

圆柱壳孔边裂纹应力强度因子的 计算和分析

柳春图 胡互让 吴犀甲

(中国科学院力学研究所,北京,100030)

摘 要 从 Reissner 壳体理论出发,将“局部-整体分析法”应用于圆柱壳孔边裂纹问题,比较精确地计算了圆柱壳孔边轴向裂纹和环向裂纹的应力强度因子,获得了应力强度因子随壳体几何尺寸、开孔大小及剪切刚度变化的规律。以作者在文〔7,8〕中的有限元分析结果为基础,推广 Petroski-Achenbach 方法,建立圆柱壳孔边裂纹问题的权函数,分析计算了圆柱壳孔边裂纹问题,获得了较好的结果,最后给出了便于工程应用的较精确的计算鼓胀系数的近似公式。

关键词 圆柱壳,局部-整体法,权函数,应力强度因子

1 引 言

圆柱壳是工程界最常用的结构形式之一,如飞机结构、压力容器、管道等。圆柱壳孔边裂纹问题是工程设计中经常遇到的问题。用断裂力学方法分析圆柱壳孔边裂纹的应力强度因子,对于结构的完整性评定和寿命估计是十分必要的。

关于平板孔边裂问题已有较多的研究,如文献〔1,2〕,然而,壳体孔边裂纹问题的研究文献则极为少见。Mattheck^{〔3〕}等人用有限元方法建立了一种圆柱壳体的权函数,分析计算了圆柱壳孔边单边环向裂纹问题的应力强度因子,该方法计算过程复杂,且在壳体理论中没有考虑剪切变形的影响。

Folias^{〔4,5〕}应用经典 Kirchhoff 理论首次得到了含裂纹壳体应力强度因子。由于采用的是薄壳理论,具有明显的理论缺陷。近年来应用 Reissner 理论研究壳体问题获得了较大的进展。文献〔6〕用厚壳单元对含裂纹圆柱壳进行了有限元分析,文献〔7,8〕应用摄动法获得了含任意方向裂纹圆柱壳裂尖应力应变场的一般解,为分析圆柱壳孔边裂纹应力强度因子提供了可靠的力学基础。

本文从 Reissner 壳体理论出发,将“局部-整体分析法”应用于圆柱壳孔边裂纹问题,根据获得的圆柱壳裂尖应力应变场,在裂尖附近建立高阶奇异单元,用有限元方法对圆柱壳孔边轴向裂纹和环向裂纹作了计算分析。此外,本文基于考虑剪切刚度效应的含裂纹圆柱壳鼓胀系数构造圆柱壳孔边裂纹问题参考状态解,推广 Petroski-Achenbach 方法,建立一种新的权函数的近似解析式,来研究圆柱壳孔边裂纹问题。应用该方法,在计算量小的条件下可获得比较满意的结果。

2 用有限元方法分析圆柱壳孔边裂纹问题

裂纹尖端的应力场是决定裂纹传播的主要因素,因此依据精确的裂纹尖端应力场来计算

本文于 1991 年 2 月 11 日收到。

* 本文得到了国家自然科学基金委的资助。

应力强度因子将得到准确可靠的结果。我们应用“局部-整体法”，在裂纹尖端建立一个奇异元，用文献[7,8]获得的裂尖应力应变场作为奇异元的应力模式和位移模式，在奇异元之外采用一般的厚壳元作为常规单元，奇异元与常规元之间的连接条件，由在公共节点上位移相等来确定。

2.1 裂纹尖端应力应变场及有限元格式

考虑一半径为 R 、厚为 h 、含一穿透裂纹的圆柱壳，穿透裂纹长度为 $2a$ 。裂纹方向与柱壳轴向夹角为 α ，坐标 $OXYZ$ 的原点取在裂纹尖端处， X 方向沿裂纹扩展方向， Y 方向垂直于裂纹面。从考虑剪切变形的柱壳基本方程出发，引入位移函数 F 和 f ，并将坐标无量纲化， $\xi = \frac{x}{a}$ ，

