

Kármán 涡街中旋涡三维变形的初步研究

凌国灿 郭亮 武作兵

中国科学院力学研究所, 北京(邮政编码 100080)

马晖扬

中国科学技术大学, 安徽合肥(邮政编码 230026)

摘要 本文用涡动力学及LIA方法作为基本理论模型, 数值研究了尾迹中孤立涡和细涡丝的三维演化规律。结果表明, 圆柱分离尾迹中的旋涡存在三维不稳定性。卡门涡在尾迹平均流场中演化产生三维的类似于马蹄形-勺子形的流场结构。细涡丝在涡瓣区的三维演化形成趋向流场最大拉伸变形方向的流向涡结构。

关键词 圆柱尾迹, 三维变形, 流向涡, 旋涡动力学。

引言

近年来对湍流平面自由剪切层的演化的研究取得了重要进展, 对其相干涡结构的形成以及三维演化有了深入的了解。实验同样观察到二维钝体分离尾迹中旋涡具有三维特性。Williamson^[1]的实验观察表明, 在圆柱尾迹卡门涡街流场中的大尺度旋涡结构上, 存在着“λ”形三维流向小尺度旋涡结构。Yamane et al.^[2]和 Shirakashi et al.^[3]的实验研究表明, 在圆柱湍流尾迹的形成过程中, 卡门涡发生断裂形成有限长度的涡段, 这些卡门涡段逐步发生变形直至形成“勺子”形的流向涡结构。另外, 实验发现绕二维钝物体的分离尾迹流动中, 从物面边界层脱落到尾涡中的涡量有相当程度的损失, 原因大体上是由于涡量的粘性耗散及涡量在三维方向的重新分布。目前, 对三维结构的特征和其产生机制还没有得到比较一致和清楚的认识。因此, 从理论和数值方法上对圆柱分离尾迹流动进行分析, 了解旋涡三维演化机制和动力学过程, 对理解尾迹中湍流的发展过程、初期结构具有重要意义和一定的应用背景。

近年来, Ashurst 和 Meiburg^[4]及 Meiburg 和 Lasheras^[5]用三维涡动力学方法有效地模拟了平面自由剪切层及平面尾迹的二维和三维不稳定性演化, 并得到和实验相符的结果, 表明在流动的初始发展过程中, 大尺度旋涡形成以及旋涡三维不稳定性发展的许多重要特性可以由以无粘假设为基础的涡动力学方法再现。因此, 本文以无粘涡动力学理论为基本理论模型, 数值模拟受扰动涡丝在无界不可压缩尾迹流场中的演化, 着重了解卡门涡街中旋涡的三维演化机制、动力学过程和结构特征。考察三种典型流动环

境中旋涡的变化: 1. 圆柱远尾迹湍流时间平均流场中 Kármán 涡受到三维小扰动后的发展变化; 2. Kármán 涡街中孤立涡在当地流场中的三维演化; 3. Kármán 涡街中自由驻点附近三维涡丝的演化。

一、数学描述

无界不可压缩流场中的涡丝对空间某一点 p 的诱导速度可由经典的 Biot-Savart 公式给出

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{[\vec{x} - \vec{r}(s, t)] \times d\vec{s}}{|\vec{x} - \vec{r}(s, t)|^3} \quad (1)$$

式中 \vec{x} 为 p 点的位置, $\vec{r}(s, t)$ 为涡丝的位置, Γ 为涡丝的环量, s 为沿涡丝的弧长, 其取向使 $\Gamma > 0$ 。当计算涡丝对自身的诱导速度时, 采用局部诱导近似, 即 LIA 方法, 得到下面的涡丝自诱导速度公式^[6]

$$\vec{V}_i = CK\Gamma \vec{b} \quad , \quad C = \frac{1}{4\pi} \log(L_c/\sigma) \quad (2)$$

式中 K 为涡丝某点的局部曲率, \vec{b} 为当地的次法线单位向量, C 是局部诱导系数, 视其为常数, σ 为涡核半径, L_c 为截断长度。假定涡丝上每一点的运动速度可由自诱导速度和背景流场速度线性迭加而成, 设背景流场速度为 \vec{V}_b , 则涡丝上一点的运动速度由下式给出^[7]

$$\vec{V} = \vec{V}_i + \vec{V}_b = C\Gamma K \vec{b} + \vec{V}_b \quad (3)$$

本文采用该式为基本方程来模拟分离尾迹涡的三维演化。上式可以进一步写成

$$\vec{V} = \frac{d\vec{x}}{dt} = C\Gamma \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \times \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial s^2} + \vec{V}_b \quad (4)$$

