第13卷 第1期　固体力学学报　Vol.13 №.1
1992年3月　ACTA MECHANICA SOLIDA SINICA　March 1992

关于Müller冷度理论的几点注记*

茹重庆　段祝平

(中国科学院力学研究所)

关键词　冷度，熵流，熵源，绝对温度，内变量理论

1. 引言

自六十年代初Coleman–Noll的开创性工作[4]以来，连续介质热力学蓬勃发展，其中一项重要进展就是冷度(coldness,中译见文〔2〕，郭仲衡译)概念的引入．西德学者I. Müller首先提出[1,3]，人们通常广泛采用(包括Coleman–Noll的工作)的经典熵流表达式

$$\vec{\Phi}=\vec{q}\,/\,T(\theta) \tag{1}$$

其中$\vec{q}$为热流向量，θ为经验温度，$T(\theta)$为绝对温度，可能只适用于热静力学或最简单物质．在热动力学情形，对更一般的介质，熵流$\vec{\Phi}$应设为待定本构量，因而应当与其他本构函数一样由本构限制(特别是熵不等式)来导出其可能的形式，而没有任何特殊理由先验地假定其具有形式(1)．在他本人及其合作者的一系列工作[1,3,5-8]中，他们成功地论证了，在一些较为一般的条件下(主要限于各向同性物质)，熵流必具有如下形式

$$\vec{\Phi}=\lambda(\theta,\dot{\theta})\vec{q} \tag{2}$$

其中"·"表示对时间的物质导数．Müller将函数$\lambda(\theta,\dot{\theta})$称为"冷度"，而且导出了用熵函数$\eta$和内能$\varepsilon$表示$\lambda(\theta,\dot{\theta})$的式子．由此，Müller学派得到了一系列重要而有趣的结果(例如，关于热传导问题)，可参见[3,4]等.

Müller本人及其学派的一个基本观点是，熵不等式应对一切所谓"热力学过程"都成立，而后者应满足质量、能量守恒式及运动方程式，从而受到严格的约束．他们的这一看法与熟知的Coleman–Noll理论不同，并被评论家们认为是与后者在方法上的主要差别[4]．我们认为，这显然是由于Müller最初研究的是热源$r=0$的特殊情形所致[3,8]．而后来Liu[5]等人虽然将其推广到r非零的一般情形，并设熵源φ具有形式

$$\varphi=\lambda r \tag{3}$$

这里λ为一待定本构量，但却仍然沿用了Müller的上述方法，并还为此提出了解除约束方程的所谓Lagrange乘子法[6]．现在，Müller学派已发展为连续介质热力学中的一个重要派别，受到许多评论家[2,4]的重视，而其重要特征之一就是考虑了约束方程并为之引入了众多的Lagrange乘子.

* 本文于1990年7月21日收到.

另外，如 Hutter 在[4]中所指出，Müller 理论的首要缺点是其推演太复杂，而且仅限于各向同性物质，对于较为复杂的介质要推广类似的方法"几乎是不可能的"，在这点上与熟知的 Coleman–Noll 理论相比大为逊色，这极大的削弱了该理论的价值.

本文指出，考虑约束方程并引入 Lagrange 乘子对 Müller 冷度理论其实并不必要，采用$\vec{q}$及 r 的任意性来解除约束是简化推演的重要技巧，借此可非常简捷地就导出 Müller 理论的全部结果，使其在方法上与 Coleman–Noll 理论统一起来，从而简化了 Müller 理论形式. 另外，针对更为一般的介质(包括各向异性情形)，本文建议用一待定本构函数的倒数代替绝对温度 $T(\theta)$来表示出$\vec{\Phi}$及 φ(参见下文中公式(36))，借此将冷度的概念推广到较为复杂的介质，以克服 Müller 理论的重大局限性.

