第23卷 第1期 力学进展 Vol.23 No.1
1993年2月25日 ADVANCES IN MECHANICS Feb. 25, 1993

固体-流体混合物连续介质理论及其在工程上的应用

章根德
中国科学院力学研究所，北京（邮政编码100080）

提要 本文介绍了混合物连续介质的理论，并列举了固体-流体混合物连续介质理论在某些工程方面的应用.

关键词 混合物；地质材料；连续介质理论

1 引言

在我国国民经济的迅速发展中，石油和天然气的开采，地热的开发，核防护和核废物隔离，海底隧道及大型地下建筑物修建等等，都需要力学与地学各分支的相互结合与渗透，需要发展包括非弹性变形、破坏和破坏后行为的材料本构理论，以及土体液化、渗流、热效应等学科理论；不仅需要已有的力学理论，例如流变学、塑性力学、混合物连续介质理论的配合，还要发展新的思想和方法.

地质材料，不论是土还是岩石，在微观结构上都具有晶粒结构、孔隙、微裂纹等特征，并且在孔隙或微裂纹中往往含有流体或气体，所以地质材料的力学问题往往是液体-固体两相混合物或气体-液体-固体三相混合物的连续介质力学问题．发展混合物的连续介质理论与应用，对于推动地学中各分支学科的发展和解决实际工程问题都将具有十分重大的意义.

1925年Terzaghi提出了1维土固结理论．之后，Biot[1,2]给出了描述充满流体的孔隙弹性固体的力学性质的3维理论，并应用这个理论研究了具有表面载荷的土的固结问题和地震产生的体波在地质材料中的传播.

60年代开始用连续介质力学的观点来研究固体-流体混合物的问题．Adkins[3]给出了流体渗流通过各向异性弹性固体的本构理论．考虑到重力的影响和对称性的要求，理论中所提到的横观各向同性的情况特别令人感兴趣，因为它能广泛应用于土、岩介质的渗流问题．Green和Steel[4]导出了描述充满牛顿流体的非线性弹性固体的本构方程．Atkin[5]提出了关于充满非牛顿流体的非线性弹性固体的本构理论．Bowen[6]发展了含有气体的孔隙弹性固体-流体混合物的本构理论．Bedford和Ingram[7]使用Eringen和Ingram[8]的结果发展了充满导热可压缩流体的导热弹性固体混合物的本构理论，混合物的各相具有各不相同的温度，热量可以在固体与流体之间相互传递，

2 混合物连续介质力学基本理论

混合物的每一相在化学性质上是惰性的，各相具有相同的温度．于是，两相混合物可以看作两相连续介质的叠加，而每相都有它独自的运动．在任何时间 t，混合物的空间 $\mathbf{x}$ 同时充满了两种不同的物质微团 $\mathbf{X}^{(1)},\mathbf{X}^{(2)}$．这样，物体的运动可以表示为

$$\mathbf{x}=\Phi^{(\alpha)}(\mathbf{X}^{(\alpha)},t) \tag{1}$$

这里 α 表示第 α 相的组成部分，并假设 $\Phi^{(\alpha)}$ 是足够光滑的函数．相应地，每相的速度场用物质（或 Lagrange）描述可表示为

$$\mathbf{v}^{(\alpha)}=\partial\Phi^{(\alpha)}/\partial t \tag{2}$$

运动的空间（或 Euler）描述可写成

$$\mathbf{v}^{(\alpha)}=\mathbf{v}^{(\bar{\alpha})}(\mathbf{x},t) \tag{3}$$

2.1 *守恒方程* 下面叙述质量守恒、线动量守恒、角动量守恒和能量守恒方程．这里仅给出各个守恒定律的微分表达式．

质量守恒 由于我们上面假设了混合物是化学惰性的，因此每一相的质量是守恒的，质量守恒方程可写成

$$\frac{D^{(1)}\rho_1}{Dt}+\rho_1\mathrm{div}\ \mathbf{v}^{(1)}=0,\ \frac{D^{(2)}\rho_2}{Dt}+\rho_2\ \mathrm{div}\ \mathbf{v}^{(2)}=0 \tag{4}$$

这里，密度 ρ_1,ρ_2 分别表示每一相的平均密度．混合物的密度 ρ 可表示为

$$\rho=\rho_1+\rho_2 \tag{5}$$

$D^{(\alpha)}/Dt$ 表示物质时间微分．如果 $\phi(x,t)$ 是一个标量或矢量值函数，则有

$$\frac{D^{(\alpha)}\phi}{Dt}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+v_p^{(\alpha)}\frac{\partial\phi}{\partial x_p} \tag{6}$$

当方程（4）成立时，混合物的质量守恒方程就自动成立．

动量守恒 作用于每相组成部分上的体力，例如重力，用矢量 $\mathbf{F}^{(\alpha)}$ 表示．表面力用偏应力张量 $\sigma^{(\alpha)}$ 表示．各相相对运动的相互作用影响，即内力由 π 即弥散力矢量来表示．动量守恒方程可写成

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{div}\ \sigma^{(1)}-\pi+\rho_1\mathbf{F}^{(1)}&=\rho_1\frac{D^{(1)}\mathbf{v}^{(1)}}{Dt}\\ \mathrm{div}\ \sigma^{(2)}+\pi+\rho_2\mathbf{F}^{(2)}&=\rho_2\frac{D^{(2)}\mathbf{v}^{(2)}}{Dt}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

