{q} = \delta_i \tilde{q}^*; \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} (I + g\Delta_\xi \tilde{A}^- + h\nabla_\eta \tilde{B}^+)\delta_\tau \tilde{q}^* = \text{RHS}, \\ (I + g\nabla_\xi \tilde{A}^+ + h\Delta_\eta \tilde{B}^-)\delta_\tau \tilde{q} = \delta_i \tilde{q}^*. \end{cases} \quad (16)$$

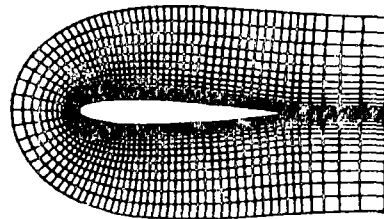


图1. 部分计算网格

每一种近似因式分解形式都有相应的扫描方向,原则上均可用来求解差分方程(10),只是为节省计算时间,在选择 \tilde{A}, \tilde{B} 的分裂时使某一方向的扫描求解只做标量运算;以差分方程(15)为例,在分裂(11)的意义下可选择

$$\lambda(\tilde{A}^+) = |U| + a_\xi, \lambda(\tilde{B}^-) = -|V| - a_\eta, \tilde{A}^+ = \lambda(\tilde{A}^+)I, \tilde{B}^- = \lambda(\tilde{B}^-)I,$$

那么(15)中的第一个差分方程用标量运算即可求解。

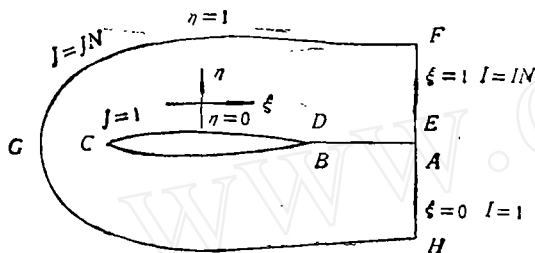


图2. 计算区域边界

现在用图2说明不同扫描方向对计算稳定性的影响。对于近似因式分解(12)和(16),求解 $\delta_\tau \tilde{q}^*$ 时, i 从2变到 $JN - 1$, 即扫描方向从 $j = 2$ 到 $j = JN - 1$ 。很显然,求 $\delta_\tau \tilde{q}_{i,2}^*$ 时要用到 $\delta_\tau \tilde{q}_{i,1}^*$ 的值。在提边界条件时,总是针对 $\delta_\tau \tilde{q}$ 而言;以显式边界条件为例,有

$$\delta_\tau \tilde{q}_{i,1} = \delta_\tau \tilde{q}_{i,JN} = 0.$$

但在内边界推导不出 $\delta_\tau \tilde{q}_{i,1} = 0$ 的条件,比如在(12)中

$$\delta_\tau \tilde{q}_{i,1}^* = (I + g\Delta_\xi \tilde{A}^- + h\Delta_\eta \tilde{B}^-)\delta_\tau \tilde{q}_{i,1} = h(\tilde{B}^- \delta_\tau \tilde{q})_{i,2}.$$

因 $\delta_\tau \tilde{q}_{i,2} \approx 0$, 所以 $\delta_\tau \tilde{q}_{i,1}^* \approx 0$ 。数值试验表明,当强迫 $\delta_\tau \tilde{q}_{i,1} = 0$ 时会在计算过程中出现数值振荡。对于近似因式分解(14)和(15),求解时用不到 $\delta_\tau \tilde{q}_{i,1}^*$ 的边界条件,只用到外边界 $\delta_\tau \tilde{q}_{i,JN}^*$ 的边界条件。以(15)为例, $\delta_\tau \tilde{q}_{i,JN}^* = (I + g\Delta_\xi \tilde{A}^- + h\nabla_\eta \tilde{B}^+)\delta_\tau \tilde{q}_{i,JN}$ 。因 $\delta_\tau \tilde{q}_{i,JN} = 0$, 有

$$\delta_\tau \tilde{q}_{i,JN}^* = -h(\tilde{B}^+ \delta_\tau \tilde{q})_{i,JN-1}. \quad (17)$$