考虑圆柱后分离尾迹流场。设圆柱直径为 d , 卡门涡街的间距为 L , 远前方来流速度为 U_∞ , 采用下面的无量纲量

$$\vec{x}^* = \vec{x}/d, \quad t^* = t/(d/U_\infty), \quad \Gamma^* = \Gamma/(U_\infty d) \quad (5)$$

$$s^* = s/d, \quad \vec{V}_b^* = \vec{V}_b/U_\infty$$

则涡丝运动基本方程的无量纲形式为

$$\frac{d\vec{x}^*}{dt^*} = C\Gamma^* \frac{\partial \vec{x}^*}{\partial s^*} \times \frac{\partial^2 \vec{x}^*}{\partial s^{*2}} + \vec{V}_b^* \quad (6)$$

为计算方便, 将坐标系取在卡门涡街上, 如图 1 所示。设卡门涡街的运动速度为 \vec{V}_m^* , 则在此坐标系中涡丝的运动速度为

$$\frac{d\vec{x}^*}{dt^*} = C\Gamma^* \frac{\partial \vec{x}^*}{\partial s^*} \times \frac{\partial^2 \vec{x}^*}{\partial s^{*2}} + \vec{V}_i^*, \quad \vec{V}_i^* = \vec{V}_b^* - \vec{V}_m^* \quad (7)$$

其中 \vec{V}_i^* 即为卡门涡街坐标系中的背景流场速度。以下为简明起见, 将星号 * 省去。

采用有限差分法求解方程 (7), 其等间距中心差分的离散形式为

$$\frac{d\vec{x}_k}{dt} = 8C\Gamma(\vec{x}_{k+1} \times \vec{x}_{k-1} + \vec{x}_k \times \vec{x}_{k+1} + \vec{x}_{k-1} \times \vec{x}_k) / |\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_{k-1}|^2 + \vec{V}_i(\vec{x}_k) \quad (8)$$

涡丝在扭曲变形过程中其上各点的运动速度不同, 因而使原来各离散点间的距离变为不相等。为此, 我们推导了不等间距的差分公式。此时, 方程(7)的第二种差分形式为

$$\frac{d\vec{x}_k}{dt} = \frac{2C\Gamma}{h_k h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} [\vec{x}_{k+1} \times \vec{x}_{k-1} + \vec{x}_k \times \vec{x}_{k+1} + \vec{x}_{k-1} \times \vec{x}_k] + \vec{V}_t(\vec{x}_k)$$

