泥　沙　研　究
1993年6月　Journal of Sediment Research　第2期

泥沙运动的受力分析
——关于碰撞力的讨论*

刘大有　王光谦　李洪州
（中国科学院力学研究所）

提　要

本文以单颗粒为体系和以固相的拟流体微团为体系分别对泥沙运动进行了受力分析，给出了体系的力平衡方程，并证明了两种方程是相容的．通过对比说明，同一个力采用不同的体系分析时分属于不同类型，例如，流体-颗粒间的作用力在前一体系中属于表面力，在后一种体系中属于彻体力；拟流体分析中的表面力（应力），在单颗粒体系的力平衡中根本不出现等等，由此清楚地表明进行受力分析和建立力平衡方程时明确所研究体系的重要性．

本文还详细分析了对于上述两种体系，颗粒-颗粒碰撞对体系运动所起的作用，以及在运动方程中的体现，并指出：泥沙运动力学中经常使用的"碰撞力"在概念上是含糊的，计算碰撞力的表达式的根据是可疑的．

一、引　　言

从工程角度考虑，人们关心的是泥沙的群体行为，而群体的行为是一个个沙粒的个体行为统计的结果，因此，单个泥沙颗粒的运动分析是研究泥沙群体行为的基础．随着研究的深入，人们越来越觉得对泥沙运动进行力学分析的重要性，这方面的文章也越来越多．但是，关于泥沙在运动过程中的受力分析方面存在着一定的混乱，这些主要是由于在进行受力分析时对于体系取法不明确造成的．在进行受力分析时，首先要明确研究的对象，或者说确定体系．任何一个体系，它的整体运行状态的变化依赖于作用于该体系的各种外力．体系中的内力对体系的整体运动没有任何贡献．

同一个力，对于某一体系来说它是内力，对于另一种体系来说，它可能是外力了．对于力平衡方程中的诸力，都是某一确定的体系的外力，不能在一个力方程中某些力是这种体系（如某个沙粒）的外力，而另一些是那种体系（如某个沙粒群或某个固相微团）的外力．这个道理说起来简单，但真能运用好并非容易．

关于泥沙运动，通常采用以下两种观点进行研究（1）把每个沙粒看作质点或刚体，采用质点运动方程或刚体运动方程进行研究，然后对大量沙粒进行平均，得到泥沙运动的整体性质；（2）把大量沙粒看作是一种拟流体，采用连续介质的研究方法，也就是采用二相流体动力学的方法．当采用第一种观点时，研究的体系是单个沙粒．当采用第二种观点时，可取固相拟流体微团作为研究体系．

*本项研究得到国家自然科学基金资助

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

对于同一个问题，可以采用上述两种观点中的任意一种进行研究．两种研究方法各有优缺点，这由问题性质所决定．在第四节将证明这两种分析方法是等效的．

二、单个沙粒的受力分析

这里主要分析单个悬浮沙粒或作跃移运动沙粒的受力状况，暂时先不考虑沙粒之间的碰撞作用．

力是单位时间内的动量传递．通常我们所说的各种力，都是在某一段时间内连续进行的动量交换，可用每单位时间内交换的动量表征力的大小．

作用在颗粒上的作用力可分为以下几类

1．与流体-颗粒的相对运动无关的力（即使相对运动的速度和加速度为零，此力也不消失）；

2．依赖于流体-颗粒间相对运动的、其方向沿着相对运动方向的力—纵向力；

3．依赖于流体-颗粒间相对运动的、其方向垂直于相对运动方向的力—侧向力；

属于第一类的有惯性力、重力和压差力等；属于第二类的有阻力、附加质量力，Basset力等；属于第三类的有升力、Magnus力和Saffman力等．作用在颗粒上的力平衡方程为

$$\text{惯性力}+\text{附加质量力}+\text{Basset力}+\text{阻力}+\text{升力}+\text{压差力}+\text{重力}+\text{Magnus力}+\text{Saffman力}=0 \quad (1)$$

第一类力中的压差力和所有的第二类、第三类力，都是来自流体的作用力，统称为相间力．而第二类统称为广义相间阻力．

下面将分别讨论这些力的物理意义，并以无界流场中直径为d、密度为ρ_p的单个球形颗粒为例给出它们的计算表达式．（式中ρ_c、μ、ν分别为流体的密度、动力粘性系数和运动粘性系数，g为重力加速度，C_D是阻力系数）

