

方管湍流二次流的数值模拟

王发民 赵 烈 卞荫贵
(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘 要 本文采用新的向量势做法计算了方截面直管内的湍流流动。讨论了流场特征并导出了不同区域的简化方程。计算结果跟实验相符, 实际模拟了平均量和湍流量的主要特征。

关键词 二次流, 湍流模型, 涡量一向量势方程。

1 引 言

非圆截面通道有着广泛的工程应用背景。其中的湍流流动具有明显的三维特征—横截面上存在二次流。它们或是由弯曲管道的离心效应所造成或是被湍流应力所诱导。早在 1930 年 Nikuradse 首先观察到方截面直管中的第二类二次流。正是这种二次流将流体从管中心沿着拐角的等分线带向拐角而后又沿壁面从拐角流向中心区, 因此, 致使轴向速度在横截面上的等值线向拐角突起。虽然, 第二类二次流的大小只是流向平均速度的 1%—3%, 但它显著地改变了管道的阻力和传热性能。所以, 方截面管道内湍流二次流的研究有其重要的理论意义和实用价值。

1960 年 Hoagland 第一个对二次流作了实际测量。此后, Gessner (1964)、Lauder & Ying (1972)、Melling & Whitelaw (1976) 以及 Po (1975) 和 Gessner & Emery (1980) 等作者相继发表了方管二次流的测量结果。

管道湍流的数值模拟有助于探明二次流的成因跟演变规律。国外学者已作了有益的尝试。Lauder & Ying^[1] (1973) 首先计算了方截面管道内的充分发展湍流。此外, Gosman & Rapley^[2] (1978) 也计算了多种非圆截面管道内的湍流流动。但是由于他们忽略了雷诺应力中的二次流速度梯度项, 因而未能取得满意的结果。Demuren 和 Rodi^[3] (1984) 采用了改进的代数应力模型弥补了上述缺陷。他们给出了充分发展湍流的较好的计算结果, 但是, 对于发展中湍流的计算尚待改进。为进一步改善湍流二次流的数值模拟, 有必要在湍流模型、近壁处理以及计算方法等方面作深入探讨。

本文针对方截面直管内的湍流流场, 采用了类似于向量势的做法计算分析了湍流二次流的特征和影响。所得结果跟实验相符, 充分说明本文采用的方法能成功地描述方截面管道内湍流流场的基本特征。此外, 根据管内不同区域的尺度, 分别导出了相应的简化控制方程。

2 基本方程及其抛物化

采用直角坐标系 (x, y, z) (见图 1)。

本文于 1992 年 3 月 24 日收到。国家自然科学基金资助项目。

对于具有主流方向的流动一般可采用类似于边界层的近似办法,以不同的参考尺度进行无量纲化。

现取 u_0 、 v_0 分别为主流及横向参考速度; w_0 为脉动参考速度; L 及 D_h 分别为主流及横向参考长度。

$$\text{令 } v_0/u_0 = D_h/L = u_w^2/u_0^2 = \delta \quad (2.1)$$

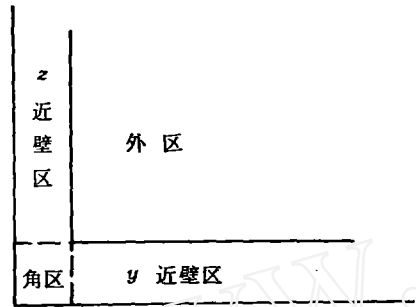


图1 分区示意图

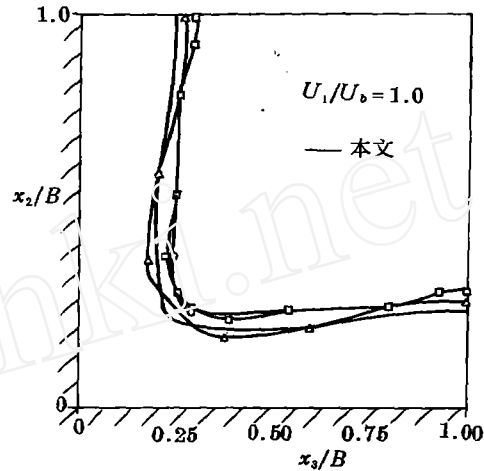


图2 流向速度等值线

Δ Lund (1977); \circ Po(1975);
 \square Brundt & baines (1964).