$$h_k = |\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}| \tag{9}$$

本文采用四阶 Runge-Kutta 法数值积分方程(8)和(9)。考虑下述三种背景流场情况进行分析计算。

1. 圆柱远尾迹湍流时间平均流场

理论分析及实验测量表明, 圆柱远尾迹时间平均流场具有相似性, 其速度剖面可近似地以下式表示

$$V_{bx} = U_\infty - u_{max} \exp(-y^2/\Delta) \tag{10}$$

式中 u_{max} 为最大速度亏损, Δ 为确定尾迹剪切层厚度的常量。在卡门涡街坐标系中, 速度剖面为

$$V_{ix} = u_{max} [\exp(-y_0^2/\Delta) - \exp(-y^2/\Delta)] \tag{11}$$

y_0 为卡门涡初始位置的纵坐标。 u_{max} , y_0 及 Δ 的值需根据实验结果和参考文献[8]选取。

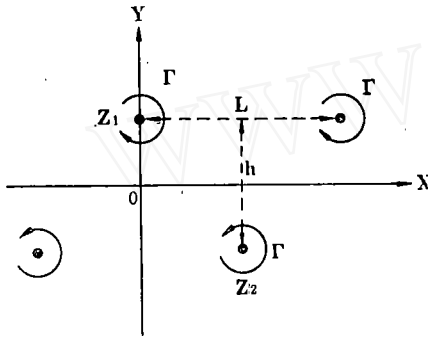


图1 卡门涡街流场
Fig.1 Flow field of the Kármán vortex street

2. 卡门涡街中旋涡所处的当地背景流场

在图1所示的卡门涡街流场中, 选取一个涡为研究对象, 其余的旋涡诱导的流场则作为背景流场。卡门涡街诱导的速度场分布为

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\Gamma}{L} \frac{\text{ch} \frac{\pi h}{L} \left(\cos \frac{2\pi x}{L} \text{sh} \frac{2\pi y}{L} - \text{sh} \frac{\pi h}{L} \right)}{\left(\sin \frac{2\pi x}{L} \text{ch} \frac{2\pi y}{L} \right)^2 + \left(\cos \frac{2\pi x}{L} \text{sh} \frac{2\pi y}{L} - \text{sh} \frac{\pi h}{L} \right)^2} \\ &\quad - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y-h/2}{x^2 + (y-h/2)^2} + \frac{\Gamma}{2L} \text{th} \frac{\pi h}{L} \\ v_y &= -\frac{\Gamma}{L} \frac{\text{ch} \frac{\pi h}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} \text{ch} \frac{2\pi y}{L}}{\left(\sin \frac{2\pi x}{L} \text{ch} \frac{2\pi y}{L} \right)^2 + \left(\cos \frac{2\pi x}{L} \text{sh} \frac{2\pi y}{L} - \text{sh} \frac{\pi h}{L} \right)^2} \\ &\quad + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (y-h/2)^2} \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

注意到旋涡所在的位置为上式的奇点, 为求集中涡附近的背景流场, 需要对上式作渐近展开, 可得

$$\left. \begin{aligned}
 v_x &= -\frac{\Gamma}{2L} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{L} \left(y + \frac{h}{2}\right) \operatorname{sh} \frac{\pi}{L} \left(y + \frac{h}{2}\right)}{\cos^2 \frac{\pi x}{L} \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{L} \left(y + \frac{h}{2}\right) + \sin^2 \frac{\pi x}{L} \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{L} \left(y + \frac{h}{2}\right)} \\
 &\quad + \frac{\Gamma}{2L} \operatorname{th} \frac{\pi h}{L} \\
 v_y &= -\frac{\Gamma}{2L} \frac{\cos \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L}}{\cos^2 \frac{\pi x}{L} \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{L} \left(y + \frac{h}{2}\right) + \sin^2 \frac{\pi x}{L} \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{L} \left(y + \frac{h}{2}\right)}
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

3. 卡门涡街中自由驻点附近的背景流场

卡门涡街流场具有如图 2 所示的拓扑结构。在自由驻点处(图 2 中 A、B 点处)存在着最大的应变场, 其流场结构如图 3 所示。某个自由驻点的位置可为

$$\begin{aligned}
 x_0 &= L/2 \\
 y_0 &= \frac{L}{2\pi} \ln \left\{ \sqrt{1 + \left[\left(1 + \operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{L}\right) / \operatorname{sh} \frac{\pi h}{L} \right]^2} + \left(1 + \operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{L}\right) / \operatorname{sh} \frac{\pi h}{L} \right\}
 \end{aligned} \quad (14)$$

