

动量矩方程的剪切积分解析表示式

何 龙 德

中国科学院力学研究所, 北京(邮政编码 100080)

摘要 本文采用两层涡粘性模型和速度剖面的指数律, 导出了可压缩动量矩方程的剪切积分解析表示式, 从而大大简化了边界层计算。和其它理论结果相比, 本结果更接近于实验数据。

关键词 二维可压缩边界层, 积分法, 涡粘性。

引 言

在边界层计算中, 除了卡门动量积分关系式外, 动量矩方程、机械能方程也是重要的附加方程。1968年举行的Stanford湍流讨论会, 对20个积分法作出了评价, 而评出的4个较好的方法中, 前两个是机械能方法, 后两个是动量矩方法^[1]。

求解动量矩方程的关键在于确定其剪切积分项。这方面有Reshotko^[2]和Sasman^[3]的工作, 他们曾给出了经验关系式。而Whitfield^[4~6]则采用机械能方法, 沿边界层法线用数值积分来确定机械能方程的耗散积分项。这样, 求解边界层方程时沿流向每推进一步, 耗散项就得积分一次, 因而具体使用颇为不便。

本文是在文献[2~5]的基础上, 采用两层涡粘性模型和速度剖面的指数律, 导出了动量矩方程的剪切积分解析表示式, 从而为动量矩方法的边界层计算提供了一个实用的剪切积分关系式。

一、动量矩方程及其剪切积分项

1. 动量矩方程

采用边界层坐标系, 引入流函数 Ψ , 使 $\Psi_y = \rho u / \rho_0$, $\Psi_x = -\rho v / \rho_0$, 并进行Stewartson坐标变换^[2]:

$$X = \int_0^x \frac{\rho_c}{\rho_0} \frac{a_c}{a_0} dx, \quad Y = \frac{a_c}{a_0} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy$$

$$U = \partial \Psi / \partial Y, \quad V = -\partial \Psi / \partial X, \quad U = u a_0 / a_c$$

这里, u, v, ρ, p, a 和 τ 分别为边界层切向速度、法向速度、密度、压力、声速和剪应力。而下标 c 和 0 则表示边界层外缘的气流状态和自由流的滞止状态。假定边界层内总焓处处

本文于1991年8月29日收到, 1992年5月6日收到修改稿。

相等,且等于自由流总焓。对边界层动量方程两边乘以 Y ,然后利用上述变换关系式和速度剖面的指数律 $U/U_e=(Y/\Delta)^N$, $N=(H_i-1)/2$,沿物面法线由 $Y=0$ 至 $Y=\Delta$ 积分,则可导出动量矩方程如下^[2]

$$\frac{dH_i}{dX} = -\frac{H_i(H_i-1)(H_i+1)^2}{2U_e} \frac{dU_e}{dX} + \frac{\tau_w(H_i^2-1)}{\rho_0 \frac{p_e}{p_0} \left(\frac{a_e}{a_0}\right)^2 U_e^2 \theta_{i,r}} \left[H_i - (H_i+1) \int_0^1 \frac{\tau}{\tau_w} d\left(\frac{Y}{\Delta}\right) \right] \quad (1)$$

其中 Δ 和 $\theta_{i,r}$ 分别称为变换边界层厚度和变换动量厚度,且有

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{\theta_{i,r} H_i (H_i + 1)}{H_i - 1}, & \theta_{i,r} &= \int_0^\delta \frac{U}{U_e} \left(1 - \frac{U}{U_e}\right) dY = \left(\frac{T_e}{T_0}\right)^\delta \theta \\ H_i &= \frac{1}{\theta_{i,r}} \int_0^\delta \left(1 - \frac{U}{U_e}\right) dY = \int_0^\delta \frac{\rho}{\rho_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy / \int_0^\delta \frac{u\rho}{u_e \rho_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这里 δ 、 δ^* 和 θ 表示边界层的名义厚度、位移厚度和动量厚度。(1)式两边乘以 dX/dx ,经整理可得沿流向坐标 x 的动量矩方程为

$$\frac{dH_i}{dx} = -\frac{H_i(H_i-1)(H_i+1)^2}{2M_e} \frac{dM_e}{dx} + \frac{C_f}{2} \frac{H_i^2-1}{\theta} \left[H_i - (H_i+1) \int_0^1 \frac{\tau}{\tau_w} d\left(\frac{Y}{\Delta}\right) \right] \quad (3)$$