经下列无量纲化,

$$\left. \begin{aligned} U &= \bar{U}/u_0 & V \cdot W &= (\bar{V} \cdot \bar{W})/v_0 = (\bar{V} \cdot \bar{W})u_0\delta \\ X &= \bar{x}/L & y \cdot z &= (\bar{y} \cdot \bar{z})/D_h = (\bar{y} \cdot \bar{z})/L\delta \\ \overline{u_i u_j} &= \widetilde{u_i u_j} / u_0^2 \delta \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

则抛物化方程组可表达如下:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{dp_m}{dx} + \frac{1}{Re} \nabla^2 U - \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} \quad (2.4)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} - U^2 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 V - \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}w}{\partial z} \quad (2.5)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 W - \frac{\partial \bar{u}w}{\partial y} - \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} \quad (2.6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ p &= \bar{p}/\rho u_0^2 = p_m + \delta(P + p) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

方截面直管的湍流计算从流向动量方程和涡量方程出发,除(2.3)及(2.4)式外,有

$$U \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \Omega \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \Omega - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \bar{v}w - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\bar{w}^2 - \bar{v}^2) \quad (2.8)$$

其中

$$\bar{\Omega} = \widetilde{\Omega} / u_0 / D_h \quad (2.9)$$

采用类似于向量势的做法，分解速度矢量

$$\vec{U} = \vec{i}U + \vec{V}, \quad (2.10)$$

再将二次流分解成无旋及零散度矢量两部分：

$$\vec{V}_s = \vec{I} + \vec{S} \quad (2.11)$$

$$\text{有} \quad \left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{I} = 0 \quad \vec{I} = \text{grad}\Phi \quad \left. \begin{aligned} I_y &= \frac{\partial\Phi}{\partial y} & I_z &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} \\ \nabla \cdot \vec{S} = 0 \quad \left. \begin{aligned} S_y &= \frac{\partial\psi}{\partial z} & S_z &= \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

利用连续方程(2.3)，有

$$\nabla \cdot \vec{U} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} + \frac{\partial I_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Phi = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.13)$$

根据涡量定义

$$\Omega = \vec{i} \cdot [\nabla \times \vec{u}] = \vec{i} \cdot [\nabla \times \vec{S}] = \frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial z} \Rightarrow \nabla^2 \psi = -\Omega \quad (2.14)$$

解出 Φ 及 ψ 后，可得二次流速度分量：

$$\left. \begin{aligned} V &= I_y + S_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ W &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

3 湍流模型

方截面直管中湍流应力所诱导的 Prandtl 第二类二次流无法采用各向同性的涡粘性湍流模型来描述。为此，本文采用代数应力模型。它是由雷诺应力方程简化而成的。保留了雷诺应力方程的生成项、压力—应变项以及耗散项则有

$$(1 - \alpha)P_{ij} - C_1 \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i u_j} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon \in (c_1 + \alpha + \beta - 1) - \beta D_{ij} - \nu k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (3.1)$$

雷诺应力分量可表示为

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2k}{3c_1} \delta_{ij} (c_1 + \alpha + \beta - 1) + (1 - \alpha) \frac{k}{c_1 \epsilon} P_{ij} - \beta \frac{k}{c_1 \epsilon} D_{ij} - \frac{\nu k^2}{c_1 \epsilon} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2)$$

通常，轴向动量方程中的雷诺应力分量依然采用涡粘性近似，其余的雷诺应力分量表达如下：

$$\left. \begin{aligned} \overline{v^2} &= \frac{2k}{c_1 \epsilon} \left[\beta \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\epsilon}{3} (1 - \alpha - \beta - c_1) \right] - 2\nu_t \frac{\partial V}{\partial y} \\ \overline{w^2} &= \frac{2k}{c_1 \epsilon} \left[\beta \overline{wu} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\epsilon}{3} (1 - \alpha - \beta - c_1) \right] - 2\nu_t \frac{\partial W}{\partial z} \\ \overline{u^2} &= 2k - \overline{v^2} - \overline{w^2} \\ \overline{vw} &= \frac{k}{c_1 \epsilon} \left[\beta \overline{wu} \frac{\partial U}{\partial y} + \beta \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial z} \right] - \nu_t \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