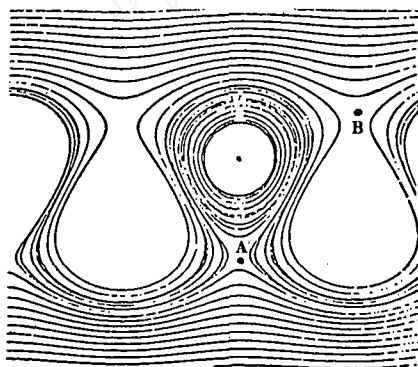


图 2 卡门涡街流场拓扑结构
Fig.2 Topologic structure of the Kármán vortex street flow field

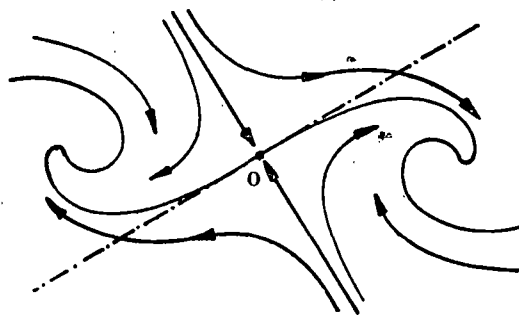


图 3 自由驻点处的流场结构
Fig.3 Flow field near the free stagnation point

此种情形中计算了一个环量较弱的细涡丝在自由驻点附近的剪切流场中的三维变形及发展。

在 1, 2 流动情形中, 给旋涡以初始扰动, 并设初始扰动关于展向是周期性的。在一个波长的范围内, 选取初始扰动的形式为

$$\begin{aligned}
 x &= \varepsilon \cos \theta \exp(-z^2/\delta) \\
 y &= \varepsilon \sin \theta \exp(-z^2/\delta)
 \end{aligned} \quad (15)$$

ε , δ 为常量, 用以确定扰动的振幅和宽度, θ 为扰动振幅平面与流向的夹角。涡丝的初始扰动宽度可由下式给出

$$z_w = 2[-\delta \log(0.01)]^{1/2} \quad (16)$$

卡门涡的环量取为 $\Gamma=0.433$, 常数 C 取为 $C=0.111$ 。

三、计算结果分析

1. 圆柱远尾迹流场中旋涡的三维演化

考虑卡门涡在尾迹湍流时间平均流场中的三维演化, 数值计算取节点数 $N=400$, 时间步长 $\Delta t=0.01$, 扰动波长 $L_d=8.0$, 扰动振幅 $\varepsilon=0.02$, 扰动宽度 $z_w=2.0$, 采用不等间距节点公式(9)计算。图4、图5分别为扰动振幅方向 $\theta=90^\circ$ 、 180° 两种情形上排涡中一个涡的计算结果。由图可见, 随着时间的增长, 在与背景剪切流场的相

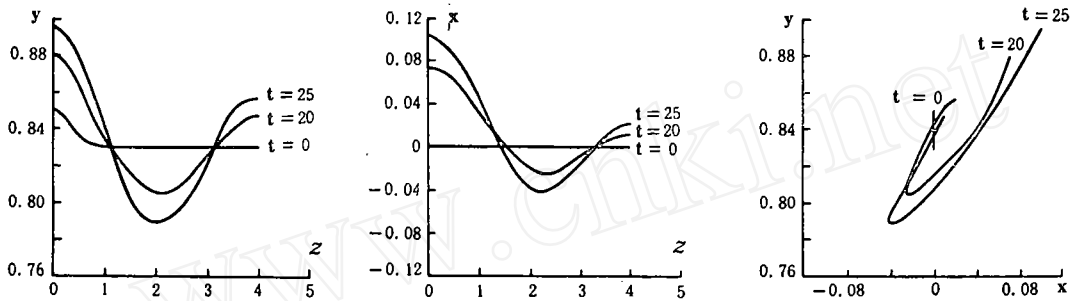


图4 扰动卡门涡在时间平均背景流场中的三维演化 (初始扰动方向 $\theta=90^\circ$)

Fig.4 Three dimensional evolution of the disturbed Kármán vortex in a time-averaged (initial disturbance direction $\theta=90^\circ$)

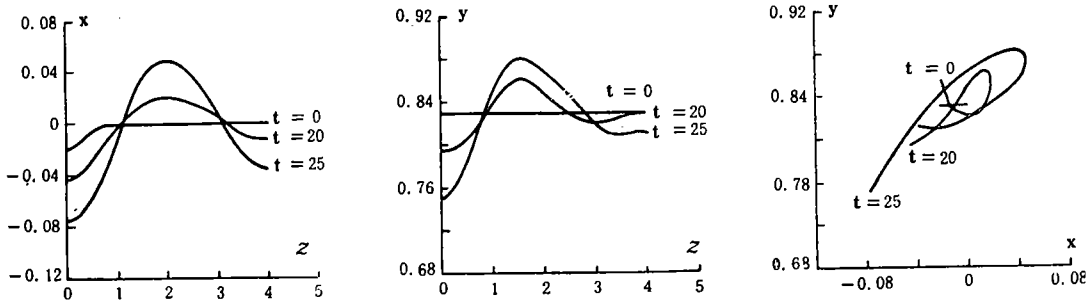


图5 初始扰动方向 $\theta=180^\circ$, 其余条件同图4

Fig.5 Initial disturbance direction $\theta=180^\circ$ the other conditions are the same as those in Fig.4