式中 M_e 为边界层外缘气流的马赫数, C_f 为局部摩擦系数。Cook^[6]的边界层测量结果表明,对于跨声速流动

$$H_i \approx \bar{H} = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy / \int_0^\delta \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy = \bar{\delta}^* / \bar{\theta} \quad (4)$$

是个很好的近似,故本文以后用 \bar{H} 代替 H_i 。

2. 剪切积分项 $\int_0^1 (\tau/\tau_w) d(Y/\Delta)$

下面导出剪切积分的解析表示式。 $0 \leq Y/\Delta \leq 0.01$ 的区域为由固壁限制的粘性底层和从粘性底层向湍流区过渡的过渡层。在此区粘性应力和湍流应力之和,即总剪应力 τ 大体为常数值,并等于壁面上的剪应力 τ_w ^[7]。在 $Y/\Delta \geq 0.01$ 的区域忽略粘性应力,剪应力完全由湍流应力组成,即

$$\tau = -\rho \overline{u'v'} = \rho \varepsilon \partial u / \partial y \quad (5)$$

采用两层涡粘性模型^[4]和速度剖面的指数律 $U/U_e=(Y/\Delta)^N$, $N=(\bar{H}-1)/2$,以确定剪应力 τ 。在内区,假定 $\rho \approx \rho_w$, $\partial u / \partial y \geq 0$,则

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{内}} &= (0.41y)^2 \partial u / \partial y = 0.41^2 Y^2 U_e (\rho_0 / \rho_w) \partial(U/U_e) / \partial Y \\ &= 0.41^2 \Delta U_e N (\rho_0 / \rho_w) (Y/\Delta)^{N+1} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)_{\text{内}} = \frac{\rho_w (0.41y)^2}{\tau_w} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0.41^2 N^2 \frac{2}{C_f} \frac{\rho_w}{\rho_e} \left(\frac{Y}{\Delta}\right)^{2N} \quad (7)$$

在外区,因速度剖面的指数律 $U/U_e=(Y/\Delta)^N$ 在边界层外缘处 $\partial(U/U_e)/\partial(Y/\Delta) \neq 0$ 而导致剪切积分的计算值偏大。为简单计,本文仍用速度剖面的指数律,只对外区的涡粘性模型作一修正,以 $\bar{\theta}$ 来代替 $\bar{\delta}^*$ 。其次,在外区假定 $\rho \approx (\rho_w + \rho_e)/2$,并利用关系式

(2)和 $u_c = U_c a_c / a_s$, $u/u_c = U/U_c$, 以及 $f = \theta/\bar{\theta}$, 可得

$$\begin{aligned} \varepsilon_{外} &= 0.0168 u_c \bar{\theta} \\ &= 0.0168 \Delta U_c (T_c/T_c)^{2.5} (\bar{H}-1)/\bar{H}(\bar{H}+1) f \end{aligned} \quad (8)$$

$$\left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)_{外} = 0.0168 \frac{2}{C_f} \left(1 + \frac{\rho_w}{\rho_c}\right)^2 \frac{N(\bar{H}-1)}{4\bar{H}(\bar{H}+1)} f \left(\frac{Y}{\Delta}\right)^{N-1} \quad (9)$$