$\eta = \frac{y}{a}$ ，经数学处理后，得：

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 F - \lambda^2 (\cos^2 \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \sin 2\alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta}) &= 0 \\ \nabla^4 \psi + \lambda^2 (\cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}) &= 0 \\ w &= F - k \nabla^2 F + I_m \Phi(\xi + i\eta) \\ \nabla^2 f - 4\mu^2 f &= 4\mu^2 R_c \Phi(\xi + i\eta) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $\psi = \varphi / \sqrt{DB}$ ， $\lambda^2 = \sqrt{12(1-\nu^2)a^2/(Rh)}$ ， $k = D/(ca^2)$ ， $4\mu^2 = 2/[k(1-\nu)]$ ， φ 为应力函数， ∇ 为弯曲刚度， B 为拉压刚度， C 为剪切刚度， $\Phi(\xi + i\eta)$ 为一解析函数。设应力和位移函数均可展成 λ^2 的幂级数形式：

$$(F, \psi, f, w, \Phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k} (F_k, \psi_k, f_k, w_k, \Phi_k) \quad (2)$$

分别将(2)式代入(1)式，比较 λ^2 的各阶项。当 $k=0$ ，零阶摄动方程及裂纹面边界条件构成了平板的定解问题，其解答参见[9]。当 $k \geq 1$ 时， k 阶摄动方程及裂纹面边界条件构成了第 k 阶定解问题，由此可求出第 k 阶摄动解。设第 k 阶摄动解可表示为：

$$\left. \begin{aligned} \psi_k &= \sum_l \sum_{i,j=1,2,\dots} r^{l+2i-1} \{ a_{ij}^{(k)} \cos[l+2(i-j)-1]\theta + b_{ij}^{(k)} \sin[l+2(i-j)-1]\theta \} \\ F_k &= \sum_l \sum_{i,j=1,2,\dots} r^{l+2i-1} \{ c_{ij}^{(k)} \cos[l+2(i-j)-1]\theta + d_{ij}^{(k)} \sin[l+2(i-j)-1]\theta \} \\ f_k &= \sum_l \sum_{j=1}^k \sum_{m,n=0,1,\dots}^{\infty} [E_l^{(k)} \sin[l-1+2j+2n]\theta + F_l^{(k)} \cos[l-1+2j+2n]\theta] \\ &\quad \cdot \frac{(-1)^n \mu^{2(m+n)} r^{l-1+2(m+n+j)}}{m! \varphi(l-1+2n+2j, m) n! \varphi(l+n-2+2j, n)} \\ w_k &= - \sum_{j=1}^k r^{l-1+2j} [E_l^{(k)} \cos(l-1+2j)\theta - F_l^{(k)} \sin(l-1+2j)\theta + \\ &\quad \sum_l \sum_{i,j=1,2,\dots} [r^2 - 4j(l+2i-j-1)] \{ C_{ij}^{(k)} \cos[l+2(i-j)-1]\theta \\ &\quad + d_{ij}^{(k)} \sin[l+2(i-j)-1]\theta \} \\ \Phi_k &= \sum_l \sum_i r^{l-1+2i} (\beta_i^{(k)} + i\alpha_i^{(k)}) [\cos(l-1+2i)\theta + i\sin(l-1+2i)\theta] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 $\varphi(l, m) = \Gamma(l+m+1)/\Gamma(l+1)$ ， $\Gamma(l)$ 为 Γ 函数。各展开系数可由裂纹面边界条件逐阶确定，具体参考文献[7,8]。

设奇异元广义位移列向量为

在6%左右。造成这一差别的主要原因在于文献[3]在短裂纹时用半无限大板边裂纹张开位移的解经过插值得到圆柱壳孔边裂纹张开位移。根据文献[2],对Bowie问题,用无限大板边裂纹张开位移近似孔边裂纹张开位移,所求出的无量纲应力强度因子与Bowie解的相对误差,当 $a/r < 0.15$ 时是10%,而在 $a/r < 3$ 的范围内则达到23%。因此我们认为,本文的方法是可靠的,并且具有比文献[3]高的精度。

(1) 内压圆柱壳孔边轴向裂纹的鼓胀系数

对圆柱壳在均匀内压作用下孔边双边裂纹的情形,取孔半径与壳体半径之比 r/R 等于1/3、1/5,分别在壳厚度 h 与壳半径 R 之比 h/R 等于1/5、1/10时的情形作了计算,结果见图2、图3。从图中看出,在 h/R 不变时,鼓胀系数 M 随 a/r 的变化,先是下降,而后上升,这一规律

