正交各向异性材料 HRR 场控制方程*

李松涛　王自强

（中国科学院力学研究所，北京 100080）

关键词　各向异性、非线性、守恒积分

一、本构关系[1]

考虑 Ramberg-Osgood 材料，其剪应力-剪应变关系为

$$\gamma = \tau + \alpha\tau^n, \tag{1}$$

本文所有应力分量均用剪切屈服强度 τ_y 无量纲化，所有应变分量均用剪切屈服应变 γ_y 无量纲化．设坐标轴 x_1, x_2, x_3 方向沿着材料塑性正交各向异性主轴．加载函数 Φ[1]

$$\Phi(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2. \tag{2}$$

广义应力偏量

$$S_{ij}^* = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}}. \tag{3}$$

塑性本构关系为[2]

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2}\alpha\tau_e^{n-1}S_{ij}^*, \tag{4}$$

式中 τ_e 是广义的等效剪应力：

$$\tau_e = \sqrt{\Phi(\sigma_{ij})}. \tag{5}$$

二、平面应变裂纹问题

平面应变条件

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{33} = 0, \tag{6}$$

由此导出

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, \tag{7}$$

$$(F + G)\sigma_{33} = (G\sigma_{11} + F\sigma_{22}) - \frac{\varepsilon_{33}^e}{\alpha\tau_e^{n-1}}.$$

讨论硬化系数 $n > 1$ 的情况．在裂纹顶端附近，考察上式各项的奇性强度，在渐近意义上，我们有

$$\sigma_{33} = (G\sigma_{11} + F\sigma_{22})/(F + G). \tag{8}$$

本文 1990 年 3 月 13 日收到．

* 国家自然科学基金资助项目．

加载函数简化为

$$\Phi = \tau_e^2 = \frac{q}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2, \tag{9}$$

其中 $\frac{q}{4} = \frac{FG}{F+G} + H$.

塑性应力应变关系简化为

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^p = -\varepsilon_{22}^p = \frac{\alpha}{2}\tau_e^{n-1}S_{11}^*, \\ \varepsilon_{12}^p = \frac{\alpha}{2}\tau_e^{n-1}\sigma_{12}, \end{cases} \tag{10}$$

式中 $S_{11}^* = \frac{q}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})$.

考虑裂纹沿材料主轴 x_1 的情况. 应力函数取如下形式:

$$\phi = Kr^{s+2}\tilde{\phi}(\theta),\ s = -\frac{1}{n+1}, \tag{11}$$

则有公式[2]

$$\sigma_{ij} = Kr^s\tilde{\sigma}_{ij}(\theta), \tag{12}$$

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_r = \tilde{\phi}^{\cdot\cdot} + (s+2)\tilde{\phi}, \\ \tilde{\sigma}_\theta = (s+2)(s+1)\tilde{\phi}, \\ \tilde{\tau}_{r\theta} = -(s+1)\tilde{\phi}^{\cdot}, \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r^p = -\varepsilon_\theta^p = \alpha K^n r^{ns}\tilde{\varepsilon}_r^p(\theta), \\ \varepsilon_{r\theta}^p = \alpha K^n r^{ns}\tilde{\varepsilon}_{r\theta}^p(\theta), \end{cases} \tag{14}$$

$$\tilde{\varepsilon}_r^p = \frac{\tilde{\tau}_e^{n-1}}{2}\left[\frac{(\tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}_\theta)}{2}(q\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) - \frac{q-1}{2}\tilde{\tau}_{r\theta}\sin 4\theta\right],$$

$$\tilde{\varepsilon}_{r\theta}^p = \frac{1}{2}\tilde{\tau}_e^{n-1}\left[\tilde{\tau}_{r\theta}(q\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) - \frac{q-1}{2}\tilde{S}_r\sin 4\theta\right],$$

$$\tilde{\tau}_e^2 = q(\tilde{S}_r\cos 2\theta - \tilde{\tau}_{r\theta}\sin 2\theta)^2 + (\tilde{S}_r\sin 2\theta + \tilde{\tau}_{r\theta}\cos 2\theta)^2.$$

另有

$$\begin{cases} u_r = \alpha K^n r^{ns+1}\tilde{u}_r(\theta), \\ u_\theta = \alpha K^n r^{ns+1}\tilde{u}_\theta(\theta); \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_r = \frac{1}{(ns+1)}\tilde{\varepsilon}_r^p, \\ \tilde{u}_\theta = \frac{1}{ns}(2\tilde{\varepsilon}_{r\theta}^p - \tilde{u}_r^{\cdot}). \end{cases} \tag{16}$$