考虑到这些方程中每一个左边第二项的性质，混合物的线动量守恒自然也满足．

从角动量守恒可得出，偏应力具有非零反对称部分．而混合物的角动量守恒意味着总应力必须是对称的．总应力可表示为

$$\sigma=\sigma^{(1)}+\sigma^{(2)} \tag{8}$$

但另一些研究者则喜欢总应力的另一种定义．进一步讨论可参见[9]．

能量守恒 对于每相都具有相同温度 T 的混合物，用 A_α 表示 Helmholtz 自由能，用 S_α 表示熵，能量守恒方程可写成

$$\begin{aligned}&\rho_1\left(\frac{D^{(1)}A_1}{Dt}+S_1\frac{D^{(1)}T}{Dt}+T\frac{D^{(1)}S_1}{Dt}\right)+\rho_2\left(\frac{D^{(2)}A_2}{Dt}+S_2\frac{D^{(2)}T}{Dt}+T\frac{D^{(2)}S_2}{Dt}\right)\\&=\rho r-\mathrm{div}\ \mathbf{q}+\pi\cdot\mathbf{a}+\mathrm{tr}(\sigma_s^{(1)}\cdot\mathbf{d}^{(1)}+\sigma_s^{(2)}\cdot\mathbf{d}^{(2)}-\sigma_a\cdot\Gamma)\end{aligned} \tag{9}$$

这里 r 和 $\mathbf{q}$ 分别表示混合物的单位质量的热供给和热流．而

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{a}=\mathbf{v}^{(1)}-\mathbf{v}^{(2)},\mathbf{L}^{(\alpha)}=\operatorname{grad}\mathbf{v}^{(\alpha)},\mathbf{d}^{(\alpha)}=(1/2)(\mathbf{L}^{(\alpha)}+\mathbf{L}^{(\alpha)T})\\&\mathbf{\Gamma}=(1/2)\{(\mathbf{L}^{(1)}-\mathbf{L}^{(1)T})-(\mathbf{L}^{(2)}-\mathbf{L}^{(2)T})\}\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

方程（4），（7）和（9）组成了两相化学惰性材料混合物的基本场方程．

直到现在为止我们还没有对混合物的材料本构特征作任何假设．材料的本构关系是基于实验并抽象化了的物质性质的数学描述．每一种本构方程定义一种理想物质的数学模型．材料的本构方程不能随意给出．对于服从经典力学规律的连续介质，存在着一定的限制，即服从本构理论的公理体系．换句话说，物质的本构特征是通过本构变量来体现的，在选择本构变量以及在列出本构方程时，必须满足一定的物理和数学要求．

当前应用比较广泛的有两种体系：Eringen的 8 公理体系和 Noll 的 3 公理体系．前者所包括的物理现象相当广泛，后者则是本构理论公理体系中的核心部分——确定性公理、局部化公理与客观性公理．其详细叙述可参见[10—12]．

在这里，对混合物材料的本构特性的数学模拟是通过对变量 $A_\alpha,S_\alpha,\boldsymbol{\pi},\mathbf{q}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)}$ 作某种本构假设来实现的．例如，客观性公理要求量 $A_\alpha,S_\alpha,\boldsymbol{\pi},\mathbf{q}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)}$ 对于空间参考标架的任意刚体运动以及时间的漂移必须为客观性量．另外还有附加的不变性限制，例如关于材料的对称性限制．与混合物理论相关的材料对称性的讨论在 Cross[13] 和 Bowen[8] 的文章中找到．最后的限制基于热力学考虑得到．例如上述量满足熵增不等式

$$-\rho_1\frac{D^{(1)}A_1}{Dt}-\rho_2\frac{D^{(2)}A_2}{Dt}-\rho_1S_1\frac{D^{(1)}T}{Dt}-\rho_2S_2\frac{D^{(2)}T}{Dt}+\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{a}+\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}'^{(1)}_s\cdot\mathbf{d}^{(1)}+\boldsymbol{\sigma}'^{(2)}_s\cdot\mathbf{d}^{(2)}$$

$$-\boldsymbol{\sigma}'^{(1)}_a\cdot\mathbf{\Gamma})-\mathbf{q}\cdot\mathbf{g}/T\geqslant0\tag{11}$$

式中，

$$\mathbf{g}=\operatorname{grad}T\tag{12}$$

所采用的观点是假设混合物中的一切热力学过程都满足不等式(11)．它是由 Eringen 和 Ingram[8] 最早应用于混合物理论的．

混合物连续介质力学里最重要的部分是关于弹性固体-粘性流体混合物，它在地学中获得了越来越广泛的应用．下面分别介绍非线性本构理论，简单的非线性理论和线性理论．

2.2 非线性本构理论　为了建立弹性固体-粘性流体混合物的本构理论需要建立

$$A_\alpha,S_\alpha,\boldsymbol{\pi},\mathbf{q},\boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)}\tag{13}$$

诸量的本构方程．在这里，弹性固体和粘性流体分别看作单相体．（13）中的量是

$$\rho_2,T,\mathbf{a},\mathbf{g},\xi^{(2)},\mathbf{F}^{(1)},\mathbf{L}^{(2)},\mathbf{G}^{(1)}\tag{14}$$

的函数，这里，

$$\mathbf{F}^{(1)}=\operatorname{grad}^{(1)}\mathbf{x},\quad\mathbf{G}^{(1)}=\operatorname{grad}^{(1)}\mathbf{F}^{(1)}\tag{15}$$

某些研究者，如Adkins[3]，Crochet & Naghdi[14]，Atkin[6] 等还考虑了一些其他的变量，例如描述固体粘性的梯度．但我们的注意力主要集中于孔隙介质，主要考虑固体相的弹性与流体相的粘性．