2. 熵不等式

和 Müller 学派[4,5]相同，最一般地可设$\vec{\Phi}$与 λ 为待定本构量，而熵源 φ 为

$$\varphi = \lambda r \tag{4}$$

于是熵不等式为[4,9]

$$\dot{\eta} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \vec{\Phi} - \lambda r \geqslant 0 \tag{5}$$

利用能量方程式

$$\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \vec{q} - r = \frac{1}{\rho}\sigma{:}\dot{\mathrm{E}} \tag{6}$$

消掉 r 则(5)式成为

$$\dot{\eta} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \vec{\Phi} + \frac{\lambda}{\rho}\sigma{:}\dot{\mathrm{E}} - \dot{\varepsilon}\lambda - \frac{\lambda}{\rho}\nabla \cdot \vec{q} \geqslant 0 \tag{7}$$

此即本文中熵不等式的最一般形式. 按熵原理，它应对所有热力学过程成立. 这里 ρ 为密度，σ 为应力，E 为应变，ε 为内能.

若事先就假定有$\vec{\Phi} = \Lambda\vec{q}$，则将其代入(7)可得

$$\dot{\eta} - \lambda\dot{\varepsilon} - \frac{\lambda}{\rho}\quad \nabla \cdot \vec{q} + \frac{\Lambda\nabla \cdot \vec{q}}{\rho} + \frac{\vec{q} \cdot \nabla\Lambda}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho}\sigma{:}\dot{\mathrm{E}} \geqslant 0,$$

或可写成

$$\dot{\eta} - \lambda\dot{\varepsilon} + (\Lambda - \lambda)\frac{\nabla \cdot \vec{q}}{\rho} + \frac{\vec{q} \cdot \nabla\Lambda}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho}\sigma{:}\dot{\mathrm{E}} \geqslant 0 \tag{8}$$

进一步地，若事先即设有 $\Lambda = \lambda$，则(8)式成为

$$\dot{\eta} - \lambda\dot{i} + \frac{\vec{q} \cdot \nabla\lambda}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho}\sigma{:}\dot{\mathrm{E}} \geqslant 0 \tag{9}$$

这是本文中最简单形式的熵不等式.

下面本文将采纳 Coleman–Noll 认为$\vec{q}$、r 可按需要随意设置从而不必考虑能量方程及运动方程对所谓热力学过程限制的观点，首先研究 Müller 理论框架下的热弹性材料[3,8]，然后再考虑迄今尚未见研究过的内变量理论的类似问题.

3. 热弹性材料($\dot{\theta}$为本构自变量)

对固体材料，Müller 学派研究过的典型例子是热弹性材料[3]. 注意到质量守恒式同样不形成对热力学过程限制的这一事实[4]，故本文不考虑任何约束方程的限制，根据熵

原理，熵不等式(7)应对所有可能的热力学过程皆成立.

现有本构自变量为θ; $\dot{\theta}$; $\theta_{,i}$ 及 E_{ij}，这里“,i”表示对第i个空间坐标的偏导，本构函数为$\sigma, \eta, \varepsilon$ 及$\vec{q}$，再设熵流$\vec{\Phi}$和 λ 为

$$\vec{\Phi}(\theta;\ \dot{\theta};\ \theta_{,i};\ E_{ij})$$
$$\lambda(\theta;\ \dot{\theta};\ \theta_{,i};\ E_{ij}) \tag{10}$$

亦为待定本构量，而熵源 φ 由(4)式表出.

由于不考虑约束方程的限制，故对任何固定的空间点$\vec{x}$及时刻t，下列诸量是相互独立的，可随意无关地取值[3]

$$\theta;\ \dot{\theta};\ \theta_{,i};\ E_{ij};\ \ddot{\theta};\ \dot{\theta}_{,i};\ \theta_{,ij};\ \dot{E}_{ij};\ E_{ij,k} \tag{11}$$

于是，将所有本构函数代入(7)式，按其中的运算符号展开，则不等式左边将出现下列诸项

$$\frac{1}{\rho}(\vec{\Phi}_{i,\theta_{,j}} - \lambda\vec{q}_{i,\theta_{,j}})\theta_{,ij} \tag{12}$$

$$\frac{1}{\rho}(\vec{\Phi}_{i,E_{kl}} - \lambda\vec{q}_{i,E_{kl}})E_{kl,i} \tag{13}$$