互作用下, 涡丝受到拉伸变形, 且沿流向迅速增长。当 $t=25$ 时沿 x 轴方向的变形达到初始扰动的 $6\sim 7$ 倍。从图中还可以看出, 无论初始扰动的方向如何, 随着时间增长, 变形后的涡丝趋向于同一平面, 该平面与流向的夹角约为 45° 左右。另外可以看到, 变形后的涡丝在 $x-y$ 平面上的投影呈“勺子”形状, 在 $x-z$, $y-z$ 平面上的投影具有马蹄形结构。

2. 卡门涡在当地流场中的三维变形

设孤立卡门涡的初始扰动仍由(15)式描述, 采用等间距差分公式, 选取节点数 $N=150$, $\Delta t=0.0001$, 扰动波长 $L_d=6$, 其余参数同第一种情形。

计算卡门涡在所处位置流场中的三维变化。初始扰动方向 $\theta = 90^\circ$ 的计算结果绘于图 6。计算结果表明, 在流动的主方向上, 扰动振幅随着时间增长而增长。在各个投影平面上都可以看到扰动涡丝的扭曲变形, 并出现了三维流向涡结构。在 $x-y$ 平面上的投影呈螺旋状, 涡丝的变形迅速向展向扩展, 说明涡的自诱导作用较强。在这个计算情况下 ($t = 6$), 没有得到旋涡平面与流向平面成 45° 角的结果。

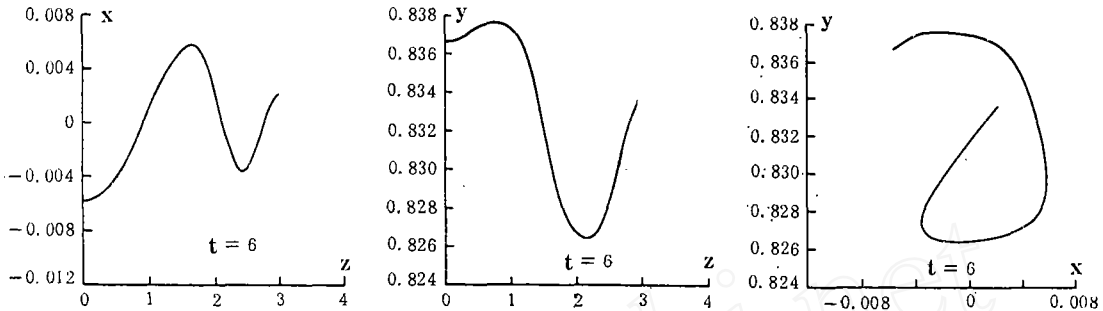


图 6 孤立卡门涡在当地涡街背景流场中的三维演化
Fig.6 Three dimensional evolution of an isolated Kármán vortex in the background flow field of the Kármán vortex street

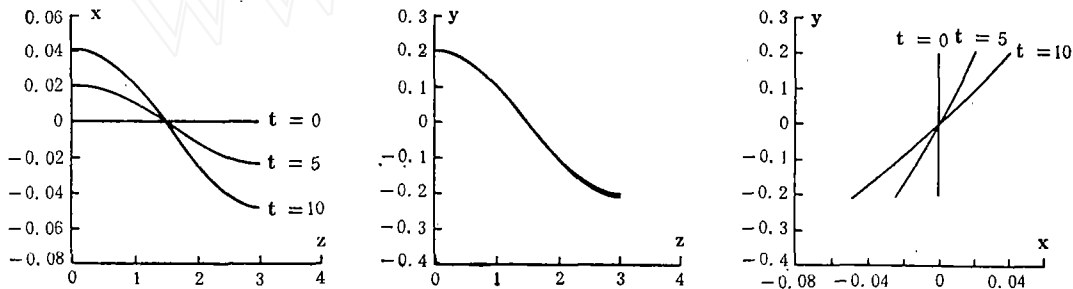


图 7 扰动细涡丝在卡门涡街背景流场中的三维演化
Fig.7 Three dimensional evolution of a disturbed thin vortex filament in the Kármán vortex street background flow field