当外边界离物体很远时,在外边界附近的扰动很小,可以近似认为 $\delta_\tau \tilde{q}_{i,JN-1} = 0$, 因此 $\delta_\tau \tilde{q}_{i,JN}^* = 0$ 。而求解 $\delta_\tau \tilde{q}$ 时用到 $\delta_\tau \tilde{q}_{i,1} = 0$ 的边界条件,这样就避免了求解(12)和(16)时所遇到的边界条件不匹配的问题。对于沿 ξ 方向的扫描,由于 $\xi = 0 (i = 1)$ 和 $\xi = 1 (i = JN)$ 边界都在远下游,扰动很小,类似于对(17)式的分析,可以认为

$$\delta_\tau \tilde{q}_{i,1}^* = \delta_\tau \tilde{q}_{i,JN}^* = 0.$$

沿两个方向的扫描 ($i = 2 \rightarrow JN - 1$ 和 $i = JN - 1 \rightarrow 2$) 求解,基本上是一样的。

根据以上分析可以看出,用近似因式分解求解差分方程(10)时,应避免在扰动较大的边界,比如物面边界使用中间变量 $\delta_\tau \tilde{q}^*$ 的边界条件。因此,(14)和(15)两种近似因式分解比(12)和(16)更合理。在后面的分析和计算中,大都采用近似因式分解(15)求解差分方程(10),其差分格式为

$$\begin{cases} (I + g\tilde{A}^+ - h\tilde{B}^-)\delta_r\tilde{q}_{i,j}^* = \text{RHS} + g(\tilde{A}^+\delta_r\tilde{q}^*)_{i-1,j} - h(\tilde{B}^-\delta_r\tilde{q}^*)_{i,j+1}, \\ (I - g\tilde{A}^- + h\tilde{B}^+)\delta_r\tilde{q}_{i,j}^* = \delta_r\tilde{q}_{i,j}^* - g(\tilde{A}^-\delta_r\tilde{q}^*)_{i+1,j} + h(\tilde{B}^+\delta_r\tilde{q}^*)_{i,j-1}. \end{cases} \quad (18)$$

2. 不同矩阵分裂对计算稳定性的影响.

令 $\tilde{C} = \tilde{A}^+ - \tilde{A}^-$, $\tilde{D} = \tilde{B}^+ - \tilde{B}^-$,

则有
$$\tilde{A}^+ = \frac{1}{2}(\tilde{A} + \tilde{C}), \quad \tilde{A}^- = \frac{1}{2}(\tilde{A} - \tilde{C});$$

$$\tilde{B}^+ = \frac{1}{2}(\tilde{B} + \tilde{D}), \quad \tilde{B}^- = \frac{1}{2}(\tilde{B} - \tilde{D}).$$

将这些关系式代入差分方程(10)左端的第二项和第三项,得如下关系:

$$\begin{cases} g(\nabla_\xi\tilde{A}^+ + \Delta_\xi\tilde{A}^-)\delta_r\tilde{q} = \frac{g}{2}(\delta_\xi\tilde{A}\delta_r\tilde{q} - \delta_\xi^2\tilde{C}\delta_r\tilde{q}), \\ h(\nabla_\eta\tilde{B}^+ + \Delta_\eta\tilde{B}^-)\delta_r\tilde{q} = \frac{h}{2}(\delta_\eta\tilde{B}\delta_r\tilde{q} - \delta_\eta^2\tilde{D}\delta_r\tilde{q}). \end{cases} \quad (19)$$

右端第一项为中心差分:

$$\begin{aligned} \delta_\xi\tilde{A}\delta_r\tilde{q} &= (\tilde{A}\delta_r\tilde{q})_{i+1,j} - (\tilde{A}\delta_r\tilde{q})_{i-1,j}, \\ \delta_\eta\tilde{B}\delta_r\tilde{q} &= (\tilde{B}\delta_r\tilde{q})_{i,j+1} - (\tilde{B}\delta_r\tilde{q})_{i,j-1}. \end{aligned}$$

