

用 CSCM 格式模拟二维收缩管道内的流动

王 力

(北京空气动力研究所 38 分箱, 北京, 100074)

傅德薰

(中国科学院力学研究所, 北京, 100080)

NUMERICAL SIMULATION OF THE INLET FLOW WITH CSCM

Wang Li

(P.Box 38, Beijing Institute of Aerodynamics, Beijing, 100074)

Fu De-xun

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing, 100080)

摘 要 采用 Lombard 等人提出的 CSCM (Conservative Supra-Characteristics Method) 差分方法数值模拟二维收缩管道内波系干扰及激波边界层干扰等问题。所得结果同已往计算结果进行了比较。通过压力场和速度场的计算结果可看到 Ma 数对流场的影响。在 Ma 数较小时激波角较大, 可看到激波经两次相交一次反射逐渐变弱的情况。 Re 数改变对流场也有明显影响, 且给出由于激波干扰引起边界层分离的计算结果。最后还给出收缩管道内激波由正激波逐步形成斜激波的非定常过程。

关键词 计算空气动力学, 激波, 收缩管道

Abstract The viscous laminar flow in the inlet is simulated by solving compressible Navier-Stokes equation. The partial differential equations are approximated by CSCM (Conservative Supra - Characteristics Method). The problems of the interaction among the shock wave systems and the interaction between shock and boundary layer in the inlet are researched. The computed results are compared with experiment results. The influences of Mach number in the flow can be seen in the computed results. The smaller Mach number is, the larger the shock angle in the inlet. The shock waves become weak with twice intersections and one reflection. The Reynold number also influences the flow in the inlet. The results of separation in boundary layer due to the interaction between shock and boundary are obtained

Key words computational aerodynamics, shock wave, inlet

对飞行器外流场及内流场的数值模拟已有许多处理方法, 但在波系干扰、分离流和边界层流动中常遇到困难, 需做特殊处理。Movetti 等人^[1]一直主张使用气动方程的特征理论。Chakravarthy^[2]在其非守恒分裂系数矩阵(SCM)方法中采用了特征理论, 并进行了特征边界处理。Roe^[3]提出一种称为通量差分(Flux Difference Splitting)的差分方法。其基本思想是决定差分稳定方向的特征值由相邻点上某种平均值所决定。这种方法满足 U-特性, 因此有很强的捕捉激波的能力。

CSCM 方法^[4]是在上述方法基础上并克服它们的缺点而产生的。采用特征理论使边界

1991 年 12 月 12 日收到, 1992 年 7 月 13 日收到修改稿

上和内点的差分格式保持一致, 保证了数值精度且收敛速度快。采用格式整体守恒, 满足 U-特性时, 有很强的捕捉激波能力。Lombard 等人^[5]将 CSCM 方法进一步发展为 CSCM-S 空间推进迭代方法。其离散方程为强主对角线占优, 收敛速度快。计算结果表明该方法具有收敛速度快, 捕捉激波能力强等特点。

在航空发动机进气道及燃烧室设计中常涉及收缩管道中可压流动问题。其中波系复杂, 存在波系干扰及激波边界层干扰等现象。CSCM 能较好地对其进行模拟。计算中为增大时间步长, 提高 CHL 数, 在粘性项上用算子附加修正法^[6]进行处理。

1 控制方程

计算域和物理平面的坐标关系式为

$$\tau = t, \quad \xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \tag{1}$$

经过坐标变换, 无量纲可压缩 N-S 方程为

$$\partial U / \partial \tau + \xi_x \partial (E - E_v) / \partial \xi + \xi_y \partial (F - F_v) / \partial \xi + \eta_x \partial (E - E_v) / \partial \eta + \eta_y \partial (F - F_v) / \partial \eta = 0 \tag{2}$$

$$U = [\rho, \rho u, \rho v, e_t]^T, \quad E = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (e_t + p)u]^T$$

$$F = [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (e_t + p)v]^T, \quad E_v = [0, \sigma_{xx}, \tau_{xy}, m_x]^T$$

$$F_v = [0, \tau_{yx}, \sigma_{yy}, m_y]^T$$

其中 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{yx}, m_x$ 和 m_y 为粘性应力和热传导项; $p = \rho T / \gamma Ma_\infty^2$ 为状态方程; ρ 为密度, u, v 为 x, y 方向的速度分量。