经上述无量纲化和简化处理后，各分量表达式为：

$$\left. \begin{aligned} \overline{u^2} &= \frac{2k}{3c_1}(c_1 + \alpha + \beta - 1) - (1 - \alpha) \frac{2k}{c_1 \varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{wu} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ \overline{v^2} &= \frac{2k}{3c_1}(c_1 + \alpha + \beta - 1) + \beta \frac{2k}{c_1 \varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \\ \overline{w^2} &= \frac{2k}{3c_1}(c_1 + \alpha + \beta - 1) + \beta \frac{2k}{c_1 \varepsilon} \overline{wu} \frac{\partial U}{\partial z} \\ \overline{uv} &= -(1 - \alpha) \frac{k}{c_1 \varepsilon} \left(\overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \beta \frac{k}{c_1 \varepsilon} \overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{vk^2}{c_1 \varepsilon} \frac{\partial U}{\partial y} \\ \overline{wu} &= -(1 - \alpha) \frac{k}{c_1 \varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \beta \frac{k}{c_1 \varepsilon} \overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{vk^2}{c_1 \varepsilon} \frac{\partial U}{\partial z} \\ \overline{vw} &= \beta \frac{k}{c_1 \varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{wu} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

上述表达式中的湍流动能 k 以及湍流耗散率 ε 由它们各自的输运方程来确定。经无量纲化及抛物化处理后的 k, ε 方程分别为:

$$U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{D_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{D_z} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + P - \varepsilon \quad (3.5)$$

$$U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{D_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{D_z} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (c_1 P - c_2 \varepsilon) \quad (3.6)$$

其中

$$D_k = \frac{u_* L \delta}{\Gamma_k} \quad D_z = \frac{u_* L \delta}{\Gamma_z} \quad (3.7)$$

$$P = - \left[\overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{1}{\delta} \left(\overline{wu} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] \quad (3.8)$$

4 简化方程

现将方截面直管分成中心区、 y 近壁区、 z 近壁区以及拐角区几部分, 近壁区定义参照图 1。

基于量级分析, 本文导出了适用于近壁区和拐角区的不同的简化方程。具体做法如下:

通常, 在近壁采用摩擦速度

$$u_* = \sqrt{\tau_w / \rho} \quad (4.1)$$

作为参考速度取 v/u_* 作为参考长度,

$$\text{经实例分析有} \quad u_* \ll u_* \quad v/u_* \ll D_k \quad (4.2)$$

$$\text{用 } \delta_1 \text{ 表示速度比} \quad \delta_1 = u_* / u_* \quad (4.3)$$

$$\text{而长度比为 } \delta_2 \quad \delta_2 = v/u_* D_k \quad (4.4)$$

δ_1 与 δ_2 皆为小量, 而且

$$\delta_1 \cdot \delta_2 = v/u_* D_k = \frac{1}{Re} \quad (4.5)$$

$$\text{令} \quad \delta'^2 = \delta_1 \cdot \delta_2 \quad (4.6)$$

$$\text{所以} \quad \delta' = \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (4.7)$$

以 y 近壁区为例:

$$\left. \begin{aligned} y < x, z \quad V < U, W \\ u \sim y, \quad w \sim y, \quad v \sim y^2 \\ \overline{v^2} < \overline{uv}, \quad \overline{vw} < \overline{u^2}, \quad \overline{w^2}, \quad \overline{wu} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

令

$$\left. \begin{aligned} y^+ &= y/\delta' & V^+ &= V/\delta' \\ \bar{v}^{2+} &= \bar{v}^2/\delta', \bar{uv}^+ = \bar{uv}/\delta', \bar{vw}^+ = \bar{vw}/\delta' \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

则控制方程组可简化为:

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + V^+ \frac{\partial U}{\partial y^+} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{d p_m}{d x} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^{+2}} &= - \frac{\partial \bar{uv}^+}{\partial y^+} \\ U \frac{\partial \Omega}{\partial x} + V^+ \frac{\partial \Omega}{\partial y^+} + W \frac{\partial \Omega}{\partial z} - \Omega \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^{+2}} &= - \left\{ \frac{\partial \bar{uw}^+}{\partial y^{+2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^+ \partial z} (\bar{w}^2 - \bar{v}^2) \right\} \\ U \frac{\partial k}{\partial x} + V^+ \frac{\partial k}{\partial y^+} + W \frac{\partial k}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y^+} \left(1 + \frac{\sqrt{Re}}{\sigma_k} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial y^+} \\ U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V^+ \frac{\partial \varepsilon}{\partial y^+} + W \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y^+} \left(1 + \frac{\sqrt{Re}}{\sigma_\varepsilon} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y^+} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

对于 z 近壁区以及拐角区可作类似处理得出相应的简化方程组。

5 计算方法 [以 (x_1, x_2, x_3) 表示 (x, y, z)]

方截面直管内的湍流二次流计算采用了下述 Galerkin 加权余量法。

对于三维抛物化方程的通用型:

$$U_l \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_1} + U_l \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_i} = - \frac{\partial u_i u_i}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \Phi_l}{\partial x_i^2} + S_i, \quad \Phi_l \in D \quad (l = 2, 3) \quad (5.1)$$

及广义边界条件:

$$L(\Phi_l) = \alpha \Phi_l + \beta \frac{\partial \Phi_l \cdot \bar{n}}{\partial x_i} + \nu = 0 \quad (5.2)$$

可以建立下述有限元方程

$$a(\Phi_i^e, U_i^e, W) + b(\Phi_i^e, U_i^e, W) = (c \bar{u}_i u_i^e, W) + d(\Phi_i^e, W) + e(\Phi_i^e, W) \quad (5.3)$$

对于具有 16 个自由度并保证 c' 连续性的一阶的 Hermit 矩形元素

$$\Phi_i^e(x_1, x_i) \equiv \sum_{k=1}^{16} N_k(x_1, x_i) \Phi_{k(x_i)} \quad (5.4)$$

而

$$\Phi_i = \sum_{e=1}^M \Phi_i^e \quad (5.5)$$

Φ_i 的入口条件: $D_0 \equiv R^2 \times x_{1(0)}$

U_1 采用下列问题的级数解,

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) U_1 &= \frac{d\bar{P}}{dx_1} R \\ U_1 &= 0 \quad \partial D = \{ \text{固壁} \} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi &= 0 \quad \Phi = 0 \\ k &= \left(\frac{F_p}{C_\mu} \right)^{\frac{1}{2}} U_\tau^2 \quad \varepsilon = F_p U_\tau^3 / \kappa x_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

边界条件:

$$U_1 = U_\tau \frac{1}{k} \ln(Ey^+) \quad (5.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}} = 0 \\ \Omega = \partial^2 \psi / \partial \bar{n}^2 \\ k = \left(\frac{F_2}{C_\mu} \right)^{\frac{1}{2}} U_\tau^2 \quad \varepsilon = F_\rho U_\tau^3 / \kappa x_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

其中 $U_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$ (摩擦速度)

$$y^+ = \frac{y U_\tau}{\nu}$$

$$F_\rho = 1 + \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right]^2 / \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right]^2 \quad (x_3 \text{ 是壁面的法向})$$

\bar{n} 及 \bar{t} 分别为固壁的法向及切向单位向量。

计算步骤:

(1) 采用 Boussinesq 涡粘性近似, 只解 U_1 、 k 及 ε 的方程, 直至 $x_1/D_h \approx 15$;

(2) 用上步所得数据作为新的初值往下游作推进计算, 除上述方程外, 加上 Ω 、 ψ 的方程, 直至 $\partial U_1 / \partial x_1 \approx 0(\delta)$;

(3) 求解包括 Φ 方程的完整方程组, 直至 $\Phi \ll 1$ 。

6 计算结果与讨论

图 2 比较了计算跟测量的流向速度分布。由此图所示流向速度在横截面上的等值线分布可以看出: 等值线明显地向拐角凸出。这种图形典型地表明了二次流的影响: 它将动量大的流体带向拐角区。同时, 图示的计算结果跟实验数据十分吻合, 只是在拐角区稍许有点低估。