3. 卡门涡街中自由驻点附近涡丝的变形

细涡丝的环量取为 $\Gamma' = 5\%$ 、 $\Gamma = 0.0217$, 涡丝的初始扰动分布为余弦形式

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \cos \theta \cos \frac{2\pi z}{L} \\ y &= \varepsilon \sin \theta \cos \frac{2\pi z}{L} \end{aligned} \tag{17}$$

采用非等间距节点差分格式(9), 节点数 N , 时间步长 Δt , 扰动振幅 ε 及扰动方向 θ 取为

$$N = 300, \Delta t = 0.001, \varepsilon = 0.2, \theta = 90^\circ \tag{18}$$

选取波长 $L_d = 6.0$, 中心对称轴位置在自由驻点 ($x_0 = 2.735, y_0 = 1.56$)。图 7 为计算结果。数值结果显示, 当旋涡十分接近自由驻点时, 涡丝受到明显的拉伸, 使涡量

在流向的投影迅速增长,而沿垂直方向的拉伸比沿流向的相对要弱得多。随着时间的增长,涡丝向流场发生最大拉伸变形的平面方向倾斜。计算表明,当涡丝的位置不在自由驻点附近时,情形则不同,扰动沿流向的发展不明显,沿垂直方向的变化也不明显,涡丝的位置则在不断地发生变化。

四、结 论

本文数值计算的结果表明,圆柱分离尾迹中的旋涡存在三维不稳定性,在涡丝自诱导和背景流场的相互作用下,沿涡丝的微小扰动随着时间的增长得到持续放大,并且涡量在空间将重新分布,导致出现明显的三维流向涡结构。卡门涡在尾迹平均流场中演化,产生三维的类似于马蹄形-勺子形流场结构。细涡丝在涡辫区的三维演化形成趋向流场最大拉伸变形方向的流向涡结构。这些涡丝的进一步演化与卡门涡的运动变化互相作用,将组成尾迹中复杂的三维相干结构。圆柱分离尾迹中旋涡的演化机制和过程与平面自由剪切层的三维变化不同。

本文用较简明的理论方法研究尾迹中孤立涡和细涡丝的三维演化规律,得到具有一定意义的结果。进一步的深入研究将是非常有意义的。

感谢: 本项研究得到力学所 LNM 及国家科委重大项目“非线性科学”支持。

参 考 文 献

- 1 Williamson C H K. *Phys. Fluids*, 1988, 31(11): 3165
- 2 Yamane R, Tanaka Y, Mochimaru Y, Yagita M and Shirakashi M. *Bulletin of JSME*, 1986, 29(257): 3767
- 3 Shirakashi M, Yamaguchi S, Mochimaru Y and Yamane R. *Fluid Dyn. Res.*, 1988, 4: 25
- 4 Ashurst M T and Meiburg E. *J. Fluid Mech.*, 1988, 189: 87
- 5 Meiburg E and Lasheras J C. *Phys. Fluids*, 1987, 30: 623
- 6 Okubo M, Yamane R and Oshima S. *Fluid Dyn. Res.*, 1988, 4: 39
- 7 Aref H and Flinchem E P. *J. Fluid Mech.*, 1984, 148: 477
- 8 Schlichting H. *Boundary Layer Theory*, 603

Preliminary Study of the Three-Dimensional Deformation of the Vortex in Kármán Vortex Street

Ling Guocan Guo Liang Wu Zuobin

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Ma Huiyang

(*University of Science and Technology of China*)

Abstract In this paper, the mechanism for three-dimensional evolution of the isolated Kármán vortex and the thin vortex filament in a circular cylinder wake has been studied numerically using LIA method. The results show that the vortex motion is unstable for small three-dimensional disturbances in the separated wake of a circular cylinder. Kármán vortex in the time-averaged wake flow field evolves into a horseshoe-spoon-like three-dimensional structure. The thin vortex filament deforms three-dimensionally in the braid and generates streamwise vortex structures which incline to the region maximum deformation direction of the flow field.

Key words circular cylinder wake, three-dimensional deformation, streamwise vortex, vortex dynamics.