

## 低 Re 数偏心圆柱间定常整流流动

王 玮 浦 群 林同骥

(中国科学院力学研究所 北京 100080)

**摘 要** 本文研究低雷诺数情况下偏心圆柱间定常 Streaming 流动问题, 其中内柱以速度  $U_m(x)\cos\omega t$  在静止不可压粘性流体中作小振幅直线简谐振动, 外柱则固定不动。

**关键词** 整流流动, 偏心圆柱, Stokes 方程, 解析解。

当圆柱在静止不可压粘性流体中沿柱轴的垂直方向作高频小振幅简谐振动时, 流动的非定常运动局限在柱表面厚度为  $O(\nu/\omega)^{1/2}$  的 Stokes 剪切波层内, 其中  $\nu$  为流体运动粘性系数,  $\omega$  为简谐振动的圆频率。由于 Stokes 层内雷诺应力的非线性作用, 会诱导产生不仅限于 Stokes 层内的二次定常流动, 称之为定常 Streaming 流动, 即定常整流流动。一百多年来这一问题一直受到流体力学工作者的关注。它的研究有助于认识物体振动时, 周围流体的热对流和质量传输等现象。大多数的理论和实验工作是针对圆柱在无界域内振动或同心圆柱间内柱振动的情况 [Rayleigh (1884), Schlichting (1932), Stuart (1966), Dohara (1984) 及 Kimo (1989)]。偏心圆柱间定常整流流动问题迄今未见报导。

本文研究低 Re 数情况下偏心圆柱间的定常整流流动问题, 其中内柱以速度  $U_m(x)\cos\omega t$  在静止不可压粘性流体中作小振幅直线简谐振动, 外柱则固定不动。重点考察非对称外部边界条件对 Stokes 剪切波层外的定常整流流动的影响, 为进一步考虑高 Re 数问题打下一定的基础。

Stuart (1966) 指出当圆柱作高 Re 数小振幅振动时, Stokes 层外的二次定常整流流动中惯性对流作用与粘性耗散作用相当, 流动的控制方程为 N-S 方程, 而对低 Re 数小振幅振动情况, Stokes 层外的二次定常流动具有蠕动流动特性, 可用 Stokes 方程来描述。对 Stokes 剪切波层, Schlichting (1932) 利用边界层方程逐级近似求解, 得到该剪切波层外缘的二次定常流速分布。本文以此作为内柱附近的边界条件, 在外柱处则满足无滑移条件。以内柱振动的平均中心位置为坐标系  $z = re^{i\theta} = x + iy$  的坐标原点。取内柱半径  $r_1$  为无量纲特征长度,  $\omega^{-1}$  为特征时间,  $U_m$  为特征速度, 得到偏心圆柱间二次定常整流流的无量纲主导方程和边界条件, 即:

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad (1)$$

其中: 
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{3}{2} \sin 2(\theta - \gamma) \quad \text{当 } r = 1 \text{ 时} \quad (3)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{当 } r = \frac{e}{r_1} \sin \theta + \frac{r_2}{r_1} [1 - (1 - \frac{e}{r_2})^2 \cos^2 \theta]^{1/2} \quad (4)$$

国家自然科学基金资助项目。本文于 1992 年 4 月 3 日收到。

这里  $\psi$  为无量纲流函数,  $\gamma$  为振动方向角, 即内柱振动方向与两柱心连线的夹角,  $e$  为两柱心之距。根据偏心圆柱的几何特点, 采用双极坐标变换将会带来很大的方便:

$$\bar{Z} = z_c + re^{i\theta} = ia \operatorname{ctg}\left(\frac{\eta + i\xi}{2}\right) \quad (5)$$

其中  $z_c$  为原坐标原点在新坐标系  $\bar{Z}$  中的横向坐标,  $a$  为一常数。  $\zeta = \xi + i\eta$  变换后  $\xi = \text{const.}$  表示物理平面  $\bar{Z}$  中圆心为  $(a \operatorname{ch}\xi, 0)$ , 半径为  $a |\operatorname{csch}\xi|$  的圆。

在  $(\xi, \eta)$  坐标系中原方程和边界条件为:

$$H^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left[ H^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \psi \right] = 0 \quad (6)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = P(\xi_1, \eta) \cos 2\gamma + Q(\xi_1, \eta) \sin 2\gamma$$

$$P(\xi_1, \eta) = \frac{3 \operatorname{sh} \xi_1 \sin \eta (\operatorname{ch} \xi_1 \cos \eta - 1) \cdot a}{(\operatorname{ch} \xi_1 - \cos \eta)^3}, \quad \text{当 } \xi = \xi_1 \text{ 内柱} \quad (7)$$

$$Q(\xi_1, \eta) = \frac{3}{2} \frac{a [\operatorname{sh}^2 \xi_1 \sin^2 \eta - (\operatorname{ch} \xi_1 \cos \eta - 1)^2]}{(\operatorname{ch} \xi_1 - \cos \eta)^3}$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, \quad \text{当 } \xi = \xi_2 \text{ 外柱} \quad (8)$$