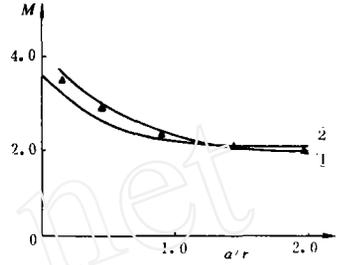


图1 圆柱壳孔边环向单边裂纹鼓胀系数
①有限元结果②文献[3]▲权函数法

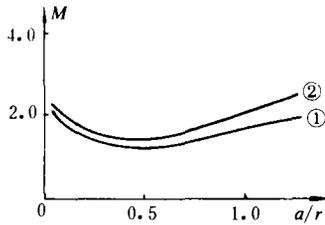


图2 圆柱壳孔边轴向裂纹
($r/R = 1/3$ ① $h/R = 1/5$ ② $h/R = 1/10$)

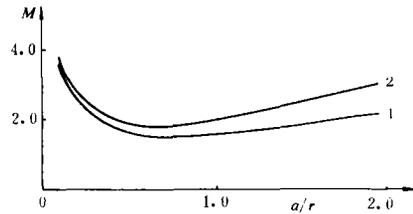


图3 圆柱壳孔边轴向裂纹
($r/R = 1/5$ ① $h/R = 1/5$ ② $h/R = 1/10$)

与文献[3]是一致的。这与平板孔边裂纹鼓胀系数的变化规律有所不同,在板的情形, M 随 a/r 一直减小,在 a/r 大到一定值后,趋于直线。在 a/r 不变时, M 随 h/R 的减小而有所增加,增加的幅度与 a/r 有关。在 a/r 较小时, M 变化较小,当 a/r 较大时, M 变化较大。

(2) 轴向拉伸作用下圆柱壳孔边环向裂纹的鼓胀系数

对孔边双边环向裂纹情形,取与前面相同参数作了计算,结果见图4、图5。可以看出,环向裂纹时 M 随 a/r 的变化规律与轴向裂纹时大体相同,不同之处在于,环向裂纹时,在 h/R 不变时,当 a/r 很小时, M 下降较快,当 a/r 到一定值时, M 增加,但增加的幅度小于轴向裂纹时的情形。在 a/r 不变时, M 随 h/R 的减小而略有增大,其幅度较之轴向裂纹时来要小。

(3) 剪切刚度 k 对鼓胀系数的影响

在Reissner壳体理论中,与经典理论的差别在于引入了新的物理量 k ,它反映了剪切刚度的影响。本文进一步计算了 k 对鼓胀系数的影响。图6是轴向裂纹时鼓胀系数 M 与曲线参数 λ 的关系曲线。总的说来,鼓胀系数随 k 的增加而增加,即由于剪切刚度的效应而提高了应力强度因子,这个结论与无孔时的结论一致^[7]。

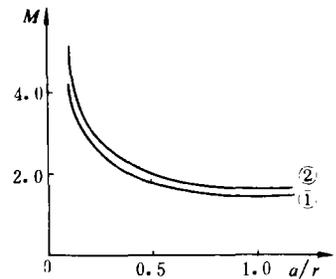


图4 圆柱壳孔边环向裂纹
($r/R = 1/3$ ① $h/R = 1/5$ ② $h/R = 1/10$)

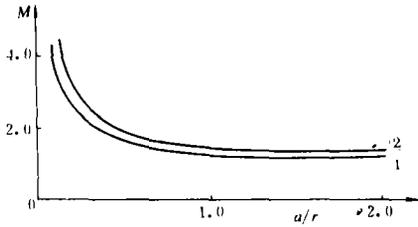


图 5 圆柱壳孔边环向裂纹

($r/R = 1/5$ ① $h/R = 1/5$ ② $h/R = 1/10$)

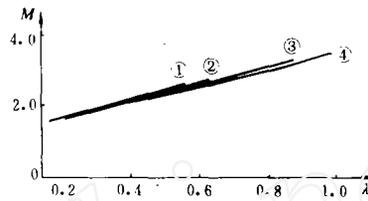


图 6 剪切刚度比 k 的影响

($a/r = 0.4$ ① $k = 1.2$ ② $k = 0.3333$ ③ $k = 0.2083$ ④ $k = 0.075$)

3 用权函数方法分析圆柱壳孔边裂纹问题

前面我们用有限元方法分析了圆柱壳孔边裂纹问题。用有限元方法,有很多优点,但对工程应用则有不便之处。我们探讨用权函数方法来分析圆柱壳孔边裂纹问题,以期达到既有较高精度又便于工程应用这一目的。