第二项为二阶导数中心差分:

$$\begin{aligned} \delta_\xi^2\tilde{C}\delta_r\tilde{q} &= (\tilde{C}\delta_r\tilde{q})_{i+1,j} - 2(\tilde{C}\delta_r\tilde{q})_{i,j} + (\tilde{C}\delta_r\tilde{q})_{i-1,j}, \\ \delta_\eta^2\tilde{D}\delta_r\tilde{q} &= (\tilde{D}\delta_r\tilde{q})_{i,j+1} - 2(\tilde{D}\delta_r\tilde{q})_{i,j} + (\tilde{D}\delta_r\tilde{q})_{i,j-1}. \end{aligned}$$

可见本文差分格式比中心差分格式多出如下二阶导数项:

$$-\frac{\Delta\xi}{2} \left[\frac{\Delta\xi}{2} \partial_\xi^2\tilde{C}\delta_r\tilde{q} + \frac{\Delta\eta}{2} \partial_\eta^2\tilde{D}\delta_r\tilde{q} \right]. \quad (20)$$

如果矩阵 \tilde{C}, \tilde{D} 的特征值大于零, (20)正好起到数值耗散作用,使计算稳定;反之会使计算不稳定. 这样,只要知道矩阵 \tilde{C}, \tilde{D} 特征值的变化情况,就能够清楚地判断给出的特殊矩阵分裂在稳定性方面起的作用.

现在考察矩阵分裂(11)代表的各矩阵特征值的变化情况:

\tilde{A}	\tilde{A}^+	\tilde{A}^-	\tilde{C}
U	$ U + a_\xi$	$U - U - a_\xi$	$2 U - U + 2a_\xi$
U	$ U + a_\xi$	$U - U - a_\xi$	$2 U - U + 2a_\xi$
$U + a_\xi$	$ U + a_\xi$	$U - U $	$2 U - U + a_\xi$
$U - a_\xi$	$ U + a_\xi$	$U - U - 2a_\xi$	$2 U - U + 3a_\xi$
\tilde{B}	\tilde{B}^+	\tilde{B}^-	\tilde{D}
V	$ V + a_\eta$	$V - V - a_\eta$	$2 V - V + 2a_\eta$
V	$ V + a_\eta$	$V - V - a_\eta$	$2 V - V + 2a_\eta$
$V + a_\eta$	$ V + a_\eta$	$V - V $	$2 V - V + a_\eta$
$V - a_\eta$	$ V + a_\eta$	$V - V - 2a_\eta$	$2 V - V + 3a_\eta$

可以看到, \tilde{C}, \tilde{D} 的特征值常大于零,但问题是当 U 或 V 变化时,特别是 U 或 V 改变符号时, \tilde{C}, \tilde{D} 的特征值变化较大. 当 $U < 0$ 或 $V < 0$ 时,引入较大的耗散量,而 $U > 0$ 或 $V > 0$

0 时引入较小的耗散量,其原因是 \tilde{C} , \tilde{D} 的特征值直接决定了引入的数值耗散量。数值试验表明,上述不一致的数值耗散量降低了计算稳定性。

下面讨论如下矩阵分裂:

$$\begin{cases} \lambda(\tilde{A}^+) = U + a_\xi, \\ \lambda(\tilde{B}^-) = V - a_\eta, \\ \tilde{A}^+ = \lambda(\tilde{A}^+)I, \tilde{A}^- = \tilde{A} - \tilde{A}^+, \\ \tilde{B}^- = \lambda(\tilde{B}^-)I, \tilde{B}^+ = \tilde{B} - \tilde{B}^-, \end{cases} \quad (21)$$

即 $\lambda(\tilde{A}^+)$ 为矩阵 \tilde{A} 的特征值中最大者, $\lambda(\tilde{B}^-)$ 为矩阵 \tilde{B} 的特征值中最小者。各矩阵特征值变为