三、新的定解方程和函数方程

如图 1 所示,研究闭合迴路 $ABCDE$ 上的 J 积分. 我们有

$$\oint_{ABCDE}\left\{Wn_1 - p_i\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right\}ds = 0, \tag{17}$$

公式(17)中,在裂纹面 EA 上的积分为零. 在弧 AB 和 CDE 上的积分主项相抵消, 只剩

下高阶小量．因此，当 r_1, r_2 趋于零时，有

$$\int_{BC}\left(Wn_1 - p_i\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right)ds \to 0;$$

另一方面

$$\int_{BC}\left(Wn_1 - p_i\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right)ds \doteq \Pi(\theta)\ln(r_2/r_1).$$

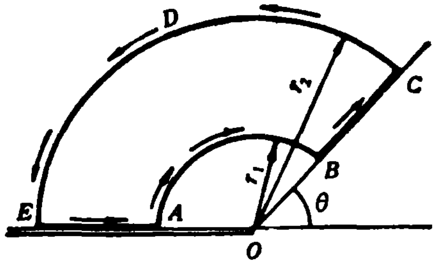

图 1

让 r_1, r_2 同时趋于零，而比值 r_2/r_1 保持不变，就导致下述方程：

$$\Pi(\theta) = \Pi_1(\theta)\sin\theta + \Pi_2\cos\theta + (1+ns)\tilde{u}_\theta\Pi_3(\theta) = 0, \tag{18}$$

式中 $\tilde{\sigma}_e^2 = 3\tilde{\tau}_e^2$,

$$\Pi_1 = \frac{n}{1+n}\tilde{\sigma}_e^{1+n} - (\tilde{\sigma}_\theta\tilde{\varepsilon}_\theta^p + \tilde{\tau}_{r\theta}2\tilde{\varepsilon}_{r\theta}^p),$$

$$\Pi_2 = (1+ns)\tilde{u}_r\tilde{\tau}_{r\theta},$$

$$\Pi_3 = \tilde{\sigma}_\theta\cos\theta + \tilde{\tau}_{r\theta}\sin\theta.$$

函数方程(18)与王克仁、王自强[3]对各向同性幂硬化材料导出的公式一致．

由(18)式立即推得

$$\tilde{\varepsilon}_r' = ns(\Pi_1\sin\theta + \Pi_2\cos\theta)/\Pi_3 + 2(1+ns)\tilde{\varepsilon}_{r\theta}, \tag{19}$$

方程(19)即是新的定解方程．它是一个关于 $\tilde{\phi}$ 的三阶非线性常微分方程．而原有的定解方程则是一个四阶非线性常微分方程．

精确的数值计算表明，当 $\Pi_3 \neq 0$，方程(19)确实与原方程控制等价．

类似的利用 J_2 积分，我们可导得如下函数方程：

$$\Pi^*(\theta) = \Pi_1\cos\theta - \Pi_2\sin\theta + (1+ns)\tilde{u}_\theta\Pi_3^* = \Pi^*(\pi), \tag{20}$$

式中

$$\Pi_3^*(\theta) = -\tilde{\sigma}_\theta\sin\theta + \tilde{\tau}_{r\theta}\cos\theta. \tag{21}$$

函数方程(20)、(21)也可改写为

$$\begin{cases}\Gamma_1 = \Pi_3^*(\pi)\cos\theta, \\ \Gamma_2 = -\Pi_3^*(\pi)\sin\theta,\end{cases} \tag{22}$$

式中

$$\begin{cases}\Gamma_1 = \dfrac{n}{1+n}\tilde{\sigma}_e^{1+n} + [\tilde{\tau}_{r\theta}(\tilde{u}_\theta - \tilde{u}_r') - \tilde{\sigma}_\theta\tilde{\varepsilon}_\theta], \\ \Gamma_2 = (1+ns)(\tilde{\tau}_{r\theta}\tilde{u}_r + \tilde{\sigma}_\theta\tilde{u}_\theta).\end{cases} \tag{23}$$

参 考 文 献

[1] Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, London, 1950, 317.

[2] Pan, J. and Shik, C.F., *Mech. Materials*, 5(1986), 299.

[3] 王克仁、王自强，应用数学和力学，9(1987)，791.