2 数值方法

2.1 差分方程

采用文献[4]中的 CSCM 方法, N-S 方程的差分方程为

$$[I + \bar{A}_{i-1}^+ \nabla_\xi + \bar{A}_i^- \Delta_\xi + \bar{B}_{j-1}^+ \nabla_\eta + \bar{B}_j^- \Delta_\eta] \delta q_{ij}^{n+1}$$

$$= \text{RHS} - \bar{A}_{i-1}^+ \nabla_\xi q^n - \bar{A}_i^- \Delta_\xi q^n - \bar{B}_{j-1}^+ \nabla_\eta q^n - \bar{B}_j^- \Delta_\eta q^n \tag{3}$$

其中

$$\bar{A}^\pm = \bar{M} \bar{T} D^\pm \Lambda_\xi \bar{T}^{-1} \bar{M}^{-1}, \quad \bar{B}^\pm = \bar{M} \bar{T} D^\pm \Lambda_\eta \bar{T}^{-1} \bar{M}^{-1} \tag{4}$$

传输矩阵 $\bar{M}, \bar{T}, \bar{M}^{-1}$ 和 \bar{T}^{-1} 上面的“-”符号表示两点平均的差分

$$\Delta ab = \bar{a} \Delta b + \bar{b} \Delta a \tag{5}$$

$$\delta q^{n+1} = q^{n+1} - q^n, \quad \nabla q_i = q_i - q_{i-1}, \quad \Delta q_i = q_{i+1} - q_i$$

$$\delta q = [\delta \rho \quad \delta(\rho u) \quad \delta(\rho v) \quad \delta e_t]^T \quad \text{守恒变量}$$

$$\delta \tilde{q} = [\delta \rho \quad \rho \delta u \quad \rho \delta v \quad \delta p]^T \quad \text{非守恒变量}$$

$$\delta \tilde{\tilde{q}} \quad \text{特征变量}$$

它们之间的关系为

$$\delta \tilde{q} = \bar{T}^{-1} \delta \bar{q} = \bar{T}^{-1} M^{-1} \delta q \tag{6}$$

Λ 为流通量的特征值, 对角矩阵 $\Lambda = \text{diag}[u, \quad u, \quad u+c, \quad u-c]$

$$D^\pm = (\Lambda / |\Lambda| \pm I) / 2 \quad I \text{ 为单位矩阵} \tag{7}$$

(3) 式中 RHS 表示方程 (2) 粘性项在 n 时间层上的差分格式, 用二阶中心差分构造。为了增大时间步长, 用文献 [6] 中的算子附加修正方法对粘性项进行隐式处理

$$\tilde{A}^\pm = \bar{A}^\pm \pm \sigma_\zeta I, \quad \tilde{B}^\pm = \bar{B}^\pm \pm \sigma_\eta I \tag{8}$$

其中

$$\sigma_\zeta = \max\{0, 2r\mu / PrRe\Delta x \xi_i - \Delta x \xi_i / \Delta t\}$$

$$\sigma_\eta = \max\{0, 2r\mu / PrRe\Delta y \eta_i - \Delta y \eta_i / \Delta t\}$$

