导体中自由体电荷的衰减规律

中国科学院力学研究所 朱如曾

摘要 本文指出，许多电动力学教科书中所给出的导体(本文指金属导体)中自由体电荷的衰减规律不适用于良导体，原因是所涉及的电场变化频率远比电子与晶格的碰撞频率为大，因而无色散欧姆定律实际并不适用．本文采用欧姆定律的推广形式导出较普遍的结论；并指出，在讨论定频的低频电磁波与导体的相互作用问题时，可直接证明电荷密度的实频分量 $\tilde{\rho}(\omega_{实})$ 为零，而不必涉及 $\rho(t)$ 的衰减规律．此外，本文还指出电荷衰减过程中不会出现电子的"超光速运动"矛盾．

一、问题的提出

导体内部是不能长久存在体电荷 ρ 的．证明方法是根据高斯定理

$$\nabla\cdot E=\rho/\varepsilon \tag{1}$$

欧姆定律

$$j=\sigma E \tag{2}$$

和连续方程

$$\nabla\cdot j=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{3}$$

得 ρ 随时间的衰减关系

$$\rho=\rho_0 e^{-t/\tau} \tag{4}$$

其中

$$\tau=\varepsilon/\sigma \tag{5}$$

国内许多电动力学教科书都是这样讲的[1-3]．但是实际上，(1)—(5)式的推导中所用无色散的欧姆定律是不成立的．因为这个公式以电子与晶格的频繁碰撞为基础，它只在场强发生显著变化的时间尺度 τ_E 远大于电子的自由飞行时间 τ_e，即

$$\tau_E>>\tau_e \tag{6}$$

的条件下才能适用．而在电荷衰减过程中，场变化的时间尺度 τ_E 就是(5)式所表示的 τ．对铜而言，$\tau_e\sim10^{-13}$ 秒，$\tau_E\sim10^{-19}$ 秒，可见(6)式远不能被满足．这表明无色散欧姆定律确实不能自洽地处理良导体中电荷衰减这样的快变化过程．所以我们必须考虑色散效应(即电导率 σ 与频率 ω 有关)，或者说，必须用具有时间关联的推广了的欧姆定律来代替无色散欧姆定律．本文将由此出发证明电荷衰减，并给出正确的衰减规律．

另一方面，文献[1-3]讨论 $\rho(t)$ 的变化规律之目的，不仅在于 $\rho(t)$ 本身，还在于在讨论定频($\omega_{实}$)的低频电磁波与导体的相互作用问题时，能把由(4)式得出的 $\rho(t=\infty)=0$ 作为在麦克斯韦–欧姆联立方程组中取 $\rho(t)\equiv0$，也即取 $\tilde{\rho}(实)=0$ 的理由．这里，$\omega_{实}$ 的下标"实"是指频率为实数，分量 $\tilde{\rho}(\omega)$ 是指麦－欧方程组的时间因子为 $\exp(i\omega t)$ 的解中 $\rho(r,t)$ 的空间因子．上文已表明，以无色散的欧姆定律为出发点的教科书[1-3]，如果不准备额外地引进推广的欧姆定律，而仍想在方程 $\nabla\cdot E=\rho/\varepsilon$ 中对低定频情况取 $\rho(t)\equiv0$，就必须在无色散的欧姆定律的范围内对低频情况另行证明 $\tilde{\rho}(\omega_{实})=0$．这就是本文要讨论的第二个问题．此外，本文还将顺便说明，文献[4]对公式(5)提出的超光速责难，实际并不成立．

二、欧姆定律的推广形式

电磁场的线性方程组的求解问题一般分为初始值问题和本征值问题(即定态解问题)．后者以确定的频率 ω 为特征，但 ω 可能为实数或(广义地)复数，复数频率对应于放大或衰减．与初值问题和本征值问题相对应，本节将推导时域和频域中的欧姆定律的推广形式．

用冷准经典电子近似，忽略磁场影响，电子平均漂移速度 u 的非相对偏运动方程是

$$m\frac{du}{dt}=-eE(t)-m\gamma u \tag{7}$$
$$\gamma=1/\tau_e$$

m 和 e 分别为导带电子的平均有效质量和电子电荷．严格说来，E 在不同 t 应取电子实际所在处的不同值．但假设场的空间变化尺度远大于电子自由程长，于是在积分(7)式时可认为场是空间均匀的．解出(7)式得：

$$u=-\frac{e}{m}\int_0^t E(t')e^{-(t-t')/\tau_e}dt'+u_0e^{-\gamma t}$$

$$j=-n_0eu=\frac{n_0e^2}{m}\int_0^t E(t')e^{-(t-t')/\tau_e}dt'+j_0e^{-\gamma t}$$

$$=j_0e^{-\gamma t}+\frac{\sigma_0}{\tau_e}\int_0^t E(t')e^{-(t-t')/\tau_e}dt' \tag{8}$$

式中σ_0是金属在零频率下的电导率

$$\sigma_0=\tau_e n_0e^2/m \tag{9}$$

n_0为中性介质中的自由电子数密度，u_0和j_0分别为$t=0$时的电子平均速度和电流密度. 在(8)式中，我们已假定$\rho/en_0<<1$,从而忽略了n与n_0的差别对j的影响. (8)式就是时域中欧姆定律的推广形式.