1．惯性力 $=-\dfrac{1}{6}\pi d^3\rho_p\dfrac{du_p}{dt}$ （2）

2．阻力 $=\dfrac{1}{8}\pi C_D d^2\rho_c|u_c-u_p|(u_c-u_p)$ （3）

3．重力 $=\dfrac{1}{6}\pi d^3\rho_p g$ （4）

4．压差力 $=-\dfrac{1}{6}\pi d^3\dfrac{dp}{dx}$ （5）

其中 $\dfrac{dp}{dx}$为压强梯度．若此压强梯度是由流体的重力作用引起的，x轴垂直向上，则$-\dfrac{dp}{dx}=\rho_c g$，与之对应的压差力即为浮力．因此，此力也可称为广义浮力，如果把浮力项单独列出，或与重力项合并（合并后称为水下重力），则压差力表达式中的压强梯度$\dfrac{dp}{dx}$，应扣除重力引起的那部分，否则就会造成重复计算．

5．附加质量力 $=-\dfrac{1}{12}\pi d^3\rho_c\xi$ （6）

其中　相对加速度ξ定义为

$$\xi\equiv\frac{du_p}{dt}-\frac{du_c}{dt} \quad (7)$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

与在真空中的运动情况不同，颗粒以相对加速度$\xi(t)$在流体中作加速运动时，必将带动其周围的部分流体加速．应用理想（无粘性的）流体力学理论可以证明，这种效应等价于颗粒具有一个附加质量．对于球形颗粒，这部分质量等于球体所排开的流体质量之半[2]．

$$6.\ \text{Basset力} = \frac{3}{2}d^2\rho_c\sqrt{\pi\nu}\int_{t_0}^{t}\frac{\xi(t')}{\sqrt{t-t'}}dt' \qquad (8)$$

由于流体中粘性的存在，当颗粒速度变化时，即颗粒有相对加速度时，颗粒周围的流场不能马上达到稳定．因此，流体对颗粒的作用力不仅依赖于当时颗粒的相对速度（阻力部分）；当时的相对加速度（附加质量力），还依赖于在这以前加速度的历史．这部分就叫Basset力[3]，其中t_0是起动时间．

以下讨论侧向力．当计入侧向力后，一般说运动就不可能是一维的．因此，在一维二相流中一般不考虑这些力．这些力有

$$7.\ \text{Magnus力} = \frac{1}{8}\pi d^3\rho_c\omega(u_c-u_p) \qquad (9)$$

$$8.\ \text{Saffman力} = 1.62d^2\sqrt{\rho_c\mu}\,(u_c-u_p)\sqrt{\left|\frac{du_c}{dy}\right|} \qquad (10)$$

$$9.\ \text{升力} = \frac{1}{8}\pi d^2\rho_c C_L(u_c-u_p)^2 \qquad (11)$$

对于球形颗粒，升力系数$C_L=0$．对于非球形颗粒，每个颗粒虽有不为零的升力，但颗粒群中由于各颗粒取向的随机性，这些力互相抵消．因此二相流中通常都不考虑升力．

若颗粒以角速度ω旋转，旋转轴垂直于相对速度（u_c-u_p），则颗粒不仅受到一纵向阻力，还受到一个垂直于（u_c-u_p）及旋转轴的侧向力，其方向与（u_c-u_p）、ω构成右手系．这就是Magnus力[2]．

若流场有速度梯度$\frac{du_c}{dy}$则颗粒将受到一个附加的侧向力，这就是Saffman力[4]．这个力沿着y方向，，其正负号由$(u_c-u_p)\frac{du_c}{dy}$的符号决定．Saffman推导出侧向力公式（10）的条件是：Reynolds数Re很小，球形颗粒处于无界的均匀剪切流场中．在二相流中，需要计入Saffman力的地方往往是在固壁附近，因为只有在那里才有较大的速度梯度．在这种条件下式（10）只能说是定性正确．

下面是关于碰撞力的讨论．

假设颗粒之间的碰撞是刚性的，则碰撞的时间很短，因此在颗粒运动的大部分时间内都不存在碰撞．一般给出的单颗粒的运动方程仅适用于颗粒不经受碰撞的时间区间．

由于碰撞的时间很短，而碰撞过程交换的动量是个有限值，这说明碰撞过程中两个颗粒之间的相互作用力非常大．一般说，两颗粒在一次碰撞过程中交换的动量可以测量，给定碰撞模型以后也能计算．但碰撞持续的时间难以测量，也不好估算，因此碰撞力很难确定．另一方面，人们一般也不关心碰撞过程中力的大小，主要关心碰撞过程中交换的动量．

在碰撞过程中，所有其它持续作用的力都远小于碰撞力，因而都可忽略，也就是

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

说，所有持续作用的力都不会影响碰撞过程的进行.