自 70 年代初 Bueckner^[10]和 Rice^[11]提出权函数方法以来,这种简便易行的分析方法在来平面断裂问题中得到了广泛的应用。应用壳体理论的虚功原理,将这一方法推广到壳体断裂分析中。权函数可表示为

$$h(x, a) = \frac{E}{K_R(a)} \frac{\partial U_R(x, a)}{\partial a} \quad (9)$$

式中 $K_R(a)$ 是参考力系作用下的应力强度因子, $U_R(x, a)$ 为该状态下的裂纹张开位移。在几何与约束相同条件下,另一力系作用下的鼓胀系数为:

$$M(a) = \left(\int_0^a \sigma(x) h(x, a) dx \right) / (\sigma_0 \sqrt{\pi a}) \quad (10)$$

式中 $\sigma(x)$ 是假想无裂纹时裂纹处的应力分布, σ_0 是特征应力。

3.1 圆柱壳孔边应力

考虑一曲率半径为 R 、壁厚为 h 的圆柱壳,其上有一半径为 r_0 的圆孔,如图 7。根据文献[12],在远端轴向载荷 p 和环向载荷 q 的作用下,孔边周向应力为

$$\begin{aligned} \sigma_H = & \frac{1}{2}(p+q)\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{1}{2}(p-q)\left(1+\frac{3r_0^4}{r^4}\right)\cos 2\alpha \\ & + \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{\pi r_0^2}{4Rh} \left[\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)q - \frac{1}{4}(p-3q)\left(1+\frac{3r_0^4}{r^4}\right)\cos 2\alpha \right] \end{aligned} \quad (11)$$

3.2 Petroski—Achenbach 方法

在文[8]中,作者曾得到含裂纹圆柱壳鼓胀系数的近似表达式。对轴向裂纹:

$$M(\lambda, k) = (1 + 0.49\lambda^2)^{1/2} \left(1 + \frac{4}{3}\lambda k^{1/4} e^{-2\lambda}\right) \quad \lambda < 3 \quad (12)$$

对环向裂纹:

$$M(\lambda, k) = (1 + 0.097\lambda^2)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{4}\lambda k^{0.1}\right) \quad \lambda < 3 \quad (13)$$

我们将用以上二式乘以平板孔边裂纹的形状因子来构造参考状态解。假设圆柱壳孔边含有穿透裂纹长为 a ,以在垂直于裂纹面方向上的远方作用有单向拉伸载荷 σ_0 作为参考载荷,该参考状态下的应力强度因子为

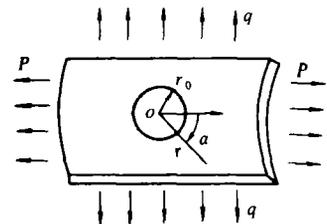


图 7 圆柱壳上含一半径为 r_0 的小孔

$$K_R(a) = F_H(a)\sigma_0\sqrt{\pi a} = M_H F_B \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (14)$$

当孔边含轴向裂纹时, $p = 0, q = \sigma_0, M_H$ 取(12)式;当孔边含环向裂纹时, $p = \sigma_0, q = 0, M_H$ 取(13)式。(14)式中 F_B 为平板孔边裂纹形状因子,表示为^[2]

$$F_B = \frac{F_1}{F_2 + a/r} + F_3 \quad a/r \leq 10 \quad (15)$$

其中 F_1, F_2, F_3 的值由表 1 给出。

根据 Petroski-Achenbach 方法,裂纹张开位移可由参考状态应力强度因子表示如下:

$$u_R(x, a) = \frac{\sigma_0}{E\sqrt{2}} [4F_H(a)\sqrt{a(a-x)} + G(a)\frac{(a-x)^{3/2}}{\sqrt{a}}] \quad (16)$$

式中

$$G(a) = [S_1(a) - 4F_H(a)\sqrt{a}S_2(a)]\sqrt{a}/S_3(a) \quad (17)$$

其中 $S_1(a), S_2(a), S_3(a)$ 分别由 σ_0 和 $F_H(a)$ 等表示,具体可参考[13]。这样,将(11)、(14)、(16)式等代入(10)式,经过积分运算可求出孔边裂纹的鼓胀系数。

3.3 数值计算

为了检验该方法的可靠性,我们考核几个算例。首先考核无限大板孔边穿透裂纹问题的解。我们取圆柱壳半径与圆孔半径之比 $R/r = 10^5$ 来近似平板的几何条件,分别对几种不同情形作了计算,并与文[14]中的解作一比较,见表 2。我们看到,二者之间的相对误差小于 2%。