\tilde{A}	\tilde{A}^+	\tilde{A}^-	\tilde{C}
U	$U + a_\xi$	$-a_\xi$	$U + 2a_\xi$
U	$U + a_\xi$	$-a_\xi$	$U + 2a_\xi$
$U + a_\xi$	$U + a_\xi$	0	$U + a_\xi$
$U - a_\xi$	$U + a_\xi$	$-2a_\xi$	$U + 3a_\xi$
\tilde{B}	\tilde{B}^+	\tilde{B}^-	\tilde{D}
V	a_η	$V - a_\eta$	$2a_\eta - V$
V	a_η	$V - a_\eta$	$2a_\eta - V$
$V + a_\eta$	$2a_\eta$	$V - a_\eta$	$3a_\eta - V$
$V - a_\eta$	0	$V - a_\eta$	$a_\eta - V$

当 $U + a_\xi$ 和 $a_\eta - V > 0$ 时,分裂(21)产生正耗散,反之会有负耗散产生。解决这一缺点的办法如下:当 $U + a_\xi < 0$ 时,令 $\lambda(\tilde{A}^+) = 0$; 当 $a_\eta - V < 0$ 时,令 $\lambda(\tilde{B}^-) = 0$ 。但是, \tilde{C}, \tilde{D} 的特征值仍随 U 和 V 变化,没有从本质上消除分裂(11)的不足。为解决这一困难,我们提出如下矩阵分裂:

$$\begin{cases} \lambda(\tilde{A}^+) = \frac{U}{2} + \alpha a_\xi, \\ \lambda(\tilde{B}^-) = \frac{V}{2} - \beta a_\eta, \\ \tilde{A}^+ = \lambda(\tilde{A}^+)I, \tilde{A}^- = \tilde{A} - \tilde{A}^+, \\ \tilde{B}^- = \lambda(\tilde{B}^-)I, \tilde{B}^+ = \tilde{B} - \tilde{B}^-. \end{cases} \quad (22)$$

此时各矩阵的特征值为

\tilde{A}	\tilde{A}^+	\tilde{A}^-	\tilde{C}
U	$\frac{U}{2} + \alpha a_\xi$	$\frac{U}{2} - \alpha a_\xi$	$2\alpha a_\xi$
U	$\frac{U}{2} + \alpha a_\xi$	$\frac{U}{2} - \alpha a_\xi$	$2\alpha a_\xi$
$U + a_\xi$	$\frac{U}{2} + \alpha a_\xi$	$\frac{U}{2} - (\alpha - 1)a_\xi$	$(2\alpha - 1)a_\xi$
$U - a_\xi$	$\frac{U}{2} + \alpha a_\xi$	$\frac{U}{2} - (\alpha + 1)a_\xi$	$(2\alpha + 1)a_\xi$

$$\begin{array}{cccc}
 \tilde{B} & \tilde{B}^+ & \tilde{B}^- & \tilde{D} \\
 V & \frac{V}{2} + \beta a_\eta & \frac{V}{2} - \beta a_\eta & 2\beta a_\eta \\
 V & \frac{V}{2} + \beta a_\eta & \frac{V}{2} - \beta a_\eta & 2\beta a_\eta \\
 V + a_\eta & \frac{V}{2} + (\beta + 1)a_\eta & \frac{V}{2} - \beta a_\eta & (2\beta + 1)a_\eta \\
 V - a_\eta & \frac{V}{2} + (\beta - 1)a_\eta & \frac{V}{2} - \beta a_\eta & (2\beta - 1)a_\eta
 \end{array}$$

对 α, β 取值的要求是使其满足 $\lambda(\tilde{A}^+) \geq 0, \lambda(\tilde{B}^+) \geq 0, \lambda(\tilde{A}^-) \leq 0, \lambda(\tilde{B}^-) \leq 0$ 的条件。当 $\alpha, \beta \rightarrow \infty$ 时, 这一条件是绝对满足的, 但为了不引入太大的数值耗散, α, β 的值要适当大。在计算一个流场前, 容易估计 α, β 的值。事实上, 对 \tilde{C} 和 \tilde{D} 的特征值而言, 只要 $\alpha, \beta > 0.5$ 就能保证矩阵 \tilde{C} 和 \tilde{D} 的正特征值性质。从这一意义上讲, α 和 β 是格式的稳定性参数, 只要 α, β 值适当大, 就能保证计算所需的稳定性。