熵增不等式中的那些量可写成[16]

$$A=A(\rho_2,T,\xi^{(2)},\mathbf{F}^{(1)}),\quad S=-\partial A/\partial T\tag{16}$$

$$\mathbf{a}\odot\frac{\partial A_1}{\partial\mathbf{g}}+\frac{\partial A_1}{\partial\mathbf{g}}\odot\mathbf{a}=0,\quad\mathbf{a}\odot\frac{\partial A_1}{\partial\xi^{(2)}}+\frac{\partial A_1}{\partial\xi^{(2)}}\odot\mathbf{a}=0\tag{17}$$

$$\sigma^{(\alpha)}=\rho^{(1)}\frac{\partial A_1}{\partial \mathbf{F}^{(\alpha)}}\mathbf{F}^{(\alpha)T}+\rho^{(2)}\frac{\partial A_2}{\partial \mathbf{F}^{(\alpha)}}\mathbf{F}^{(\alpha)T}+\rho_\alpha\frac{\partial A_\alpha}{\partial \mathbf{a}}\otimes\mathbf{a}\quad(\alpha=1)\tag{18}$$

$$\rho\rho_2\frac{\partial A}{\partial \xi_k^{(2)}}\delta_{ij}+\rho\rho_2\frac{\partial A}{\partial \xi_j^{(2)}}\delta_{ik}-\rho_1 a_k\frac{\partial A_1}{\partial L_{ij}^{(2)}}-\rho_1 a_j\frac{\partial A_1}{\partial L_{ik}^{(2)}}=0\tag{19}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial G_{ijk}^{(\alpha)}}\frac{\partial X_l^{(\alpha)}}{\partial x_p}+\text{交换 } j,k \text{ 和 } l \text{ 所得到相似的 5 项}=0\quad(\alpha=1)\tag{20}$$

Dunwoody[16]也讨论了混合物问题．在定义了

$$\mathbf{N}=(\rho_1\rho_2/2\rho^2T)\{2\rho(A_2-A_1)+(\rho_1-\rho_2)\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\}\mathbf{a}\tag{21}$$

之后，如果用N代替K，则(17)—(20)就等价于[16]中的 Dunwoody 方程(5.12)—(5.15)和方程(5.22)．所以用他的结果能进一步简化本构理论．N不依赖于变量$\xi^{(2)}$,g,$\mathbf{L}^{(2)}$和$\mathbf{G}^{(2)}$，A也不依赖于这些变量，结果A可写成

$$A_\alpha=A_\alpha(\rho_2,T,\mathbf{a},\mathbf{F}^{(1)})\tag{22}$$

并且剩下的不等式变成

$$\mathrm{tr}\left\{\left(\sigma^{(2)}+P_2\mathbf{I}-\rho_2\frac{\partial A_2}{\partial \mathbf{a}}\otimes\mathbf{a}\right)\cdot\mathbf{L}^{(2)T}\right\}+(\pi+\mathbf{s})\cdot\mathbf{a}-\left\{\rho_1\left(S_1+\frac{\partial A_1}{\partial T}\right)\mathbf{a}+\frac{\mathbf{q}}{T}\right\}\cdot\mathbf{g}\geqslant 0\tag{23}$$

式中，P_2为

$$P_2=\rho_1\rho_2\frac{\partial A_1}{\partial \rho_2}+\rho_2^2\frac{\partial A_2}{\partial \rho_2}\tag{24}$$

s 定义成分量形式为

$$s_i=\rho_2\frac{\partial X_l^{(1)}}{\partial x_i}\frac{\partial A_2}{\partial F_{jk}^{(1)}}G_{jkl}^{(1)}-\rho_1\frac{\partial A_1}{\partial \rho_2}\xi_i^{(2)}\tag{25}$$

如果流体无粘性，就能在（14）中略去变量$\mathbf{L}^{(2)}$,$\mathbf{L}^{(2)}$可任意选择，从（23）可得到

$$\sigma^{(2)}=-P_2\mathbf{I}+\rho_2\frac{\partial A_2}{\partial \mathbf{a}}\otimes\mathbf{a}\tag{26}$$

这样，无粘性流体渗漏通过弹性固体时，$\sigma^{(\alpha)}$由（18）和（26）给出．

2.3 简化的非线性理论　在下述两种情况下，可以对上面的理论进一步简化．

① 当忽略流体的密度梯度和固体的二阶变形梯度时，有

$$A_1=A_1(T,\mathbf{F}^{(1)}),\quad A_2=A_2(\rho_2,T)\tag{27}$$

此外，我们考虑等温情况并假设$\sigma^{(2)}$不依赖于$\mathbf{F}^{(1)}$并且π不依赖于$\mathbf{L}^{(2)}$，对于非牛顿流体和具有对称中心各向同性弹性体，有

$$\left.\begin{aligned}&A_1=A_1(\mathrm{I}_B,\mathrm{II}_B,\mathrm{III}_B),\quad A_2=A_2(\rho_2)\\&\pi=(\Phi_1\mathbf{I}-\Phi_2\mathbf{B}+\Phi_3\mathbf{B}^2)\mathbf{a}\\&\sigma^{(1)}=\phi_1\mathbf{I}+\phi_2\mathbf{B}+\phi_3\mathbf{B}^2\\&\sigma^{(2)}=\left(-\rho_2^2\frac{dA_2}{d\rho_2}+\chi_1\right)\mathbf{I}+\chi_2\mathbf{d}^{(2)}+\chi_3(\mathbf{d}^{(2)})^2\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

这里，

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{B}=\mathbf{F}\mathbf{F}^T,\ \mathrm{I}_B=\mathrm{tr}\mathbf{B},\ \mathrm{II}_B=\frac{1}{2}\{(\mathrm{tr}\mathbf{B})^2-\mathrm{tr}\mathbf{B}^2\},\ \mathrm{III}_B=\det\mathbf{B}\\&\phi_1=2\sqrt{\mathrm{III}_B}\frac{\partial A_1}{\partial\mathrm{III}_B},\ \phi_2=\frac{2}{\sqrt{\mathrm{III}_B}}\left(\frac{\partial A_1}{\partial\mathrm{I}_B}+\mathrm{I}_B\frac{\partial A_1}{\partial\mathrm{II}_B}\right),\ \phi_3=-\frac{2}{\sqrt{\mathrm{III}_B}}\frac{\partial A_1}{\partial\mathrm{II}_B}\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