令 $\eta = Y/\Delta$, 沿边界层剖面将 τ/τ_w 在粘性底层、内层和外层积分, 可得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\tau}{\tau_w} d\eta &= \int_0^{0.01} \left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)_{底} d\eta + \int_{0.01}^{\eta_0} \left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)_{内} d\eta + \int_{\eta_0}^1 \left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)_{外} d\eta \\ &= 0.01 + (\bar{H}-1) \frac{2}{C_f} \left[0.41 \frac{2\rho_w}{\rho_c} \frac{\bar{H}-1}{4\bar{H}} \left(\eta_0^{\bar{H}} - 0.01^{\bar{H}}\right) \right. \\ &\quad \left. + 0.0168 \frac{(1 + \rho_w/\rho_c)^2}{4\bar{H}(\bar{H}+1)} f \left(1 - \eta_0^{\frac{\bar{H}-1}{2}}\right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

并有关系式

$$\begin{aligned} \bar{C}_f &= \bar{C}_f(\bar{R}e_\theta, \bar{H}), & \bar{C}_f/C_f &= F_c \\ Re_\theta &= u_c \theta / \nu_c, & \bar{R}e_\theta &= Re_\theta / F_c \\ f &= f(M_c, \bar{H}), & F_c &= (1 + 0.2M_c^2)^{1/2} \\ \frac{\rho_w}{\rho_c} &\approx \frac{1}{1 + 0.2M_c^2}, & \eta_0 &= \left[\frac{0.2\rho_w/\rho_c}{\bar{H}(\bar{H}+1)} f \right]^{2/(\bar{H}+1)} \end{aligned}$$

式中 η_0 是内区和外区分界点的 Y/Δ 值, 是用 $\varepsilon_{内} = \varepsilon_{外}$ 的条件确定, 而 $f = \theta/\bar{\theta}$ 和 \bar{C}_f 的具体关系式分别见文献[4~5]。本文以 $(\bar{\quad})$ 来表示不可压缩状态。

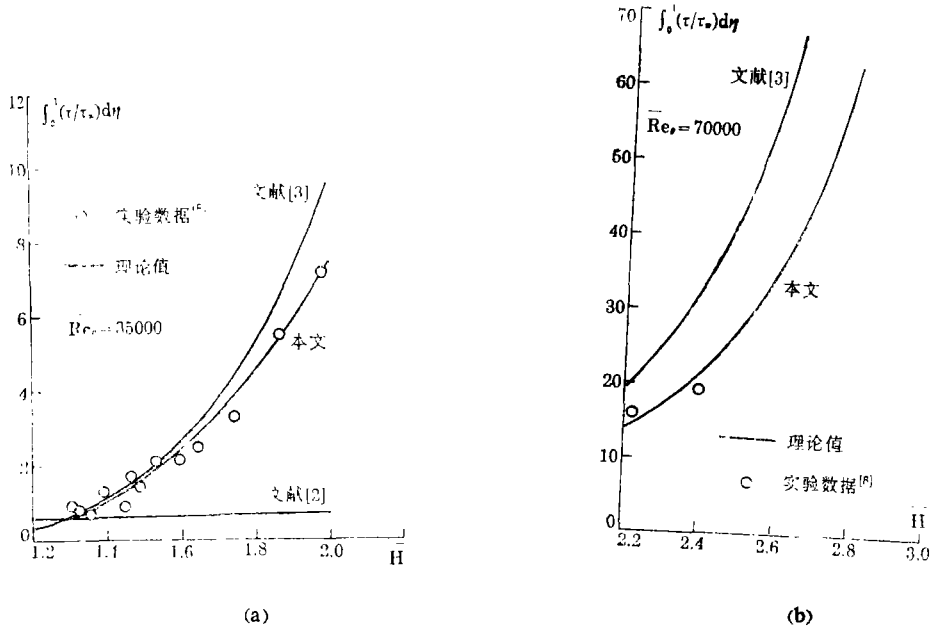


图 1 不可压缩湍流边界层的剪切积分
Fig. 1 Shear stress integral of the incompressible turbulent boundary layers