亦即$\theta_{,ij}$及$E_{kl,i}$的线性项，注意对应系数中不包含这些量，而且不等式左边其余项也不包含$\theta_{,ij}$及$E_{kl,i}$，因此，由(11)式中诸值在任意固定点及固定时刻取值的独立性及任意性，可知为使(7)式成立，(12，13)式中$\theta_{,ij}$及$E_{kl,i}$的系数必须为零，但注意到$\theta_{,ij}=\theta_{,ji}$和 $E_{kl,i}=E_{lk,i}$，于是有

$$(\vec{\Phi}_{i,\theta_{,j}} + \vec{\Phi}_{j,\theta_{,i}}) = \lambda(\vec{q}_{i,\theta_{,j}} + \vec{q}_{j,\theta_{,i}}) \tag{14}$$

$$(\vec{\Phi}_{i,E_{kl}} + \vec{\Phi}_{i,E_{lk}}) = \lambda(\vec{q}_{i,E_{kl}} + \vec{q}_{i,E_{lk}}) \tag{15}$$

此即对熵流$\vec{\Phi}$的本构限制式，它显然等价于[3]中考虑约束方程时所得的基本结果(参见[3]中公式(3·20)及(3·21)，[3]中其余公式(3·17—3·19)由$\dot{E}_{ij}$，$\ddot{\theta}$ 及$\dot{\theta}_{,i}$的系数应为零可得). 显然，这里的推演非常简捷.

正如[3]中指出的那样，对一般介质关系式(14，15)尚不足以导出更具体的$\vec{\Phi}$和λ的本构限制，因此与[3]类似考虑各向同性物质. 此时可证(参见[3]中公式(4·1)的推导)，$\vec{\Phi}$必然具有如下形式

$$\vec{\Phi} = \lambda\vec{q} \tag{16}$$

而 λ 满足限制条件

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_{,i}} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial E_{ij}} = 0 \tag{18}$$

而熵不等式成为

$$\dot{\eta}-\lambda\dot{\varepsilon}+\frac{\vec{q}\cdot\nabla\lambda}{\rho}+\frac{\lambda}{\rho}\sigma:\dot{\mathrm{E}}\geqslant 0 \tag{19}$$

将其展开，因为$\dot{E}_{ij}$，$\ddot{\theta}$及$\dot{\theta}_{,i}$的系数应分别为零，由此可得

$$\frac{\partial\eta}{\partial E_{ij}}-\lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial E_{ij}}+\frac{\lambda}{\rho}\sigma_{ij}=0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\dot{\theta}}-\lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial\dot{\theta}}=0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\theta_{,i}}-\lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta_{,i}}+\frac{q_i}{\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{\theta}}=0 \tag{22}$$

及不等式

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial\theta}-\lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\right)\dot{\theta}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\vec{q}\cdot\nabla\theta\geqslant 0 \tag{23}$$

此即[3]中全部结果，显然，由于本文方法避免了约束方程带来的麻烦，使推导过程更加简捷，可直接得到最终结果，特别，若我们增加本构自变量(例如[7]，把高阶量$\ddot{\theta}$，$\dddot{\theta}\cdots$等纳入自变量)，则本文方法的优越性更加显著.

这里总结一下上述结果的含义，(16—18)式意味着$\vec{\Phi}$及φ应由同一个本构函数$\lambda(\theta;\ \dot{\theta})$表出，即

$$\vec{\Phi}=\lambda(\theta;\ \dot{\theta})\vec{q} \tag{24}$$

$$\varphi=\lambda(\theta;\ \dot{\theta})r \tag{25}$$

这样就由熵原理导出了$\vec{\Phi}$及φ可能具有的形式，而不是象文[1]那样先验地假定它们的形式.