分裂(22)使 \tilde{C}, \tilde{D} 的特征值不随 U, V 变化, 使引入的数值耗散量在整个流场中变化比较均匀, 从而消除了分裂(11)和(21)的不足, 因此是比较理想的分裂形式。

作为比较, 我们给出另一种分裂:

$$\begin{cases}
 \lambda(\tilde{A}^+) = \alpha(U + a_\xi), \\
 \lambda(\tilde{B}^-) = \beta(V - a_\eta), \\
 \tilde{A}^+ = \lambda(\tilde{A}^+)I, \tilde{A}^- = \tilde{A} - \tilde{A}^+, \\
 \tilde{B}^- = \lambda(\tilde{B}^-)I, \tilde{B}^+ = \tilde{B} - \tilde{B}^-,
 \end{cases} \quad (23)$$

也就是 \tilde{C}, \tilde{D} 的特征值除了随 α, β 变化外, 还要随 U, V 变化。

§ 5. 边界条件和人工粘性

本文用 C 网格以 NACA0012 翼型绕流验证计算格式, 计算边界如图 2 所示。在物面 (BCD) 上 $V = 0$, 由关系式(5)得

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \eta_y & -\xi_y \\ -\eta_x & \xi_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U - \xi_t \\ -\eta_t \end{pmatrix}. \quad (24)$$

物面上的压力由物面上的动量方程决定, 即 $\eta_x \cdot \xi$ 方向动量方程 + $\eta_y \cdot \eta$ 方向动量方程 (利用 $V = 0$) 的条件经简化得

$$\begin{aligned}
 & \rho[\partial_x \eta_t + u \partial_x \eta_x + v \partial_x \eta_y] - \rho U(\eta_x u_\xi + \eta_y v_\xi) \\
 & = (\eta_x \xi_x + \xi_y \eta_y) P_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) P_\eta = \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} P_{**}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

对于定常问题有 $\xi_t = \eta_t = 0$, (25)左端第一个括号内的导数均为零。物面上密度用插值求得:

$$\rho_{i,1} = (4\rho_{i,2} - \rho_{i,3})/3.$$

远场 (FGH) 采用来流条件。下游 (AH 和 FE) $\rho, \rho u, \rho v$ 由内点外插求出, $P = P_\infty$, e 由(2)式得到。交界面 (AB 和 DE) 上; AB 和 DE 是网格划分形成的计算边界, 其

上的流场参数由上下两层的值取平均得到。

在所有边界上均采用显式边界条件:

$$\delta_r \tilde{q} = 0.$$

在差分方程(8)中,右端项采用中心差分,为抑制高频振荡,在右端加入四阶人工粘性^[3]:

$$-\sigma \cdot \frac{\Delta \tau}{2} J^{-1} [(\nabla_\xi \Delta_\xi)^2 + (\nabla_\eta \Delta_\eta)^2] J \tilde{q}^n, \quad (26)$$

其中 $\sigma = O(1)$.

为了稳定地捕捉激波,计算中加入平滑:^[4]

$$\begin{cases} q^{n+1} = q^n + \delta_r q, \\ \bar{q}^{n+1} = q^{n+1} + \sigma_1 \delta_\eta^2 q^{n+1}, \\ \bar{\bar{q}}^{n+1} = \bar{q}^{n+1} + \sigma_2 \delta_\eta^2 \bar{q}^{n+1}, \\ q^{n+1} = \bar{\bar{q}}^{n+1}, \end{cases} \quad (27)$$