对于剪切积分, Reshotko^[2]和Sasman^[3]的经验关系式分别是

$$\int_0^1 \frac{\tau}{\tau_w} d\left(\frac{Y}{\Delta}\right) = 1.03 \frac{\bar{H}}{\bar{H}+1} \quad (11)$$

$$\int_0^1 \frac{\tau}{\tau_w} d\left(\frac{Y}{\Delta}\right) = 0.011 \left(\frac{\bar{H}-1}{\bar{H}}\right)^2 \frac{2}{\bar{C}_f} \quad (12)$$

3. 算例

对Schubauer等人^[8]的实验数据作两点说明:(1) 实验数据均取为 $x \geq 17.5$ 英尺的

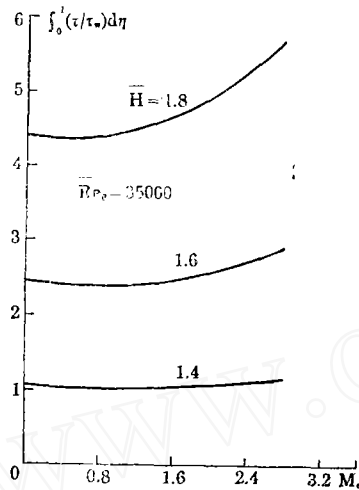


图2 剪切积分随马赫数 M_e 的变化
Fig. 2 Variation of shear stress integral with Mach number M_e .

情形, 以保证流动为完全湍流状态。1.3 $\leq \bar{H} \leq 1.99$ 时, $\bar{R}e_0$ 的变化范围约为20000 ~ 60000, 计算时取为 $\bar{R}e_0 = 35000$; $\bar{H} \geq 2.2$ 时, 则取为 $\bar{R}e_0 = 70000$; (2) 为了便于理论值与实验值作比较, 本文用将边界层各剖面的 $\bar{R}e_0$ 和 \bar{H} 实验值代入Whitfield^[6]的表面摩阻系数表达式所得到的值 \bar{C}_f 来整理了对应剖面的剪应力实验数据。

图1(a)和(b)表明, 本文结果与Sasman的结果在趋势和量级上较一致, 但本文结果更接近于Schubauer的实验数据。而Reshotko的结果未能体现 \bar{C}_f 的影响, 其适用范围很有限, 仅适于 $\bar{H} < 1.5$ 的情形。

图2则给出了本文湍流边界层剪切积分的压缩性效应, 从图中可以看出, 对于某一确定的 \bar{H} 值, 当 $M_e < 1.6$ 时压缩性效应很小, $M_e > 1.6$ 时较为显著。

二、结 论

本文给出的剪切积分关系式在描述流动的湍流特性和压缩性效应方面, 优于Sasman^[3]和Reshotko^[2]的结果, 与实验数据较一致。为以动量积分方程和动量矩方程为主要方程的边界层计算, 提供了一个较为可靠的剪切积分解析表示式。

参 考 文 献

- 1 怀特 F M 著, 魏中磊等译. 粘性流体力学. 北京: 机械工业出版社, 1982. 511~515
- 2 Reshotko E, Tucker M. NACA TN 4154, 1957.
- 3 Sasman P K, Gresci R J. AIAA J., 1966, 4(1):19~25
- 4 Whitfield D L. AEDC-TR-78-42, 1978.
- 5 Whitfield D L et al. AIAA J., 1981, 19(10):1315~1322
- 6 Cook T A. ARC RM 3722, 1973.
- 7 生井武文等著, 伊增欣译. 粘性流体力学. 北京: 海洋出版社, 1984. 188~197
- 8 Schubauer G B, Klebanoff P S. NACA TN 2133, 1950.

An Analytical Expression of Shear Stress Integral for Moment-of-Momentum Equation

He Longde

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract An analytical expression of shear stress integral for moment-of-momentum equation is derived by two-layer eddy viscosity turbulence model and the power law of the velocity profile. Thus the calculation of the compressible turbulent boundary layers is significantly simplified. The analytical expression is in good agreement with experimental data than other theoretical results.

Key words 2-D compressible boundary layer, integral method, eddy viscosity.