图 3 分别比较了在横截面中心面和拐角等分线上计算与测量的二次流速度分布。测量数据取自 Gessner & Emery(1980)的实验报告。图线表明: 计算值跟测量值很接近。

图 4 比较了计算与测量的雷诺主切应力 \overline{uw} 二者基本相符。

图 5 分别给出 \overline{vw} 及 $(\overline{w^2} - \overline{v^2})$ 的计算结果。它们表明了湍流二次流的两个主要的驱动源的大小及分布状况。由此可见, 拐角区的 $(\overline{w^2} - \overline{v^2})$ 梯度较大。

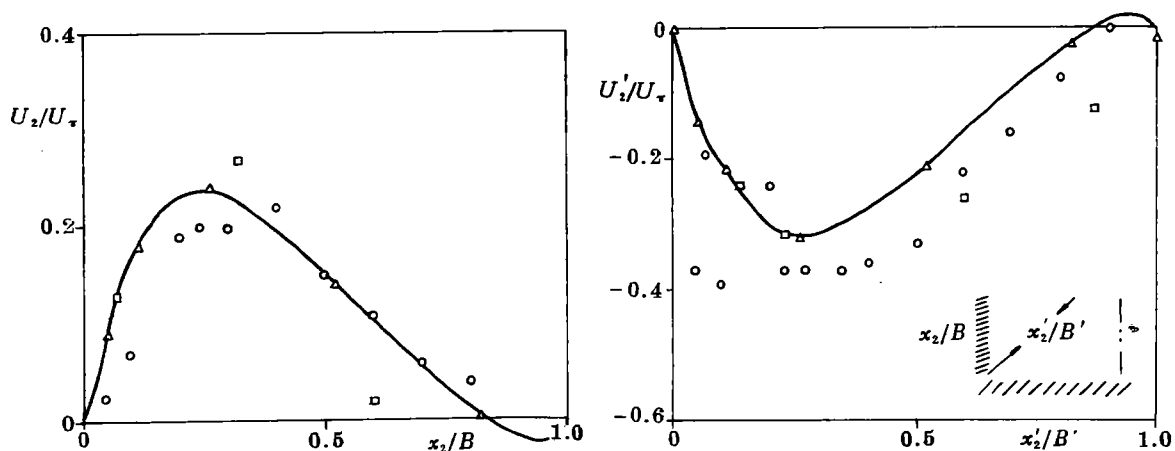


图 3 二次流速度分布

○ Gessner (1980), △ Brundett (1964), □ Launder (1972).

图6比较了计算和测量的湍动能 k 沿横截面中心面的分布。由图可见，近壁计算结果跟实验一致而中心区的计算值偏高。

本文计算结果有力地说明了经抛物化处理后，由流向动量方程和涡量方程出发，采用类似于向量势的做法进行有限元计算是切实可行的。跟实验的比较充分表明：本文的计算结果成功地描述了方截面直管的湍流流场特征。