这里不拟介绍上述公式(16—18，20—23)的一些重要推论(详见[3])，只指出，由(21)式可知

$$\lambda=\left(\frac{\partial\eta}{\partial\dot{\theta}}\right)\bigg/\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\dot{\theta}}\right),\qquad \text{当}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\dot{\theta}}\neq 0\text{时} \tag{26}$$

这里诸本构函数对$\dot{\theta}$的依赖是重要的. 非常有趣的是，通常的热弹性理论并不包含$\dot{\theta}$作为本构自变量，此时 Müller 理论是否可以推广，其形式又如何，我们将在下节讨论此问题.

4. 热弹性材料($\dot{\theta}$非本构自变量)

此时设θ; $\theta_{,i}$; E_{ij}为本构自变量[8]，熵流$\vec{\Phi}$为

$$\vec{\Phi}(\theta;\ \theta_{,i};\ E_{ij}) \tag{27}$$

而熵源为

$$\varphi=\lambda(\theta;\ \theta_{,i};\ E_{ij})r \tag{28}$$

代人不等式(7)，与(12,13)相似，因$\theta_{,ij}$和$E_{ij,k}$的系数应为零，即得形式与(14,15)相同的式子.

与[8]类似，限于考虑各向同性物体，则由此可推出

$$\vec{\Phi}=\lambda\vec{q} \tag{29}$$

其中$\lambda(\theta)$只依赖于温度θ. 再因$\dot{E}_{ij}$，$\dot{\theta}$及$\dot{\theta}_{,i}$的系数应为零，继而得

$$\frac{\partial\eta}{\partial E_{ij}}-\lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial E_{ij}}+\frac{\lambda}{\rho}\sigma_{ij}=0 \tag{30}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\theta}-\lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}=0 \tag{31}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\theta_{,i}}-\lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta_{,i}}=0 \tag{32}$$

及不等式

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\frac{q_i\theta_{,i}}{\rho}\geqslant 0 \tag{33}$$

从而很简捷地推出[8]中全部结果(见[8]中公式(2·9)).

可见，即使$\dot{\theta}$非本构自变量，Müller 理论仍可推广，只是冷度 $\lambda(\theta)$的表达式成为

$$\lambda=\left(\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\right)\Big/\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\right) \tag{34}$$

若设$q_i\theta_{,i}\leqslant 0$，则由(33)式可知

$$\frac{d\lambda}{d\theta}\leqslant 0 \tag{35}$$

由上述可知，Müller 理论严格说来仅限于各向同性物体. 为向复杂介质推广，本文作者在[10]中相当广泛地研究了熵流$\vec{\Phi}$应具有的形式，发现$\vec{\Phi}$通常应与$\vec{q}$有比例关系，而这纯量比例因子恰好就是(28)式中的 λ. 回忆经典热静力学中$\vec{\Phi}$及 φ 也有相似的关系式

$$\vec{\Phi}=\vec{q}\,/\,T, \qquad \varphi=r\,/\,T,$$

故我们建议研究具有以下关系式

$$\vec{\Phi}=\lambda\vec{q}, \qquad \varphi=\lambda r \tag{36}$$

的一类复杂介质，并将 Müller 理论向其推广. 根据[10]中结果，(36)式概括了相当广泛的一类复杂介质. 下面我们就以这类介质为限来研究内变量理论框架下的冷度函数.

5. 内变量理论中的冷度函数

设本构自变量为E_{ij}，θ 及 $\theta_{,i}$，再加上内变量$\vec{P}=\{P_\alpha\}$[9]，其演化方程为

$$\dot{P}_\alpha=f_\alpha(E_{ij};\ \theta;\ \theta_{,i};\ P_\alpha) \tag{37}$$

然后令(36)式成立，其中 λ 为

$$\lambda(\dot{\theta};\ \theta_{,i};\ E_{ij};\ P_\alpha) \tag{38}$$

代入熵不等式(9)，将其展开得

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial E_{ij}}-\lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial E_{ij}}+\frac{\lambda}{\rho}\sigma_{ij}\right)\dot{E}_{ij}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial\theta}-\lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\right)\dot{\theta}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial\theta_{,i}}-\lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta_{,i}}\right)\dot{\theta}_{,i}+\frac{q_k}{\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial E_{ij}}E_{ij,k}$$
$$+\frac{q_j}{\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_{,i}}\theta_{,ij}+\frac{q_i}{\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial P_\alpha}P_{\alpha,i}+\frac{q_i\theta_{,i}}{\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial P_\alpha}-\lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial P_\alpha}\right)f_\alpha\geqslant 0 \tag{39}$$