上面的 χ_i 是不变量 $\mathbf{d}^{(2)}$ 和 ρ_2 的函数并且 $(\chi_1)_{\mathbf{d}^{(2)}=0}=0$，$\Phi_i$ 是 $\mathrm{I}_B,\mathrm{II}_B,\mathrm{III}_B$ 和 ρ_2 的函数．对于仅是力学理论问题的情况，关于热流 $\mathbf{q}$ 的本构方程就自动消失．

② 水通过孔隙流体时的渗流．这意味着流体是牛顿流体，本构变量线性地依赖于 $\mathbf{L}^{(2)}$．对于相对速度比较小时，只考虑线性地依赖于 $\mathbf{a}$．因此，

$$A_a=A_a(\rho_2,T,\mathbf{F}^{(1)})\tag{30}$$

并且，不等式（23）变成

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{(2)e}\mathbf{L}^{(2)})^T+\boldsymbol{\pi}^e\cdot\mathbf{a}-\left\{\rho_1\left(S_1+\frac{\partial A_1}{\partial T}\right)\mathbf{a}+\frac{\mathbf{q}^e}{T}\right\}\mathbf{g}\geqslant 0\tag{31}$$

这里上标 e 表示非平衡值．

将本构方程代入（7）和（9），最后可得

$$\mathbf{C}^{(1)}:\ \mathrm{grad}\mathbf{F}^{(1)}+\mathbf{D}\xi^{(2)}+\mathbf{E}^{(1)}\mathbf{g}-\boldsymbol{\pi}^e+\rho_1\mathbf{F}^{(1)}=\rho_1\frac{D^{(1)}\mathbf{v}^{(1)}}{Dt}\tag{32}$$

$$\mathbf{H}:\ \mathrm{grad}\mathbf{F}^{(1)}+K\xi^{(2)}+J\mathbf{g}+\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}^{(2)e}+\boldsymbol{\pi}^e+\rho_2\mathbf{F}^{(2)}=\rho_2\frac{D^{(2)}\mathbf{v}^{(2)}}{Dt}\tag{33}$$

$$T\left(\rho_1\frac{D^{(1)}S_1}{Dt}+\rho_2\frac{D^{(2)}S_2}{Dt}\right)-\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{(2)e}\mathbf{L}^{(2)T})-\{\boldsymbol{\pi}^e+(J-M)\mathbf{g}\}\cdot\mathbf{a}+\mathrm{div}\mathbf{q}^e-\rho r=0\tag{34}$$

这里，

$$\mathbf{D}=\frac{\partial^2(\rho A)}{\partial\rho_2\partial\mathbf{F}^{(1)}}\mathbf{F}^{(1)T},\quad \mathbf{E}^{(a)}=\frac{\partial^2(\rho A)}{\partial T\partial\mathbf{F}^{(a)}}\mathbf{F}^{(a)T}+\rho_a\frac{\partial A_a}{\partial T}\mathbf{I}\tag{35}$$

$$\mathbf{H}=-\rho_2\frac{\partial^2(\rho A)}{\partial\rho_2\partial\mathbf{F}^{(1)}},\quad K=-\rho_2\frac{\partial^2(\rho A)}{\partial\rho_2^2},\quad J=-\rho_2\frac{\partial^2(\rho A)}{\partial T\partial\rho_2}+\rho_2\frac{\partial A_2}{\partial T}\tag{36}$$

$$M=-\rho_2\frac{\partial^2(\rho A)}{\partial T\partial\rho_2}-\rho_2 S_2\tag{37}$$

$$C^{(a)}_{ijkl}=F^{(a)}_{ip}\frac{\partial^2(\rho A)}{\partial F^{(a)}_{jp}\partial F^{(a)}_{jk}}+\delta_{il}\frac{\partial(\rho A)}{\partial F^{(a)}_{jk}}+\delta_{jl}\frac{\partial(\rho A)}{\partial F^{(a)}_{ik}}\tag{38}$$

这种情况已为 Green 和 Steel [4] 考虑过．由于他们的本构推导在某些方面和这里所采用的不同，所以比较这两种理论所导出的结果是十分有趣的．详细考察表明，即使上面的理论中的 $\boldsymbol{\pi},\mathbf{q}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 的非平静部分与 Green 和 Steel 提出的采用相同的形式，$\boldsymbol{\sigma}^a$ 的最后形式和耗散力也是不同的．因此，总应力保持不变，仅采用代数运算就能看出，将 Green 和 Steel 的本构方程代入（7）和（9）就能得到与(32)—(35)相同的方程，只是 J,M 和 $\mathbf{E}^{(1)}$ 的系数需要修正．因此，倘若问题的边界条件只包含总应力而不是偏应力的话，则建立在Green和Steel的本构方程基础上的力学理论和上面推出的方程是相同的．

2.4 线性理论　为了对上述理论进行线性化，需要假设：混合物存在一平衡态，在平衡态下相密度 ρ_a 和温度 T 都有均匀值，分别为 $\bar{\rho}_1,\bar{\rho}_2$ 和 $\bar{T}$．混合物受扰动后，固相材料点离开

衡位置的运动是很小的，并且流相的速度也很小．在整个运动过程中，位移与速度的空间与时间的导数也很小．这样，π, q 和 $\sigma^{(2)}$ 的非平衡部分的线性化形式是