表 2 无限大板孔边裂纹的形状因子,与文[14]的比较

a/r	F_{II}	单轴应力单边裂纹		单轴应力双边裂纹		双轴应力单边裂纹		双轴应力双边裂纹	
		权函数法	文[14]	权函数法	文[14]	权函数法	文[14]	权函数法	文[14]
0.1	2.73	2.73	2.76	2.73	1.96	1.93	1.98	1.98	
0.5	1.73	1.73	1.83	1.83	1.49	1.49	1.56	1.57	
1.0	1.31	1.37	1.48	1.45	1.25	1.22	1.38	1.38	
2.0	1.05	1.06	1.24	1.21	1.04	1.01	1.22	1.20	
5.0	0.81	0.81	1.07	1.07	0.81	0.81	1.07	1.06	

我们还将权函数法计算结果与文献[3]作了比较,见图1。可见,符合得相当好。

从计算方面看,文献[3]用有限元方法对不同的裂纹长度计算出张开位移,再用曲线拟合求出 $u_R(x, a)$ 的解析式,既麻烦又不易对不同几何形状的壳体推广,而本文采用的权函数方法直接从参考问题的 K_R 求出位移 $u_R(x, a)$ 比文献[3]的方法要简便得多。

(1) 内压圆柱壳孔边轴向裂纹的鼓胀系数

在均匀内压 p_0 作用下,圆柱壳体承载为 $p = p_0 R/2h, q = p_0 R/h$ 。分别对 $k = 0, 0.001, 0.05, 0.1, 0.5$, 对孔边轴向单边裂纹和双边裂纹,在不同的 λ 值和不同的裂纹长度 a 的条件下作了计算,选一个有代表性的示于图8。

(2) 轴向拉伸作用下圆柱壳孔边环向裂纹的鼓胀系数

在均匀轴向拉伸应力 σ_0 作用下,我们取与上面相同参数变化范围作了计算,取一个代表性的结果示于图9。

从计算结果看,在其它尺寸不变时,鼓胀系数随孔半径增大而增大。当孔半径较大时(大约 $a/r < 0.5$), M 随 r 变化较快,往后变化愈来愈平缓。当 k 不变时, M 随 λ 的增加而增加。双边裂

纹鼓胀系数高于单边裂纹,且随孔半径的减小而增大。例如,当 $a/r = 0.2$ 时,双边裂纹鼓胀系数与单边裂纹鼓胀系数相对误差为 2% 左右,而当 $a/r = 3$ 时,最大相对误差可达 18%。

根据上面的计算结果,我们拟合了圆柱壳孔边穿透裂纹鼓胀系数的近似公式。

轴向裂纹

$$M(\lambda, k, a/r) = \left(\frac{F_1}{F_2 + a/r} + F_3 \right) (1 + 0.49\lambda^2)^{1/2} \left(1 + \frac{4}{3} \lambda k^{1/2} e^{-2\lambda} \right) \quad (0 < \lambda \leq 3, 0 < \frac{a}{r} \leq 3) \quad (18)$$

系数 F_1, F_2, F_3 如表 6 示。

表 3 孔边轴向裂纹拟合系数

	单边裂纹	双边裂纹
F_1	0.8739	0.6870
F_2	0.3245	0.2772
F_3	0.6772	0.9446

表 4 孔边轴向裂纹拟合系数

	单边裂纹	双边裂纹
F_1	0.8856	0.6961
F_2	0.3245	0.2772
F_3	0.6857	0.9572

公式与计算结果之间最大误差不超过 1%。

环向裂纹

$$M(\lambda, k, a/r) = \left(\frac{F_1}{F_2 + a/r} + F_3 \right) (1 + 0.097\lambda^2)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{4} k^{0.1} \lambda \right) \quad (0 < \lambda \leq 3, 0 < \frac{a}{r} \leq 3) \quad (19)$$

系数 F_1, F_2, F_3 如表 4 示。

除 $k = 0$ 时的某些点外,该公式与计算结果之间最大误差不超过 1%。

4 结 论

1. 本文应用“局部-整体分析法”成功地计算了圆柱壳孔边裂纹应力强度因子,获得了比较精确的结果。通过对内压圆柱壳孔边环向裂纹的分析计算,求得了鼓胀系数随几何尺寸、开孔大小及剪切刚度变化的规律。