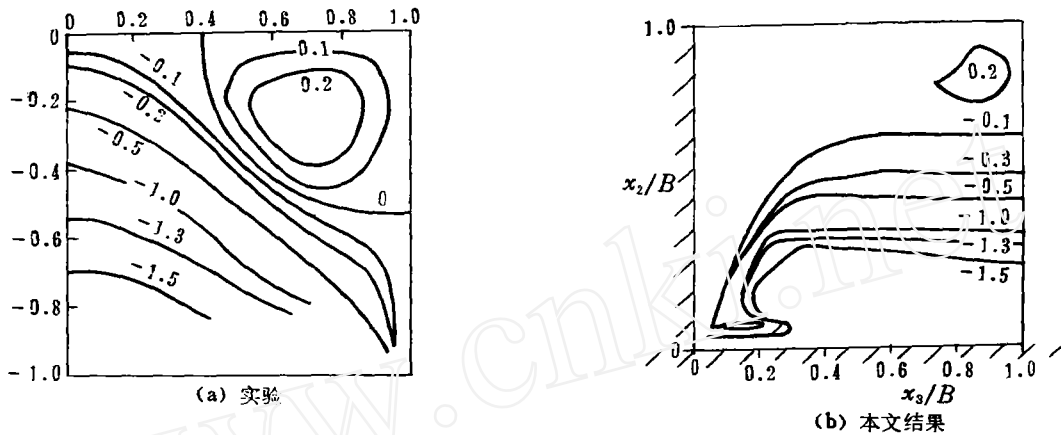


图4 主切应力分布

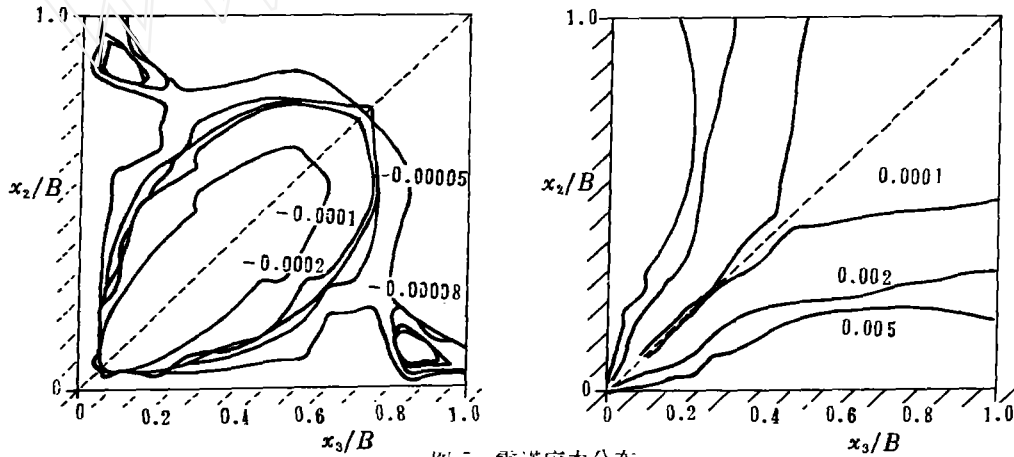


图5 雷诺应力分布

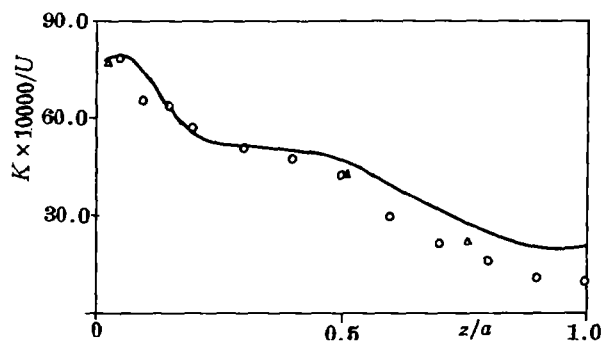


图6 湍流动能剖面

参 考 文 献

- 1 Launder B E. & Ying W N. Prediction of Flow and Heat Transfer Inducts of Square Cross-Section. Proc. Inst. Mech. Engrs. 1973, 187: 455—461.
- 2 Gosman D D & Raplay C W. A Prediction Method for Fully Developed Flow Through Non-Circular Passages. In Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flows (ed. C. Taylor et al,) 1978.
- 3 Demuren A O. & Rodi W. Calculation of Turbulence-Driven Secondary Motion in Noncircular Ducts. J. Fluid Mech. 1984, 140: 189. 222.
- 4 Gessner F B. & Emery A F. The Numerical Prediction of Developing Turbulent Flow in Rectangular Ducts. In Turbulent Shear Flows 2(ed. J.S. Bradbury et al.) 1980.

Numerical Study of Turbulence-driven Secondary Flow in a Square Duct

Wang Fa-min Zhao Lie Bian Yin-gui

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 10080)

Abstract In this paper, the turbulent flow in a straight duct of square cross section has been computed using a new vector-potential formulation. The flowfield characteristics are discussed, and the corresponding simplified equations suitable for different regions are developed. The present results are in good agreement with available experimental data. The main features of the mean-flow and the turbulence quantities are simulated realistically.

Key words secondary flow, turbulence model, vortex-vector potential equation