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}^{e}&=\alpha\,\mathbf{a}+\beta\operatorname{grad}\theta\\ \mathbf{q}^{e}&=-K\operatorname{grad}\theta-K'\mathbf{a}\\ \boldsymbol{\sigma}^{(2)e}&=\lambda(\operatorname{tr}\mathbf{d}^{(2)})\mathbf{I}+2\mu\mathbf{d}^{(2)}\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

这里，$\theta=T-\bar{T}$，而 $\alpha,\beta,K,K',\lambda,\mu$ 是常数并满足不等式

$$\mu\geqslant0,\ \lambda+\frac{2}{3}\mu\geqslant0,\ \ \alpha\geqslant0,\ \ K\geqslant0,\ \ \frac{4\alpha K}{\bar{T}}\geqslant\left(\beta+\frac{K}{\bar{T}}-\gamma\right)^{2}\tag{40}$$

$$\gamma=\bar{\rho}_1(\bar{S}_1+\overline{\partial A_1/\partial T})\tag{41}$$

对于固体是初始各向同性的情况，混合物的自由能采取下列形式

$$\begin{aligned}\bar{\rho}A=&\rho\bar{A}+\alpha_1\operatorname{tr}\mathbf{e}+\alpha_2(\rho_2-\bar{\rho}_2)+\alpha_3\theta+\frac{1}{2}\alpha_4(\operatorname{tr}\mathbf{e})^2+\alpha_4(\operatorname{tr}\mathbf{e}^2)\\&+\frac{1}{2}\alpha_6(\rho_2-\bar{\rho}_2)^2+\frac{1}{2}\alpha_7\theta^2+\alpha_8(\rho_2-\bar{\rho}_2)\operatorname{tr}\mathbf{e}+\alpha_9\theta\operatorname{tr}\mathbf{e}+\alpha_{10}\theta(\rho_2-\bar{\rho}_2)\end{aligned}\tag{42}$$

这里，$\alpha_i\,(i=1,\cdots,10)$ 是常数，用固体的位移矢量 $\mathbf{w}^{(1)}$ 来表示 e，则有

$$\mathbf{e}=\frac{1}{2}\{\operatorname{grad}\mathbf{w}^{(1)}+(\operatorname{grad}\mathbf{w}^{(1)})^{T}\}\tag{43}$$

利用 (39)，(42) 和 (32)—(34)，可推导出

$$\dot{\rho}_2+\bar{\rho}_2\operatorname{div}\mathbf{v}^{(2)}=0\tag{44}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\left[K_1+\frac{4}{3}G_1,G_1\right]\mathbf{w}^{(1)}-\frac{K_3}{\bar{\rho}_2}\operatorname{grad}\rho_2-\left(\frac{B_1}{\bar{T}}+\varphi+\beta\right)\operatorname{grad}\theta-\alpha(\dot{\mathbf{w}}^{(1)}-\mathbf{v}^{(2)})+\bar{\rho}_1\mathbf{F}^{(1)}\\=\bar{\rho}_1\ddot{\mathbf{w}}^{(1)}\end{aligned}\tag{45}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}[K_3,0]\mathbf{w}^{(1)}+\mathbf{L}[\lambda+2\mu,\mu]\mathbf{v}^{(2)}-\frac{K_2}{\bar{\rho}_2}\operatorname{grad}\rho_2-\left(\frac{B_2}{\bar{T}}-\varphi-\beta\right)\operatorname{grad}\theta+\alpha(\dot{\mathbf{w}}^{(1)}-\mathbf{v}^{(2)})\\+\bar{\rho}_2\mathbf{F}^{(2)}=\bar{\rho}_2\dot{\mathbf{v}}^{(2)}\end{aligned}\tag{46}$$

$$\begin{aligned}\bar{\rho}\bar{C}\dot{\theta}+\operatorname{div}\{(B_1+\bar{T}\varphi+\bar{T}\gamma)\dot{\mathbf{w}}^{(1)}+(B_2-\bar{T}\varphi-\bar{T}\gamma)\mathbf{v}^{(2)}-K'(\dot{\mathbf{w}}^{(1)}-\mathbf{v}^{(2)})\}\\=K\nabla^2\theta+\bar{\rho}r\end{aligned}\tag{47}$$

这里，字母上面的小圆点表示对时间的偏微分，线性矢量的微分算子定义为

$$L[\xi,\eta]=\xi\operatorname{grad}\operatorname{div}-\eta\operatorname{curl}^2\tag{48}$$

而常数 $K_i,G_1,B_1,B_2,\bar{C}$ 和 φ 为

$$\left.\begin{aligned}&K_1=\alpha_4+\frac{2}{3}\alpha_5+\alpha_1\left(2\frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}}-\frac{1}{3}\right),\ K_2=\bar{\rho}_2^2\left(\alpha_6+\frac{2\alpha_2}{\bar{\rho}}\right)\\&K_3=-\bar{\rho}_2\left(\alpha_8+\frac{\alpha_1}{\bar{\rho}}-\frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}}\alpha_2\right),\ \ G_1=\alpha_1+\alpha_5,\ \ B_1=-\bar{T}\alpha_9\\&B_2=\bar{\rho}_2\bar{T}\alpha_{10},\ \bar{C}=\bar{T}\overline{\frac{\partial S}{\partial T}},\ \ \varphi=\frac{\bar{\rho}_1\alpha_3}{\bar{\rho}}-\bar{\rho}_1\overline{\frac{\partial A_1}{\partial T}}\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

我们可以将上述结果与Biot理论进行一些比较．在等温情况下，适用$\partial_1=\partial_2$，并进一步假设函数$(\rho_1\rho_2/\rho)(A_1-A_2)$对线性理论没有贡献．于是，对粘性流体就有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{(1)}&=\left\{\left(K_1-\frac{2}{3}G_1\right)\mathrm{tr}\,\mathbf{e}+K_3\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}\right\}\mathbf{I}+2G_1\mathbf{e}\\ \boldsymbol{\sigma}^{(2)}&=(K_3\,\mathrm{tr}\,\mathbf{e}+K_2\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}\overset{\mathrm{def}}{=}\sigma\cdot\mathbf{I}\end{aligned}\right\}\tag{50}$$