用文献[5]中的 CSCM-S 空间推进方法, 方程(3)可写为

$$\begin{aligned} & [I + \tilde{A}_{i-1}^- - \tilde{A}_i^- + \tilde{B}_{j-1}^+ \nabla_\eta + \tilde{B}_j^- \Delta_\eta] \delta q_{ij}^n \\ & = \text{RHS} - \tilde{B}_{j-1}^+ \nabla_\eta q^n - \tilde{B}_j^- \Delta_\eta q^n - \tilde{A}_{i-1}^- (q_i^n - q_{i-1}^n) - \tilde{A}_i^- \Delta_\zeta q^n \end{aligned} \tag{9a}$$

$$\begin{aligned} & [I + \tilde{A}_{i-1}^- - \tilde{A}_i^- + \tilde{B}_{j-1}^+ \nabla_\eta + \tilde{B}_j^- \Delta_\eta] \delta q_{ij}^{n+1} \\ & = \text{RHS} - \tilde{B}_{j-1}^+ \nabla_\eta q^n - \tilde{B}_j^- \Delta_\eta q^n - \tilde{A}_{i-1}^- (q_i^{n+1} - q_i^n) - \tilde{A}_i^- \nabla_\zeta q^n \end{aligned} \tag{9b}$$

以上是对 CSCM 方法及算子附加修正方法的简略介绍。详细推导见文献[4]和文献[6]。用上述方法在 ζ 方向进行空间推进; 在 η 方向进行三对角块方程组求解; 并在每个推进步进行内迭代。对于超音速占主导的流动可只沿流动方向推进。空间差分用二阶三点差分格式。

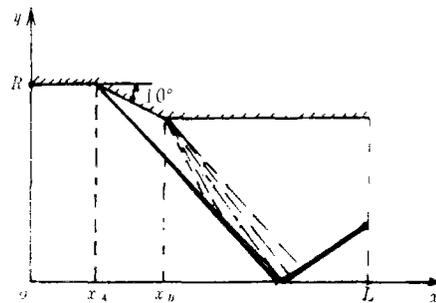


图 1 计算模型

2.2 边界条件

CSCM 方法在边界上用特征关系做为辅助边界条件^[7]。采用文献[8]中的计算模型(图 1)进行计算; L (特征长度)=1, $R=0.2$, $x_a=0.2$, $x_b=0.4$, $\theta=10^\circ$; 计算网格如图 2 所示。对此计算模型固壁上用无滑边界条件和绝热壁边界条件; 入口用来流条件; 中轴线上用对称条件; 出口沿流向外推。

3 计算结果及分析

为了清楚地反映流场细节, 在各图中将 y 方向尺度扩大为 2.5 倍。流场精度为 $|\Delta q / \Delta t|_{\text{平均}} \leq 10^{-5}$, $|\Delta q / \Delta t|_{\text{最大}} \leq 10^{-4}$ 。

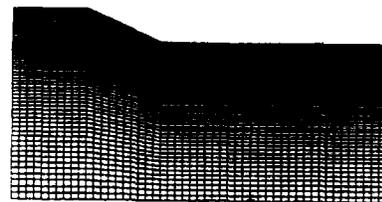


图 2 计算网格图

首先计算 $Ma=5.0$, $Re=1.2 \times 10^5$ 层流情况, 所得压力分布同文献[8]中的结果进行了比较(图 3)。

本文计算结果由于在入口处用来流条件而引起一个小扰动。流动中流体在压缩角处被压

缩，物面压力升高，经膨胀后压力恢复到来流值；中轴线上流动经相交的激波后压力升高而后经膨胀下降。图 4 给出不同 Ma 数和不同 Re 数的计算结果，由图可看出 CSCM 方法很好地模拟了流动中压缩角处激波边界层干扰及中轴线处激波相交及同侧激波与膨胀波相互干扰使激波变弱变弯的流动情况(图 4(c))。还可看出激波角随着 Ma 数增大逐渐变小；在 $Ma=1.8$ 和 2.0 时激波角较大，可看到激波经两次相交一次反射逐渐变弱的情况图 (4(a)和图 4(b))；随 Ma 数增大激波强度也增加(图 4(a)~图 4(d))等等，完全符合流体流动规律。图 4(e)给出 $Re=1.2 \times 10^4$ 时的等压线图。比较图 4(c)和图 4(e)可看到随着流体粘性作用增大，边界层厚度增加使压缩角处激波边界层干扰增加且膨胀减弱，激波受膨胀波影响的变弯程度减小。图 4(f)还给出 $Ma=5.0, Re=1.2 \times 10^5$ 时的速度矢量图。