其中

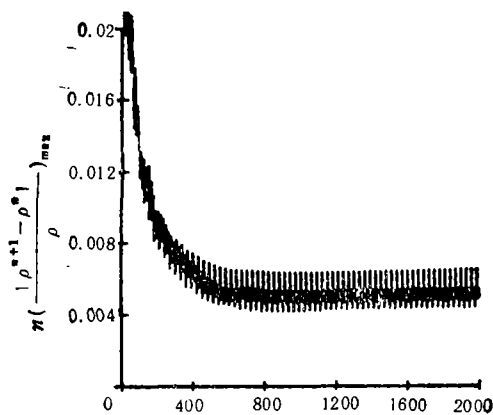
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{P_{i+1,i} - 2P_{i,i} + P_{i-1,i}}{P_{i+1,i} + 2P_{i,i} + P_{i-1,i}} \cdot \sigma_0, \\ \sigma_2 &= \frac{P_{i,i+1} - 2P_{i,i} + P_{i,i-1}}{P_{i,i+1} + 2P_{i,i} + P_{i,i-1}} \cdot \sigma_0, \\ \sigma_0 &= O(1). \end{aligned}$$

以上平滑在光滑区是四阶精度,对流场影响很小;在激波区由于压力变化较大,能够抑制激波前后的数值振荡。

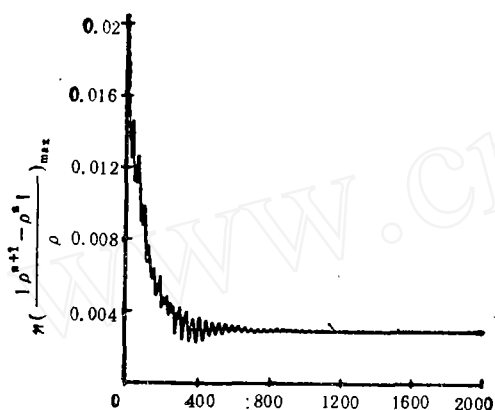
§ 6. 计算结果讨论

算例为 NACA 0012 翼型 $M_\infty = 0.63$ 和 0.75 , $\alpha = 2^\circ$ 时的亚、跨音速绕流,计算网格为 119×35 , $\Delta y_{\min} = 0.01$, 外边界取 10 倍弦长。图 3 是 $M_\infty = 0.75$, $\alpha = 2^\circ$ 时计算过程中 $\left(\frac{|\rho^{n+1} - \rho^n|}{\rho} \right)_{\max}$ 的变化情况,这里给出了(21), (22)和(23)三种分裂的结果,差分格式都是(18)。至于分裂(11),由于计算过程中 ρ 变化很大,这里没有给出结果。可以看到,不同矩阵分裂形式其收敛过程变化很大,分裂(22)最理想;在分裂(23)中,由于 α, β 也作用于 U 和 V 上,其结果没有分裂(22)好,其中 $\alpha = \beta = 1.5$, $\Delta \tau = 0.01$ 。给出的结果都是用分裂(22)计算得到的。

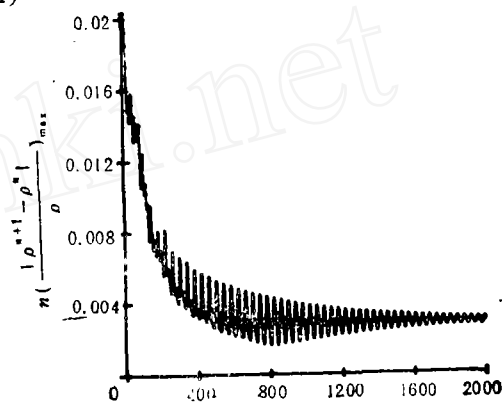
图 4 是 $M_\infty = 0.63$, $\alpha = 2^\circ$ 时亚音速绕流计算结果;图 5 是 $M_\infty = 0.75$, $\alpha = 2^\circ$ 的跨音速绕流计算结果,流场中出现了激波,其压力分布和用中心差分格式^[3]计算的结果吻合。由于本文差分格式的数值耗散作用,在音速线处不产生任何数值振荡。从等密度线看,结果也是令人满意的。



(a) 分裂(21)