若颗粒在运动过程中时而发生碰撞，那么分析颗粒运动时，式（1）那样的方程只适用于两次碰撞之间的时间间隔. 整个运动过程被若干次碰撞分隔成几段，分段进行分析，中间又夹着瞬时碰撞过程的分析.

三、作为连续介质的沙粒群的受力分析[1)]

当采用连续介质力学的观点研究大量沙粒的运动时，沙粒群被当作一种充满整个流场的拟流体. 由于同时还有水体存在，因此常采用双流体模型：通过平均也将水体的属性分散到整个流场. 在物理上，对于某一确定的时间，水体与沙粒互不渗透，空间中任意一点不可能同时被水体和沙粒所占. 但在经过数学抽象的双流体模型中，固相和液相各自分别充满整个流场，两个流场互相重叠，空间任意一点同时有固相和液相存在，同时存在两个密度，两个速度矢量……，空间每点都有相间作用力.

流体力学工作者对这种抽象化处理并不陌生. 当人们把气体当作连续介质研究就包含了类似的抽象过程. 在物理上，气体由大量分子组成，对于某一确定的时刻，在被气体充满的空间中，这些分子只占很小一部分，绝大部分空间是空的. 但是作为连续介质研究时，气体是连续地充满整个流场的. 分子的质量密度很高，但与周围许多密度为零的空间平均后就是通常说的气体密度.

在双流体模型中，每一相都可以采用普通流体力学的方法建立该相的流体力学方程组，另一相的存在对该相运动的影响仅表现在每个守恒方程中增加了一个相间作用项，例如在固相的动量方程中增加了另一相给予固相的动量交换率，即相间作用力这一项.

下面分析作为拟流体的固相的力平衡方程.

取一个质量为δm_p，并以当地固相平均速度运动的固相流体微团作为控制体，建立关于它的力平衡方程. 除惯性力$\left(-\delta m_p \dfrac{d_p \vec{v}_p}{dt}\right)$外，作用于体系上的外力有两类：（1）彻体作用力，包括重力（$\vec{g}\delta m_p$）和相间力（$\vec{M}_p\delta V$），其中$\vec{g}$是重力加速度矢量，δV是微团的体积，$\vec{M}_p$是单位体积内的相间作用力；（2）表面力，作用于体系表面各部分的表面力的合力，应用Gauss定理后可表示为$[-\delta V(\nabla\cdot\rho_p)]$，其中（$-\rho_p$）为固相拟流体的应力张量. 所以，作用于固相微团上的力平衡方程为：

$$\delta m_p \frac{d_p \vec{v}_p}{dt} = \delta m_p \vec{g} + \vec{M}_p \delta V - \delta V \nabla\cdot\rho_p \tag{12}$$

其中

$$\frac{d_p}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_p \cdot \nabla \tag{13}$$

$$\delta m_p \equiv \sigma_p \delta V \tag{14}$$

∇是Hamilton算符，σ_p是固相的分密度. 若ρ_p是固相的相密度（即材料密度），而α_p是固相在微团内所占的体积分数，则

$$\sigma_p = \alpha_p \rho_p \tag{15}$$

相间力$\vec{M}_p$由以下几部分组成：

$$\vec{M}_p = \text{压差力} + \text{阻力} + \text{附加质量力} + \text{Basset力}$$

1)这里采用的是颗粒群模型的分析方法. 当采用其它模型时，力的分析与此略有不同[5-7]

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$+\text{Magnus力}+\text{Saffman力} \tag{16}$$

而压差力部分可表示为

$$\text{压差力}=-\alpha_p\nabla p \tag{17}$$

其中 p 是流体相的相压强，通常等于混合物的压强.

在物理上分析，液、固之间的作用力都是作用在固体表面（相界面）上的，分析单个沙粒受力时，这些力都是表面力，因为这时的控制体表面就是相界面；在拟流体分析中，这些力是作用在体系内的，属于彻体力．拟流体分析中的表面力是作用在控制体表面上的，即前述的（$-\nabla\cdot\overleftrightarrow{\rho}_p$）.