首先，由$\theta_{,ij}$，$E_{ij,k}$ 及 $P_{\alpha,i}$ 的系数应为零，即知 λ 不依赖于$\theta_{,i}$，P_α 和 E_{ij}，而只是温度 θ 的函数，即

$$\frac{\partial\lambda}{\partial E_{ij}}=0,\ \frac{\partial\lambda}{\partial\theta_{,i}}=0,\ \frac{\partial\lambda}{\partial P_\alpha}=0 \tag{40}$$

再由$\dot{E}_{ij}$，$\dot{\theta}$ 及$\dot{\theta}_{,i}$的系数应为零，可得

$$\frac{\partial\eta}{\partial\theta}-\lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}=0 \tag{41}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\theta_{,i}}-\lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta_{,i}}=0 \tag{42}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial E_{ij}}-\lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial E_{ij}}+\frac{\lambda}{\rho}\sigma_{ij}=0 \tag{43}$$

及不等式

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial P_\alpha}-\lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial P_\alpha}\right)f_\alpha+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}q_i\theta_{,i}\geqslant 0 \tag{44}$$

这样，我们可以把冷度概念非常简单地推广到内变量理论中去，而且不限于考虑各向同性物体．当然，若有必要，也可以考虑$\dot{\theta}$为本构自变量的情形，这在某些情形中是饶有兴趣的．

(41—43)及(44)与通常内变量理论中的诸本构限制式相似．若$q_i\theta_{,i}\leqslant 0$，则有

$$\frac{d\lambda}{d\theta}\leqslant 0 \tag{45}$$

即$\lambda(\theta)$是θ的递减函数．

通过这个简单的例子，我们看到对较为一般的复杂介质，只要关系式(36)成立，我们就可以由熵不等式非常简捷地导出对λ的本构限制，从而把 Müller 理论中冷度的概念加以推广，并由此导出复杂介质本构关系的一些重要结论．

本课题得到国家自然科学基金委 9187004 项目的资助，对此，作者深表感谢．

参 考 文 献

〔1〕 Müller, I, Arch. Rational. Mech. Anal., 26(1967),118−141.

〔2〕 Germain, P., Nguyen, Q. S., Suguet, P., 连续介质热动力学，见应用力学最新进展，郭仲衡等译，科学出版社，(1987).

〔3〕 Müller, I., Arch. Rational. Mech. Anal., 41, (1971), 319−332.

〔4〕 Hutter, K., Acta Mechanica, 27,(1977), 1−54.

〔5〕 Liu,I. S, Arch. Rational. Mech. Anal., 50, (1973), 111−117.

〔6〕 Liu, I. S, Arch. Rational. Mech. Anal., 46, (1972), 131−148.

〔7〕 Batra,R. C, Arch. Rational. Mech. Anal., 53, (1974), 359−367.

〔8〕 Müller, I., Entropy in Non−equilibrium−a Challenge to Mathematicians, Trends. of Applications of pure Mathematics to Mechanics, II ,(1979).

〔9〕 Coleman, B. D. and Gurtin,M. E., J. Chem. Phys., 47, (1967),597.

〔10〕 Ru, C. Q. and Duan,Z. P., Proceedings of ICCLEM,(国际工程材料本构关系会议文集), 中国重庆，(1989).

SOME REMARKS ON THE COLDNESS FUNCTION IN MüLLER THEORY

Ru Chongqing Duan Zhuping

(LNM, Institute of Mechanics, CAS, Beijing)

Key words

the coldness, entropy flux, entropy supply, absolute temperature, theory of internal variables