这里$\boldsymbol{\varepsilon}$是与流体有关的应变张量，利用结果

$$\rho_2=\bar{\rho}_2(1-\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\tag{51}$$

就得到与Biot表达式一致的结果[1]．化简（46），可得到

$$\mathrm{grad}\,\sigma+\bar{\rho}_2\mathbf{F}^{(2)}=\alpha(\mathbf{v}^{(2)}-\dot{\mathbf{w}}^{(1)})\tag{52}$$

这就是Biot所使用的Darcy定律的一般表达式[1]．这里所推导的线性理论的特殊情况给出Biot的准静态理论．唯一的差别只是，这里从关于$\boldsymbol{\pi}$和$\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$的特殊的本构假设中导出了Darcy定律的一般形式，而这在Biot的工作中是作为一个假设而提出的．

3 液体-固体混合物理论在地学中应用

液体-固体混合物的连续介质力学理论在地学的许多领域内有着广泛的应用．它涉及能源、工程建设、环境保护等许多领域．例如油、气的开采，地热的开发，近海工程、海底隧道、地下工程的建设，核废物隔离、污染物运动、地震、爆炸效应的研究等等．

20年代，Terzaghi在渗流的Darcy定律基础上给出了1维固结方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{C_v}\frac{\partial u}{\partial t}=0\tag{53}$$

这里C_v为土的固结系数，u为孔隙水的超静水压力．

Biot[2]给出了三相固结理论的精确表达式

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2 u_i^s-\frac{\lambda'+G'}{G'}\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial x_i}+\frac{1}{G'}\frac{\partial u}{\partial x_i}=0\\ &C_{v3}\nabla^2 u=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{3}\frac{\partial\sigma_{ii}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\tag{54}$$

这里，u_i^s为土骨架位移，ε_v为体应变，u为孔隙水超静水压力，$\lambda'=\dfrac{\nu'E'}{(1+\nu')(1-2\nu')}$，$E',\nu',G'$分别为排水条件下土的弹性模量、泊桑比与剪切模量，$C_{v3}$为三相固结时的固结系数．

Oka[17]利用弹-粘塑性本构方程和Biot理论研究了粘土的固结．他们的本构方程为

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\langle\varphi(F)\rangle\partial f/\partial\sigma_{ij}\tag{55}$$

式中，$\langle\varphi(F)\rangle$定义为

$$\langle\varphi(F)\rangle=\begin{cases}0, & F\leqslant 0\\ \varphi(F), & F>0\end{cases}\tag{56}$$

加上能量守恒与流体相的Darcy定律，用数值方法求解土样的固结过程．结果表明，它能描述试样的厚度与老化对固结现象的影响．

固结理论在地面沉降控制[18]，地下水抽取[19]，固定式海洋平台的桩基安置过程分析及承载能力的计算[20]等实际问题中获得了广泛的应用．

液体-固体混合物的连续介质力学理论在地学中应用的另一个重要方面是关于饱和或部分饱和的岩土介质中热与质量转移的耦合现象。Philip 和 de Vries[21,22] 详细考察了地下热与质量转移的相互关系，从力学观点对物理问题作了详细的数学描述并给出了某些简单情况下的解答。Thomas[23] 从质量守恒的观点给出了控制质量与热量转移的微分方程

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\nabla(q_m/\rho_l) = \nabla(D_\theta\nabla\theta_l) + \nabla(D_T\nabla T) + \frac{\partial K}{\partial z} \tag{57}$$

$$C\frac{\partial T}{\partial t} + L\rho_l\frac{\partial\theta_v}{\partial t} = \nabla(\lambda\nabla T) - L\nabla q_v \tag{58}$$

在能源开发，环境保护，岩土工程等许多领域内都存在着热与质量转移的物理现象。例如，地热的开发[23,24]，油、气的采集与地下水的抽取[25]．核废物的贮存与地下污染物的迁移[26,27]，水库渗流与地下贮气贮油库的建设[28,29]等等，都可以采用液体-固体混合物力学理论来描述。

对于渗流的基本理论与应用，陈钟祥、袁曾光[30]研究了非均质多孔介质中二相渗流的多维问题，将渗流速度、饱和度传播速度、前沿饱和度以及平均饱和度等性质推广到多维情况。刘慈群、安维东[31]采用数值模拟系统研究了多重介质的弹性径向渗流问题。刘明新、陈钟祥[32]给出了双重孔隙介质不互溶不可压缩平面二相渗流的数值解。在工程问题的应用上，丁家平[33]采用 Darcy 定律的 2 维稳定渗流基本方程研究了边界复杂的水工建筑物的 3 维渗流问题。高骥、雷光耀、张锁春[34]根据饱和-非饱和渗流规律建立的数学模型，将堤坝内饱和区与非饱和区耦合在一起，建立了整体的分析模型。周志芳、钱孝星[35]研究了裂隙岩体透水性非均质各向异性特点，根据弹性固体-理想流体的连续介质力学的基本理论给出了各向异性裂隙岩体 3 维稳定渗流的控制方程，采用 3 维边界元计算了坝基的渗透力。

流体-地质材料两相连续介质的动态响应是许多工程问题的重点。这些工程问题包括：建立于孔隙介质上的大型工程结构、建筑物，核电站、机器基础的分析与设计；离岸工程结构物如海洋平台、输油管线等的分析、设计；地质材料中爆炸波、地震波的传播的分析；饱和砂土中液化现象的研究；水坝、大型地下结构、人工岛等地基稳定性研究。这些问题的理论基础最早是由 Biot[36]，Prevost[37]等人提出的。而后许多学者进行了这方面的工作[38-42]。