其中:

$$\frac{1}{H} = \left| \frac{d\bar{z}}{d\xi} \right| = \frac{a}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \quad (9)$$

定义柱径比  $\alpha$  为外圆柱半径  $r_2$  比内柱半径  $r_1$  之比, 偏心度  $\beta$  为两柱心距比  $e$  与内柱半径  $r_1$  之比, 在  $\xi$  坐标系下, 有:

$$\alpha = \frac{\operatorname{sh} \xi_1}{\operatorname{sh} \xi_2}, \quad \beta = \frac{\operatorname{sh}(\xi_1 - \xi_2)}{\operatorname{sh} \xi_2} \quad (10)$$

另外常数  $a$  为:

$$a = \operatorname{sh} \xi_1 \quad (11)$$

对边界条件(7)和(8), 求解方程(6), 得到以流函数表示的级数解析解:

$$\psi = \frac{a}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} K_{(n)}(\xi) \sin n\eta + \sum_{m=0}^{\infty} L_{(m)}(\xi) \cdot \cos m\eta \right] \quad (12)$$

其中:  $n=1$  时

$$K_{(1)}(\xi) = K_{(1)1} + K_{(1)2}\xi + K_{(1)3} \cdot \operatorname{sh} 2\xi + K_{(1)4} \cdot \operatorname{ch} 2\xi \quad (13)$$

$n \geq 2$  时

$$K_{(n)}(\xi) = K_{(n)1} \cdot \operatorname{sh}(n+1)\xi + K_{(n)2} \cdot \operatorname{ch}(n+1)\xi + K_{(n)3} \cdot \operatorname{sh}(n-1)\xi + K_{(n)4} \cdot \operatorname{ch}(n-1)\xi \quad (14)$$

$m=0$  时

$$L_{(0)}(\xi) = L_{(0)1} \cdot \operatorname{sh} \xi + L_{(0)2} \cdot \operatorname{ch} \xi + L_{(0)3} \cdot \xi \operatorname{sh} \xi + L_{(0)4} \cdot \xi \operatorname{ch} \xi \quad (15)$$

$m=1$  时

$$L_{(1)}(\xi) = L_{(1)1} + L_{(1)2}\xi + L_{(1)3} \cdot \operatorname{sh} 2\xi + L_{(1)4} \cdot \operatorname{ch} 2\xi \quad (16)$$

$m \geq 2$  时

$$L_{(m)}(\xi) = L_{(m)1} \cdot \operatorname{sh}(m+1)\xi + L_{(m)2} \cdot \operatorname{ch}(m+1)\xi + L_{(m)3} \cdot \operatorname{sh}(m-1)\xi + L_{(m)4} \cdot \operatorname{ch}(m-1)\xi \quad (17)$$

常数  $K_{(n)i}; L_{(m)i}; n=1, 2, 3, \dots; m=0, 1, 2, \dots; i=1, 2, 3, 4$ ; 由边界条件确定。