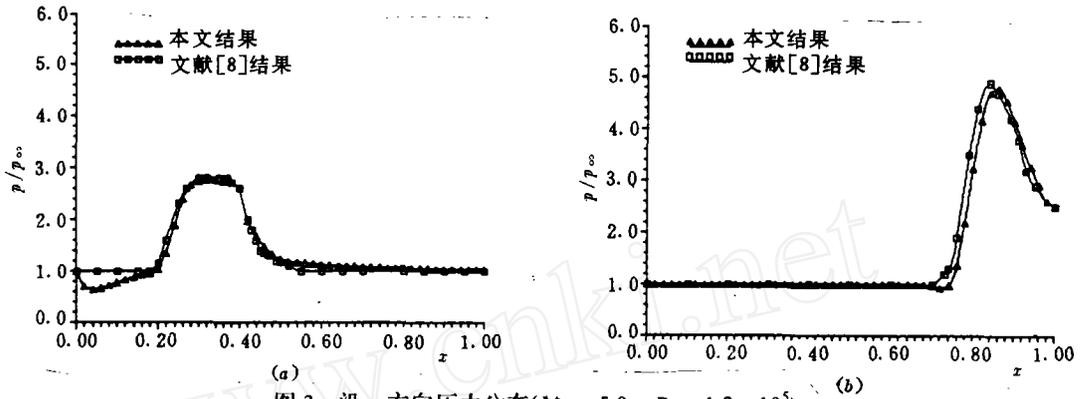


图 3 沿 x 方向压力分布($Ma=5.0, Re=1.2 \times 10^5$)

(a)上物面 (b)中轴线

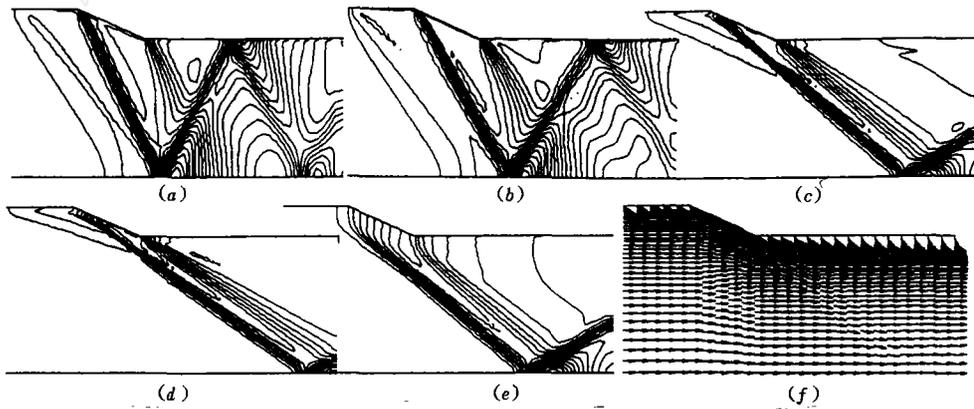


图 4 不同 Ma 数和不同 Re 数计算结果

- (a) $Ma=1.8, Re=1.2 \times 10^5$ 等压线
- (b) $Ma=2.0, Re=1.2 \times 10^5$ 等压线
- (c) $Ma=5.0, Re=1.2 \times 10^5$ 等压线
- (d) $Ma=7.0, Re=1.2 \times 10^5$ 等压线
- (e) $Ma=5.0, Re=1.2 \times 10^4$ 等压线
- (f) $Ma=5.0, Re=1.2 \times 10^5$ 速度矢量图

将图 1 计算模型的中轴线改为固壁，并计算了 $Ma=2.0, Re=1.2 \times 10^4$ 时的流动情况，以研究平板上激波边界层干扰情况。计算网格如图 5 所示。由计算结果(图 6)可明显看出由激波边界层干扰引起的壁面附近的流动分离。