Zienkiewicz[38] 给出了流体-孔隙介质对动力响应的最一般方程如下：

总系统的运动方程

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i - \rho\ddot{u}_i - \rho_f\left(\frac{\partial\dot{W}_i}{\partial t} + \dot{W}_k\dot{W}_{i,k}\right) = 0 \tag{59}$$

孔隙流体运动方程

$$-P_{,i} + \rho_i b_i = \rho_f\left[\ddot{u}_i + \frac{1}{n}\left(\frac{\partial\dot{W}_i}{\partial t} + \dot{W}_k\dot{W}_{i,k}\right)\right] + \frac{R_i}{n} = 0 \tag{60}$$

具有最一般非线性形式固体骨架本构关系

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}''_{ij} - 2\delta_{ij}\dot{P} = D_{ijkl}(\overset{\circ}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}^0_{kl}) + \overset{\circ}{\omega}_{ik}\sigma_{kl} + \overset{\circ}{\omega}_{jk}\sigma_{kl} - 2\delta_{ij}\dot{P} \tag{61}$$

流动质量守恒

$$\dot{\theta}=-\dot{W}_{i;i}=2\dot{\varepsilon}_{ii}+\frac{1}{Q}\dot{P}-\delta_{ij}D_{ijkl}\frac{\dot{\varepsilon}^{0}_{kl}}{3K_{0}} \tag{62}$$

联立方程组描述了从激波入射到缓慢固结过程极其广泛范围内流体-孔隙固体混合物的动态响应问题。

[43—45]研究了弹性波在饱和土层中传播问题，特别是对饱和土层中弹性波的弥散特性进行了详细的分析。[46]研究了孔隙介质中表面波的传播问题。[47]描述了分层介质中的波的传播问题。

大型水库、坝体对地震载荷的响应是80年代以来研究得较多得问题[47-50]。研究的重点主要是坝体-水-基础的耦合作用[49,50]。

海床对波浪的响应是海洋工程中一个重要的基本问题。海洋工程结构物，不论是平台还是海洋管线的设计，都必须重点考虑海床的变形与稳定性问题。这个问题是典型的孔隙介质-流体混合物的连续介质力学问题。[52]采用了总应力法，[53—55]采用了有效应力法研究了海床对波浪的响应问题。应用固体-流体混合物连续介质力学基本理论给出了孔隙土床中位移、应力和孔隙水压力的分布。[44]采用多重尺度法分析了波浪在海床上的演化问题。海浪采用势流理论，海床采用了Darcy定律。两者在海床面上进行衔接，从而给出了波浪-海床耦合问题的解。

4 结 论

孔隙固体-流体混合物连续介质力学内容极为丰富。理论土力学的许多基本问题，例如固结理论、渗流理论、波在土介质中的传播、土-结构物之间的相互作用等等，都可以在固体-流体混合物连续介质力学理论的范畴内得到满意的解答。所以，从某种意义上来说，理论土力学只是固体-流体混合物连续介质力学的一个分支。在连续介质力学基本理论的指导下，可以更深刻地解决理论土力学的基本问题，在更高的水平上发展理论土力学。虽然我们可以从一些基本的实验事实或工程经验出发，通过某种假设来建立理论土力学基本问题的数学模型，但从理论的严密性与完备性来说，很难达到连续介质力学理论的高度。相反，理论土力学半个多世纪以来所取得的基本成果却很容易从固体-流体混合物连续介质力学的基本理论推导出来。由此可见，固体-流体混合物连续介质力学理论对土力学理论的发展和应用范围的开拓具有多么深远的意义。

混合物连续介质力学的基本方程，如质量守恒、能量守恒、熵平衡等，对有关各类具体问题都是适用的，而各类不同问题的差别主要在于混合物的本构特性。不仅是混合物各相自身的本构特性，例如固相是弹性体或塑性体，流体是理想流体或粘性流体。更重要的还在于各相之间的相互作用与耦合效应。所以，研究地质材料-孔隙流体相互作用的本构特性，发展相应的本构理论是解决能源开发、环境保护、岩土工程中许多重大问题的关键。同时也是混合物连续介质力学自身发展的重要内容。80年代以来世界各国所出现的关于地质材料本构理论研究的热潮，关于地学中各类问题的数值计算研究的热潮，都有力地说明了这点。可以预料，随着地质材料本构理论研究的不断完善和计算技术的飞速发展，许多地学中的困难问题的解决已是指日可待了。