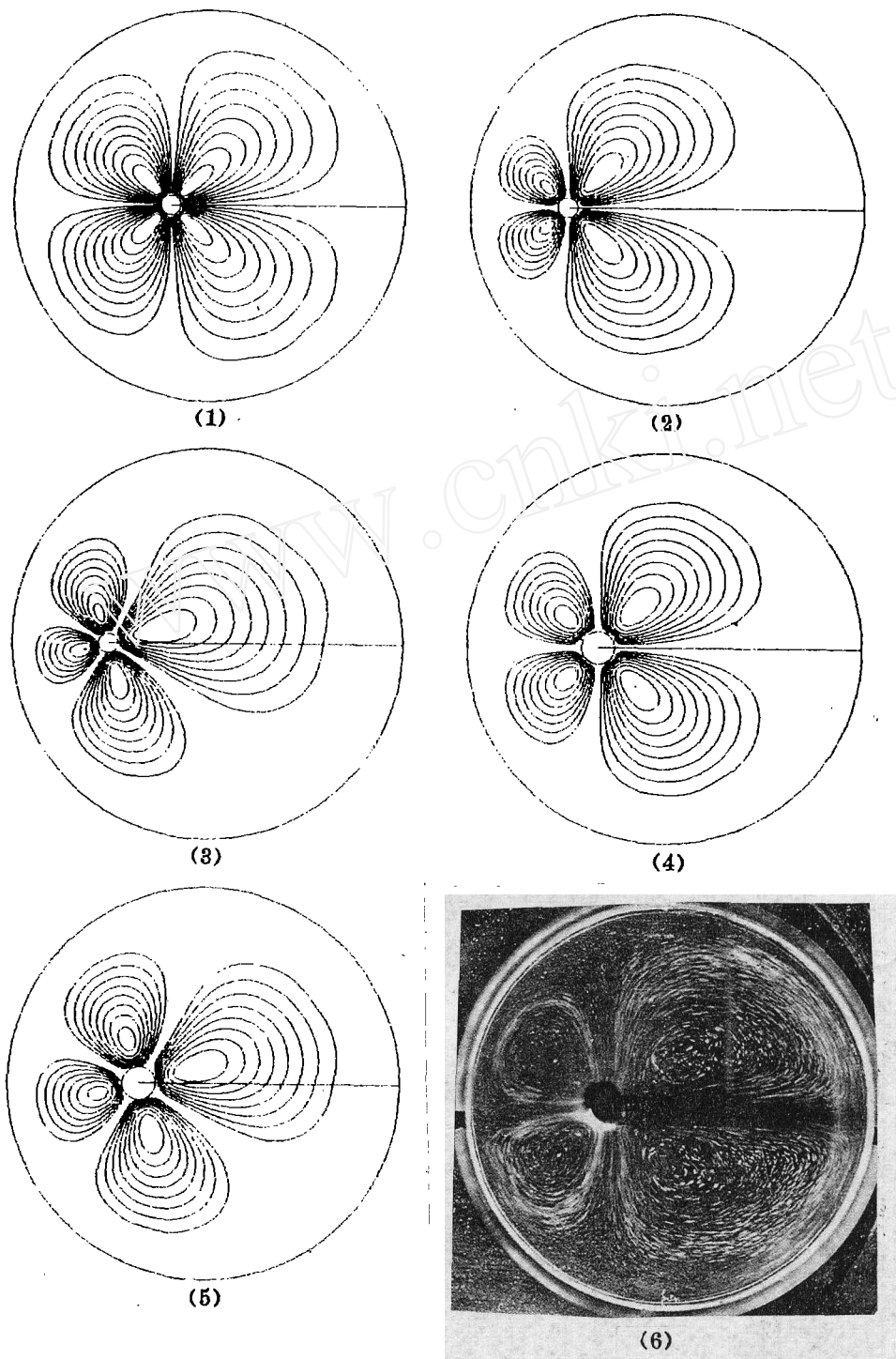


图 流线

- (1)  $\alpha=20$   $\beta=4$   $\gamma=0^\circ$     (2)  $\alpha=20$   $\beta=10$   $\gamma=0^\circ$     (3)  $\alpha=20$   $\beta=10$   $\gamma=60^\circ$   
 (4)  $\alpha=12$   $\beta=4$   $\gamma=0^\circ$     (5)  $\alpha=12$   $\beta=4$   $\gamma=60^\circ$     (6)  $\alpha=12$   $\beta=4$   $\gamma=0^\circ$

作为算例，取级数前四项计算了不同柱径比  $\alpha$ ，偏心度  $\beta$  和方向角  $\gamma$  下 Stokes 剪切波层外二次定常流动的流谱。如图所示。由此可得出如下结论：

(1) 在 Stokes 剪切波层外偏心圆柱间的流动中存在四个涡系, 其流动方向沿振动轴离开振动内柱。

(2) 当  $\gamma = 0^\circ$  或  $90^\circ$  时, 四涡系对称分布于两柱心连线两侧, 对其它振动方向角, 四涡系大小尺寸各异, 表现出完全非对称形态

(3) 当偏心度  $\beta$  趋于 0 时, 流谱逐渐趋向同心圆柱间的流动状况, 即四涡系逐渐呈现完全对称现象。

(4) 当柱径比  $\alpha$  增大时, 涡心对内柱的无量纲距离增大, 而偏心度的增加, 则使位于狭窄区域内的涡心无量纲距离减小。

(5) 当  $\gamma = 0^\circ$  时, 计算得到的流谱与初步的流场显示结果符合较好。

(6) 受双极坐标变换的局限, 本文的解不适用于大柱径比下的小偏心度情况。

### 参 考 文 献

- 1 Rayleigh L. *Phil. Trans.* 1834; (A) 175, 1.
- 2 Schlichting H. *Phys. Z.* 1932; 33, 327.
- 3 Stuart J T. J. *Fluid Mech.* 1966; 24, 673.
- 4 Dohara N. J. *Phys. Soc. Jap.* 1984; 53(1) 134.
- 5 Kim S. and Troesch A. *phys. Fluids.* 1989; A1 975.
- 6 Lin. T C. & Pu Qun. *Proceedings of the Seventh Congress. The Asian and Pacific Regional Division of the International Association for Hydraulic Research.* Beijing, 1990; No. v.

## Low $Re$ Steady Streaming Flow Between Two Eccentric Circular Cylinders

Wang Wei Pu Qun Lin Tong-ji

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080)

**Abstract** This paper studies the steady streaming flow of low Reynolds number between two eccentric circular cylinders. The inner cylinder vibrates with small linear velocity  $U_0 \cos \omega t$  in incompressible viscous fluid, while the outer cylinder is fixed.

**Key words** steady streaming flow, eccentric circular cylinders, Stokes equation, analytical solution.