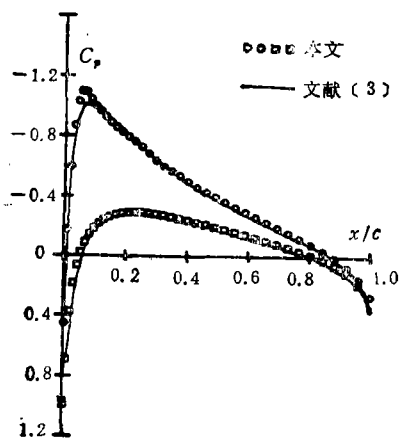
(b) 分裂(22)



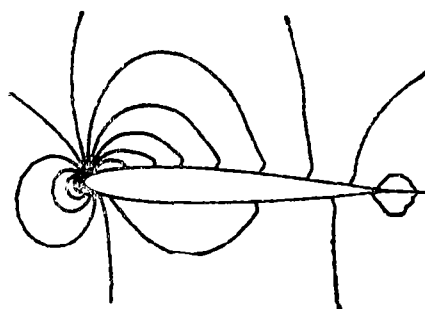
(c) 分裂(23)

图 3. 流场中最大密度变化 $(\frac{|\rho^{n+1} - \rho^n|}{\rho})_{max}$ 在不同矩阵分裂下的变化, n 为迭代步数, $M = 0.75$,

$\alpha = 2^\circ$.



(a) 压力分布



(b) 等密度线

图 $M = 0.63, \alpha = 2^\circ$ 的计算结果

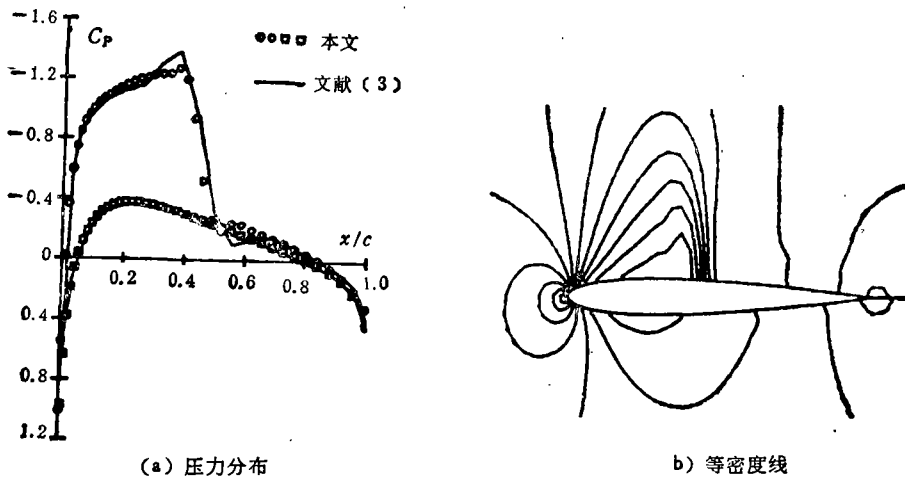


图 5 $M = 0.75, \alpha = 2^\circ$ 的计算结果

综上所述,通过对矩阵分裂格式稳定性分析和扫描方向对稳定性影响的分析,本文给出了稳定性好、计算时间短的特殊矩阵分裂格式,可用于亚、跨、超音速流场的计算。文中所述,也可用于粘性绕流的 $N-S$ 方程计算。

参 考 文 献

- [1] J. L. Steger, R. F. Warming, Flux vector splitting of the zviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite-Difference Methods, *J. of Comput. Phys.*, 40(1981), 263—293.
- [2] 马铁优, 计算流体力学, 北京航空航天大学出版社, 1989.
- [3] J. L. Steger, Implicit finite-difference simulation of flow about arbitrary two-dimensional geometries, *AIAA J.*, 16(1978), 679—686.
- [4] S. S. Tong, The impact of smoothing formulations on the stability and accuracy of various time Marching Schemes, *AIAA paper* 87—1106.