参 考 文 献

1 Biot M A. *J. Appl. Phys.*, **26** (1955) : 182
2 ——. *ibid*, **12** (1941) : 155
3 Adkins J E. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A**256** (1964a) : 301
4 Green A E, Steel T R. *Int. J. Engng. Sci.*, **4** (1966) : 483
5 Atkin R J. *Z. Angew. Math. Phys.*, **18** (1967) : 803
6 Bowen R M. in Continuum Physics (ed. Eringen A C), Vol. 3. New York and London, Academic Press (1956)
7 Bedford A, Ingram J D. *J. Appl. Mech*, **38** (1971) : 8
8 Eringen A C, Ingram J D. *Int. J. Engng. Sci.*, **3** (1965) : 197
9 Atkin R J, Craine R E. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **29** (1976)
10 Eringen A C. Mechanics of Continua. Robert E, Krieger Publishing Company (1980)
11 ——. Nonliner Theory of Continuous Media. McGraw-Hill (1962)
12 Noll W. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **2** (1958) : 197
13 Cross J J. *Archwn Mech. Stosow*, **25** (1973) : 1025
14 Crochet M J, Naghdi P M. *Int. J. Engng. Sci.*, **4** (1966) : 383
15 Atkin R J, Craine R E. *J. Inst. Maths Applics*, **17** (1976) : 153—207
16 Dunwoody N T. *Archs Ration. Mech. Analysis*, **38** (1970) : 348
17 Oka F, Adachi T, Okano Y. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **10**, 1 (1986) : 1—17
18 钱寿易，顾小芸. 岩土工程学报，**3**，3 (1981)
19 Booker J R, Carter J P. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **11**, 1 (1987) : 61—77
20 章根德. 力学与实践，**9**，4 (1987) : 18—22
21 Philip J R, de Vries D A. *Trans. Am. Geophys. Union*, **38** (1957) : 222—232
22 de Vries D A. *ibid*, **39** (1958) : 909—916
23 Thomas H R. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **12**, **1** (1988) : 31—44
24 Shiduya Y, et al. *ibid.*, **11**, 2 (1987) : 143—153
25 Nilson R H. *ibid*, **10**, 2 (1986) : 191—211
26 Small J C, Booker J R. *ibid*, **10**, 5 (1986) : 501—519
27 Menen B A, Prohic E. *Environ. Geol. Water Sci.*, **13**, 1 (1989) : 3—13
28 Cividini A, Gioda G. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **8**, 6 (1984) : 549—566
29 Gambolati G, et al. *ibid*, **11**, 5 (1987) : 489—502
30 陈钟祥，袁曾光. 力学学报，**12** (1980) : 12
31 刘慈群，安维东. 同上，**14** (1982) : 236
32 刘明新，陈钟祥. 同上，**16** (1984) : 225
33 丁家平. 岩土工程学报，**6** (1984) : 65
34 高骐，雷光耀，张锁春. 同上，**10** (1988) : 78
35 周志芳，钱孝星. 同上，**14** (1992) : 44
36 Biot M A. *J. Appl. Phys.*, **33** (1962) : 1482
37 Prevost J H. *Int. J. Eng. Sci.*, **8** (1980) : 787
38 Zienkiewicz O C, Shiomi T. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **8** (1984) : 71
39 Green A E. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **22** (1969) : 427
40 Simon B R, Wu J S S, Zienkiewicz O C. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **10** (1986) : 483
41 Prevost J H. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Eng.*, **20** (1982) : 3
42 Hiremath M S, Sndhu R S, Morland L M, Wolfe W E. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **12** (1988) : 121
43 吴世明等. 应用数学和力学，**10** (1989) : 605
44 唐岑等. 同上，**11** (1990) : 79
45 陈龙珠等. 力学学报，**19** (1987) : 276
46 Halpern M R, Christiano P. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **10** (1986): 609
47 Tassoulas J L. Research Report R 81-2, No. 689, Dept. of Civil Eng., Massachusetts Institute of Tech., Cambridge, Masschusetts (Feb. 1981)
48 Fenves G, Chopra A K. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **11** (1983) : 809
49 Chopra A K, Chakraborti P. *ibid*, **9** (1981) : 363

50 Hall J F, Chopra A K. *ibid*, **10** (1982) : 305
51 Humar J, Roufaiel M. *J. Eng. Mech., ASCE*, **109** (1983) : 215
52 Yamamoto T. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **2** (1983) : 92
53 Siddharthan R. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **11** (1987) : 155
54 章根德等. 力学与实践, **12** (1990) : 29
55 ——. 力学学报, **24** (1992)

CONTINUUM THEORIES OF SOLID-FLUID MIXTURES AND THEIR APPLICATIONS IN ENGINEERING

Zhang Gen-de
Institute of Mechanics, Academia Sinica

Abstract In this paper, the continuum theories of mixtures are presented and thier applications to engineering with soild-fluid mixtures are also given.

Keywords *mixture; geological material; continuum theory*

（上接第 143 页）

$$P(i)/P_1 = \sum_{k=1}^{k} a_k \exp[-(i-1)/I_k], \text{ 其中 } \sum a_k = 1 \tag{8}$$

或

$$P(i)/P_1 = 1 - A(i-1)^n \cdot Z^m \text{（对于苹果 } n=0.18,\ m=0.65\text{）} \tag{9}$$

最简的形式为

$$P(i)/P_1 = i^{-n}, \text{ 其中 } n = B \cdot Z^{m'} \tag{10}$$

式中 i 为循环次数，I_k为松弛的循环次数，并且可能依赖于变形，Z 为变形，P_1 为第一循环的作用力幅值，a_k，A，B，n，m，m'为常数。

对于恒定的作用力幅值，相对蠕变可以描述为

$$Z(i)/Z_1 = 1 + A(i-1)^n \text{（对于苹果，} A = 0.17\text{—}0.22,\ n = 0.15\text{）} \tag{11}$$

或最简单的形式为

$$Z(i)/Z_1 = i^m \text{（对于苹果，} m = 0.075\text{）} \tag{12}$$

式中 Z_1 为第一循环中的变形，A，n，m为常数。

这里有个有趣的现象要注意：在第一近似中，蠕变与作用力幅值无关。

在重复载荷下，大筒仓中受压的湿玉米粒的坚实度可以用下列关系式描述：

$$\gamma = \gamma_0[1 + A \cdot P^m(1 - \exp(-i/I))] \tag{13}$$

这里，γ_0，γ 为初始的和瞬时的单位体积重量，P 为竖直载荷应力，A，m，I 为常数（$A = 0.68$，$m = 0.1$—0.15，$I = 3$—3.7）.

I 的值给出了有关坚实度的合理数值的信息.

参考文献（13篇，略）

210014农业部南京农机化研究所**吴劲松**摘译自：4th Int. Conf. Phys. Properties of Agric. Mater. and their Influence on Technological Processes (4th ICPPAM) (1989)：752—759. **（董务民校）**