应力张量（$-\overleftrightarrow{\rho}_p$）常被分解为球对称的静压强部分（$-p_p\overleftrightarrow{U}$）和粘性应力张量$\tau_p$.

$$-\overleftrightarrow{\rho}_p=-p_p\overleftrightarrow{U}+\tau_p \tag{18}$$

其中 $\overleftrightarrow{U}$是单位张量．应力张量$\overleftrightarrow{\rho}_p$起源于沙粒的无规则运动．当沙粒的无规则运动可忽略不计时

$$\overleftrightarrow{\rho}_p\approx 0 \tag{19}$$

在拟流体的分析中也不应引入碰撞力．诚然，沙粒之间可能经常发生碰撞，如果两个互相碰撞的沙粒都在体系内，则这种作用力是体系的内力，不影响体系的力平衡关系；如果这两个粒沙都在体系外，则对体系更不会有影响；如果这两个沙粒分别属于体系和外界（因而碰撞发生在控制面附近），则这种碰撞会影响体系运动，这是一种外力，属于表面力，是（$\nabla\cdot\overleftrightarrow{\rho}_p$）的组成部分——碰撞应力.

在这一点上又可同气体情况作对比．虽然气体分子之间的碰撞非常频繁（$\sim10^{10}$/cm$^3\cdot$s），但在研究气体运动的方程中人们从不引入什么碰撞力等概念.

四、两种力平衡分析法的差异和联系

为简单起见假设运动是一维的.

设所有的沙粒都是粒径为d和质量为M_p的小球，在一个质量为δm_p（$\delta m_p\gg M_p$）的流体微团中共有N个沙粒；$N=\delta m_p/M_p$．对于这N个沙粒中的每一个都满足式（1），对N个类似的式（1）求和就得到描述这N个沙粒的粒子系的运动方程

$$\sum_{\alpha=1}^{N}(M_p)_\alpha\frac{d(u_p)_\alpha}{dt}=N\text{个沙粒的总阻力}+N\text{个沙粒的总重力}+\frac{1}{6}\pi d^3N\frac{\partial p}{\partial x}+F \tag{20}$$

其中 F是N个沙粒的附加质量力、Basset力、Magnus力和Saffman力的总和．因为

$$\sum_{\alpha=1}^{N}(M_p)_\alpha\frac{d(u_p)_\alpha}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{N}(M_pu_p)_\alpha=\frac{d}{dt}(\delta m_p\bar{u}_p)=\delta m_p\frac{d_p\bar{u}_p}{dt} \tag{21}$$

$$\frac{1}{6}\pi d^3N=\alpha_p\delta V \tag{22}$$

$$N\text{个沙粒的总重力}=\vec{g}\cdot\vec{n}_x\delta m_p \tag{23}$$

其中 $\bar{u}_p$是N个沙粒的平均速度，它相当于拟流体分析中固相微团的平均速度u_p；上式中的$\frac{d}{dt}$是随颗粒一起运动的坐标系中观察到的随时间的变化率，它相当于拟流体分析中的$\frac{d_p}{dt}$；$\frac{1}{6}\pi d^3N$是N个沙粒的总体积，它在体积为δV的流体微团中占有份额α_p，$\vec{n}_x$是

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

x方向的单位矢量. 因此，利用式(21)和(22)可将式(20)改写为

$$\delta m_p \frac{d_p \bar{u}_p}{dt} = \left(-\alpha_p \delta V \frac{\partial p}{\partial x} + N\text{个沙粒的总阻力} + F \right) + \vec{g} \cdot \vec{n}_x \delta m_p \tag{24}$$

因为

$$\vec{M}_p \cdot \vec{n}_x \delta V = -\alpha_p \delta V \frac{\partial p}{\partial x} + N\text{个沙粒的总阻力} + F \tag{25}$$

所以，式(16)和(17)代入式(12)后得到的方程同式(24)相比右边多了一项$(-\delta V \nabla \cdot \vec{\vec{P}}_p)$. 下面来分析一下产生这种差异的原因.

式(12)描写的是一个质量为δm_p的固相流体微团的运动，由于颗粒的无规则运动，微团内的颗粒经常地同外界发生交换，所以，虽然在运动过程中这个微团的质量(δm_p)和颗粒数(N)始终不变，但不是原来的N个沙粒了. 这种微团内外的颗粒交换，同时也伴随着动量交换，$(-\delta V \nabla \cdot \vec{\vec{P}}_p)$反映的正是这动量交换的净效果. 而式(24)描写的是固定不变的N个沙粒的粒子系的运动，这个粒子系不与外界发生质量交换，因此没有像$(-\delta V \nabla \cdot \vec{\vec{P}}_p)$那样的项.

如果颗粒没有无规则运动，那么拟流体的固相微团包含的也是固定不变的N个颗粒，与式(24)描写的体系一样，这时式(12)与(24)的差异应该消失，而式(19)也正说明颗粒没有无规则运动时$\vec{\vec{P}}_p \approx 0$.