最后对 $Ma=5.0, Re=1.2 \times 10^5$ 情况还计算了非定常过程。不同时刻等压线图 7 所示。静止流场经入口处流动的影响流速不断增加，在压缩角处产生一道激波(图 7(a))；

由于流速不大,在管的一侧产生三道激波相互作用情况(图7(b));而后随着流速增大中间的正激波逐渐消失,只剩两道激波(图7(c)),最后达到定常流场(图4(c))。

从上述结果可知,CSCM方法能够很好地模拟激波相互作用,激波与膨胀波相互作用及激波边界层干扰等流动结果,是一种捕捉激波能力强,数值精度高的数值方法,值得推广应用。

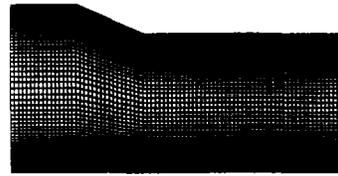


图5 中轴线改为固壁时的计算网格

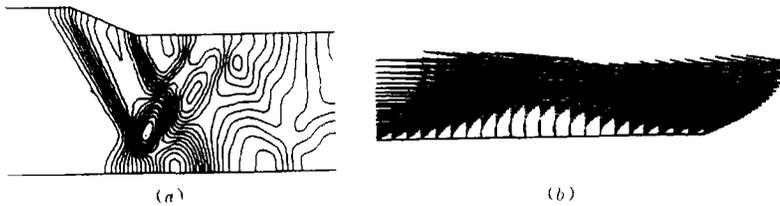


图6 $Ma=2.0$, $Re=1.2 \times 10^4$ 时的计算结果(中轴线为固壁时)

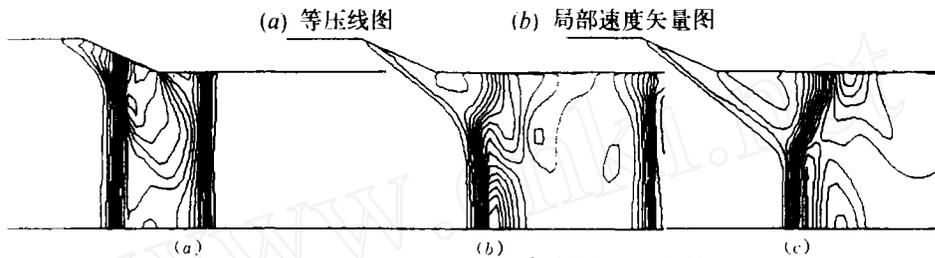


图7 $Ma=5.0$, $Re=1.2 \times 10^6$ 时非定常过程等压线

参 考 文 献

- 1 Movetti Gino. Invited Talk, Computational Fluid Dynamics Conference. Williamsburg, VA, 1979.
- 2 Chakravarthy C R. Euler Equations—Implicit Schemes and Boundary Condition. AIAA J, 1983, 21: 699~706
- 3 Roe P L. The Use of the Riemann Problem in Finite-Difference Schemes. Seventh-International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, 1981, 141: 354~359
- 4 Lombard C K. Conservative Supra-Characteristics Method for Splitting the Hyperbolic Systems of Gasdynamics for Real and Perfect Gases. NASA CR-166307 1982.
- 5 Lombard C K, Venkatapathy E, Bardina J. Universal Single Level Implicit Algorithm for Gasdynamics. AIAA Paper 84-1533, 1984.
- 6 马延文, 傅德薰. 数值求解Navier-Stokes方程的一种新的矩阵分裂方法. 计算物理, 1985, (2): 129~136
- 7 Lombard C K, Olinger J, Yang J Y, Davy W C. Conservative Supra-Characteristics Method for Splitting the Hyperbolic Systems of Gasdynamics with Computed Boundaries for Real and Perfect Gases. AIAA 82-0837, 1982.
- 8 Lombard C K, Bardina J, Venkatapathy E. Multi-Dimensional Formulation of CSCM—An Upwind Flux Difference Navier-Stokes Equations. AIAA Paper 83-1985, 1983.