2. 应用权函数方法分析了圆柱壳孔边裂纹问题,在很小的计算工作量的基础上,获得了满意的结果。应用权函数方法能够方便地向其它载荷情形推广。本文还给出了较精确的计算圆柱壳孔边轴向裂纹(受内压)和环向裂纹(受轴向拉伸)包括单边裂纹和双边裂纹在内的鼓胀系数近似公式。

3. 圆柱壳上孔的存在提高了应力强度因子。应力强度因子随孔半径的增加而增加。应力强度因子随曲率参数 λ 及剪切刚度 k 的增加而增加。

4. 孔边两个裂纹时(对称分布)的鼓胀系数略高于一个裂纹时的鼓胀系数,这种差别随孔

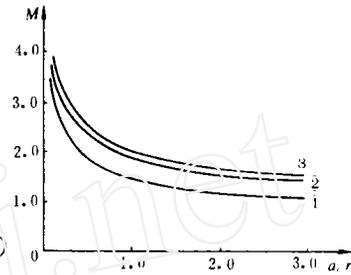


图 8 孔边环向双边裂纹鼓胀系数
① $\lambda = 0.2$ ② $\lambda = 1.0$ ③ $\lambda = 1.2$

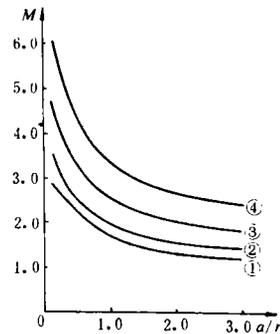


图 9 孔边轴向单边裂纹鼓胀系数
① $\lambda = 0.2$ ② $\lambda = 1.0$ ③ $\lambda = 3.0$

半径的减小而增加。

参 考 文 献

- 1 Bowie O L. Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole. *J. Math. Phys.* ,1956, **35**:60
- 2 Grandt Jr A F. Stress intensity factor for some through-cracked fastener holes. *Int. J. Fracture* , 1975, **11**:283
- 3 Mattheck C, Morawietz P and Munz D. Calculation of the stress intensity factor of a circumferential crack in a tube originating from a hole under axial tensile and bending loads. *Engineering Fract. Mech.* ,1985, **22**:645
- 4 Folias E S. A circumferential crack in a pressured cylindrical shell. *Int. J. Fract.* , 1967, **3**:1
- 5 Folias E S. An axial crack in a pressured cylindrical shell. *Int. J. Fract. Mech.* , 1965, **1**:104
- 6 Barsoum R S and Loomis R W. Analysis of through crack in cylindrical shells by the quarter point elements. *Int. J. Fract.* , 1979, **15**:259
- 7 柳春图,吴犀甲. 含轴向裂纹柱壳裂纹尖端应力应变场及应力强度因子计算. *力学学报*, 1987, **19**:125
- 8 Xija Wu and Liu C T. The stress-strain fields at crack tip in a circumferentially cracked cylindrical shell and calculation of stress intensity factors. *Proc. 6th Int. Conf. on Pressure Vessel Technology* , Vol. I, 1988
- 9 柳春图,李英治. Reissner 型板裂纹尖端应力应变场及应力强度因子计算. *力学学报*. 1984, **16**:4
- 10 Bueckner, H. A novel principle for the computation of stress intensity factors. *ZAMM* , 1970, **50**:750
- 11 Rice J. some remarks on elastic crack tip stress fields. *Int. J. Solids Structures*, 1972, **8**:751
- 12 Lourye A I. Concentration of stresses in the vicinity of an aperture in the surface of a circular cylinder. *Appl. Math. & Mech.* , 1946, **10**:397(Russian)
- 13 Petroski J and Achenbach J. Computation of weight function from a stress intensity factors. *Engineering Fract. Mech.* , 1978, **10**:257
- 14 王铎主编. 断裂力学. 南宁:广西人民出版社, 1982年, 第143页

Stress Intensity Factors in a Cylindrical Shell with Cracks Originating From a Hole

Liu Chantu, Hu Hurang, Wu Xijia

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing, 100080)

Abstract

Through Reissner's theory, the accurate stress intensity factors in a cylindrical shell with axial and circumference cracks originating from a hole have been obtained separately by using local-global analysis method. Based on the results of [7, 8], the weight functions of cylindrical shells have been established by extending Petroski-Achenbach method, and the stress intensity factors have also been obtained. The results are satisfactory. Finally, the convenient approximate formulae used to calculate the bulk factors for engineering uses are proposed.

Key words: Cylindrical shell, local-global analysis, weight function method, stress intensity factor