五、结　　论

1.分析泥沙运动时首先要确立控制体（研究的体系），然后才能明确有哪些力作用在这体系上，是内力还是外力等，并据此建立该体系的力平衡方程;

2.若以某个沙粒作为体系时，它的力平衡方程式是式(1)，它描写两次碰撞之间该沙粒运动状态的变化规律，这里不存在任何碰撞力;

3.由于碰撞过程持续的时间很短，碰撞力很大，所以分析碰撞过程时可以忽略任何其它力，碰撞沙粒在碰撞前后的速度变化完全由碰撞动力学确定;

4.把沙粒群作为拟流体处理时，可取质量为δm_p的固相流体微团作为控制体，关于它的力平衡方程是式(12);

5.分析某个沙粒运动时，该沙粒的表面就是控制体边界——控制面，发生在这里的相间力是一种外力，属于表面力，压差力（广义浮力）是其中的一部分；当以固相微团作为控制体时，压差力和其它相间力都属于彻体力，这时的表面力是作用在微团控制面S上的应力：$\oint_S -n \cdot \vec{\vec{P}}_p dS = \int_{\delta V} -\nabla \cdot \vec{\vec{P}}_p dV \approx -\delta V \nabla \cdot \vec{\vec{P}}_p$，固相静压梯度$(-\delta V \nabla \cdot \vec{\vec{P}}_p)$是其中的一部分;

6.应力张量$(-\vec{\vec{P}}_p)$完全是由沙粒无规则运动引起的，若沙粒的无规则运动可忽略不计，则此应力张量为零（见式(19)）;

7.包含N个沙粒的固相流体微团，由于在运动过程中经常同外界发生交换，因此在力平衡方程中有$(\nabla \cdot \vec{\vec{P}}_p)$这一项；而由确定的$N$个沙粒组成的粒子系，因为没有同外界交换粒子，所以没有应力项$(-\nabla \cdot \vec{\vec{P}}_p)$(见式(24))；当沙粒没有无规则运动时，这两种体系的差异消失了，同时$\vec{\vec{P}}_p$也变为零了，所以拟流体微团的力平衡方程(12)与粒子系的力平衡方程始终是相容的，也同单颗粒运动方程(1)相容;

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

8.在拟流体的力平衡方程中也不存任何碰撞力项：在微团控制面附近发生的碰撞，会影响体系的运动，但这种碰撞效应已包含在应力张量（$-\vec{\vec{P}}_p$）中了；若需要将这部分应力（张量）独立出来，则可称之为碰撞应力（张量），但不宜称为碰撞力，因为它是一种面作用力，是应力，在力平衡方程中它总是与Hamilton算符Δ连用.

参 考 文 献

[1] 谷一郎，粘性流体理论.上海科学技术出版社，1962（刘亦珩译）.

[2] L.普朗特，K.奥斯瓦提奇，K.维洛哈特，流体力学概论.科学出版社，北京，1981（郭永怀，陆士嘉译）.

[3] Basset, A. B., Hydrodynamics, vol.2, Dover, New York, 285—292, 1961.

[4] Saffman, P. G., The lift on a small sphere in a slow shear flow, J. *Fluid of Mech*., 22, 385—400(1965).

[5] 刘大有，王柏懿，推导悬浮体二相流基本方程的一种新方法，力学学报，24，1（1992）.

[6] Liu Dayou & Zhu Fuying, Discussion on the basic equations for gas-particle flows in various models, Proc. Int. Conf. on Fluid Mech.（1987, Beijing）, Peking University Press, Beijing, China.

[7] 刘大有等，二相流体动力，高等教育出版社，北京，1993.

Force Analyses of Sediment Transport
—a Discussion on the "Collision Force"

Liu Dayou Wang Guangqian Li Hongzhou

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences)

Abstract

Taking a single particle as a system or a pseudo-fluid element of solid phase as a system in research of sediment transport, force analyses, and as a result, force equilibrium equations are presented. It is shown that the two types of equations are compatible. A certain force would classify to different types in different systems. For example, fluid-particle force is a surface force in single particle analysis, but a body force in pseudo-fluid element analysis, however, the surface force (tensor) of the pseudo-fluid model is not present in the force equilibrium equation of single particle model. Therefore, what system is adopted is so important in force analysing that we must remember clearly.

The effects of the particle-particle collisions on the system movement and the roles in the force equations are also explained in each system mentioned above, and it is point out that the "collision force" applied often in studying sediment transport is ambiguous in conception, and the expression computing is doubtful.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net