当(6)式满足时，$E(t')$可从积分号下移出来得

$$j(t)=\sigma_0E(t)(1-e^{-t/\tau_e})+j_0e^{-t/\tau_e} \tag{10}$$

对 $$t>>\tau_e \tag{11}$$

(10)式简化为欧姆定律

$$j=\sigma_0E(t) \tag{12}$$

对定频情况，在方程(7)中代入

$$E(t)=\widetilde{E}(\omega)e^{-i\omega t} \tag{13}$$

得受迫振动的复振幅$\widetilde{u}(\omega)$为

$$\widetilde{u}(\omega)=\frac{-eE}{-i\omega m+m\gamma} \tag{14}$$

故

$$\widetilde{j}(\omega)=\frac{n_0e^2\widetilde{E}(\omega)}{-im\omega+m\gamma} \tag{15}$$

其中ω可为复数. (15)式就是频域中具有色散的欧姆定律. 因此电导率的ω分量是

$$\widetilde{\sigma}(\omega)=\sigma_0/(1-i\omega/\gamma) \tag{16}$$

当 $$|\omega|<<\gamma \tag{17}$$

时，(16)式简化为无色散的电导率

$$\widetilde{\sigma}(\omega)=\sigma_0 \tag{18}$$

在条件(17)下，可在(7)式中忽略惯性项$m\ du/dt$,也得(18)式. 显然条件(17)与(6)是一致的.

三、体电荷密度的衰减规律

考虑$\rho(t)$的空间变化尺度远大于电子的自由程长，于是(8)适用. 将(8)代入(3)并利用(1)得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\sigma_0}{\varepsilon\tau_e}\int_0^t e^{-(t-t')/\tau_e}\rho(t')dt'-\nabla\cdot je^{-t/\tau_e} \tag{19}$$

再微分一次得

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=-\frac{\sigma_0}{\varepsilon\tau_e}\rho(t)+\frac{\sigma_0}{\varepsilon\tau_e^2}\int_0^t e^{-(t-t')/\tau_e}\rho(t')dt'+\gamma\nabla\cdot j_0e^{-t/\tau_e}$$

从上式解出右边的积分项，然后代入(19)式，并整理得

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+\frac{1}{\tau_e}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\omega_p^2\rho=0 \tag{20}$$

其中，ω_p是等离子体频率

$$\omega_p=\left(\frac{n_0e^2}{\varepsilon m}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

方程(20)表明、空间某点的$\rho(t)$的变化只取决于该点的初条件$\rho(0)$及$\left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_{t=0}$,由(19)式又得

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_{t=0}=-\nabla\cdot j_0$$

所以某点$\rho(t)$的演化只取决于该点的初始值$\rho(0)$及$\nabla\cdot j_0$，而外加电磁场对$\rho(t)$的变化无贡献. 方程(20)代表金属冷等离子体的静电阻尼振荡，其通解是熟知的，结果都是衰减的，可分三种情况:

1. 当$\omega_p>\frac{1}{2\tau_e}$时，有

$$\rho=Ae^{-t/2\tau_e}\cos(\omega t+\alpha),\quad \omega=\sqrt{\omega_p^2-\left(\frac{1}{2\tau_e}\right)^2} \tag{22}$$

$\rho(t)$振荡衰减，其时间常数为$2\tau_e$

2. 当$\omega_p=\frac{1}{2\tau_e}$时,有 (23)

$$\rho(t)=(A_1+A_2t)e^{-t/2\tau_e} \tag{24}$$

3. 当$\omega_p<\frac{1}{2\tau_e}$时，有 (25)

$$\rho(t)=B_1e^{-\left[\frac{1}{2\tau_e}+\sqrt{\left(\frac{1}{2\tau_e}\right)^2-\omega_p^2}\right]t}+B_2e^{-\left[\frac{1}{2\tau_e}-\sqrt{\left(\frac{1}{2\tau_e}\right)^2-\omega_p^2}\right]t} \tag{26}$$

在上面所有三种情况中，$\rho(t)$的变化都与(4)式不同；只是在$\omega_p<<1/2\tau_e$的情况下［(6)式自动满足］，对适合(11)式的t,(26)式右边可舍去第一项，并简化第二项的指数

$$\left[-\frac{1}{2\tau_e}+\sqrt{\left(\frac{1}{2\tau_e}\right)^2-\omega_p^2}\right]t\sim-\tau_e\omega_p^2t=-\sigma_0t/\varepsilon$$

于是(26)式过渡到(4)式的形式：

$$\rho(t)\simeq B_2e^{-(\sigma_0/\varepsilon)t}$$

可见(4)式只对不良导体才适用．教科书[5] 将此公式用于大气层，这是合理的．

此外，$\rho(t)$在空间各点同步衰减这一性质也使得本节开头所要求的$\rho(t)$的空间慢变化性可由$\rho(0)$的空间慢变化性所保证．

四、低频定态解中$\widetilde{\rho}(\omega_{实})$为零的直接证明

一般的电动力学教科书[1-3] 是不引进公式(8)的．因此，麦克斯韦－欧姆联立方程组中应保留函数$\widetilde{\rho}(t)$．本节将表明，在麦－姆联立方程适用的低频范围内，可直接证明$\widetilde{\rho}(\omega_{实})=0$，而无需借助于$\rho(t)$的高频衰减结果．证明如下：

在(1)—(3)中代入相应的实频分量

$$\nabla\cdot\widetilde{E}(\omega_{实})=\widetilde{\rho}(\omega_{实})/\varepsilon \tag{27}$$

$$\widetilde{j}(\omega_{实})=\sigma_0\widetilde{E}(\omega_{实}) \tag{28}$$

$$\nabla\cdot\widetilde{j}(\omega_{实})=-i\omega_{实}\widetilde{\rho}(\omega_{实}) \tag{29}$$

由(27)—(29)给出

$$(i\omega_{实}-\sigma_0/\varepsilon)\widetilde{\rho}(\omega_{实})=0 \tag{30}$$

因为σ_0，ε和$\omega_{实}$都是非零实数，故上式给出

$$\widetilde{\rho}(\omega_{实})=0 \tag{31}$$

这一推导不涉及电荷衰减的高频变化，所以无色散的欧姆定律(28)适用，这表明，论证本身是自洽的．其实，实频问题不涉及复频衰减问题原本是理所当然的事，因为它们各是场变化的不同的、互相独立的分量．顺便指出，若在(30)式中允许$\omega_{实}$取复数，并将σ_0换成(16)式的$\widetilde{\sigma}(\omega)$，便可将第三节的衰减结果和(31)式一并给出．

五、关于"超光速"责难

文献[4] 曾对公式(4)和(5)提出质疑："对于铜来说，这(指τ——本文作者)是1.5×10^{-19}秒，这时间是如此之短，以致于电荷的载体会以超光速运行即使很短一段距离，这就表示这个解必是错误的．这可能归因于欧姆定律的错误．"

前面已表明，由于忽略了色散效应，欧姆定律在此确实不适用．但是如果暂时撇开色散问题，假定欧姆定律正确，那么实际上是不会导致超光速困难的．因为按照欧姆定律，导体内电子的漂移速度为

$$u=\frac{j}{ne}=\frac{\sigma E}{ne}=\frac{\varepsilon E}{ne\tau}$$

u的大小不只取决于τ，还取决于导体可能在多大范围内积累多少体电荷，或者说，这体电荷会在导体内产生多大的场强E．我们估且假定$E<10^7$V/m，与这一数值对应的场能密度为10^3J/m^3．它们将很快全部转化为热能，这将使导体的局部温度达到3×10^3度(K)，这已超过铜在大气压下的沸点．很难设想导体内会有产生这样大场强的体电荷出现．对铜而言，$\sigma\sim10^8/\Omega$m，$n\sim10^{29}/$m^3，$e\sim10^{-19}$C，故$u<10^5$m/s$<<c$．可见，即使我们作如此夸大的数量级估计，超光速的事仍不会发生!①

考虑色散效应后，电子的速度由(14)式表示，对铜而言，$\gamma\sim10^{13}$秒$^{-1}$，$\omega=\omega_p\sim10^{16}$秒$^{-1}$，故可略去$\gamma$．此时即使取$E\sim10^7$V/m，有$|u|\sim\left|\frac{eE}{m\omega_p}\right|\sim10^2$m/s．这比用欧姆定律的估计值又小了许多，更不会出现什么超光速问题了．

参考文献

[1] 郭硕鸿，电动力学，人民教育出版社 第135页．

[2] 何启智等，电动力学，高等教育出版社，第95页．

[3] 阚仲元，电动力学教程，高等教育出版社，第123页．

[4] 美国研究生物理试题与题解(陈崇光等译)，科学技术文献出版社，第91至92页．

[5] 蔡圣善等，经典电动力学，复旦大学出版社，第177页．

[6] 贾兆平等，大学物理，1987年第11期．

---

① 文[6] 在论证"超光速"矛盾不存在时，曾取$j\leqslant10^3$安/米^2．这仅仅是对稳定电流的限制．对瞬时衰减电流的限制则应宽很多．此外，对完全电离的等离子体，由于n可以远小于导体中的n，引用欧姆定律(2)式，确有可能导致超光速矛盾．

(上接48页)

[2] 中国科技大学物理辅导班主编，白贵儒、郭光灿审校，《美国物理试题与解答》(光学)，中国科学技术大学出版社，1986,6.

[3] R·瑞斯尼克著、上海师大物理系译，《相对论和早期量子论中的基本概念》．上海科技出版社，1978,11

[4] 兰斯别尔格著，杨葭荪、张之翔译，《光学》(下册)，高等教育出版社，1965,3.

[5] 母国光、战元龄编，沈寿春校，《光学》，人民教育出版社，1979,3印刷．