中国科学

1992 年 3 月　　A 辑　　第 3 期

简化 Navier-Stokes(SNS) 方程在二维层流边界层分离点邻域的特性*

田纪伟　　高智

(中国科学院力学研究所，北京 100080)

摘要

文中证明了本文第二作者提出的简化 Navier-Stokes(SNS)方程[1]在层流边界层分离点数学上为正则. Davis[2] 和 Голвачев-Кузьмин-Попов[3] 提出的 SNS 方程在分离点为数学奇异. 进而论证了文献[2,3]的 SNS 方程在层流边界层分离点的奇异阶. 最后给出了 Navier-Stokes 方程、上述两种 SNS 方程以及边界层方程在分离点邻域特性的比较.

关键词: 分离流，粘性流，简化 Navier-Stokes (SNS) 方程

一、引言

简化 Navier-Stokes (SNS) 方程或称抛物化 Navier-Stokes (PNS) 方程作为一种适用于全流场的唯一的近似理论在流体力学和计算流体力学中得到越来越广泛的应用[4]. 但 SNS 方程在流场中某些特殊点(例如分离点、尾缘、前缘、驻点等)的数学和物理性质尚未加以研究，应该指出的是这些特殊点是经典边界层方程的数学奇点. Goldstein 关于顺流平板层流边界层分离点奇异性和尾缘奇异性的研究，对经典边界层理论做出了重要的基础性贡献，导致了边界层理论的新发展——多层边界层理论[5]. 文献[6]进一步把 Navier-Stokes 方程和边界层方程在分离点的数学性质做了比较，表明在分离点邻域内二维 Navier-Stokes 方程存在级数解，边界层方程则不存在级数解，后者与分离点为边界层方程数学奇点的结论一致. 为方便起见，我们把文献 [6] 的结论简述为: 在分离点 Navier-Stokes 方程是“正则”的，边界层方程为“奇异”的. 本文论证了二维 SNS 方程在顺流平板层流边界层分离点邻域的数学性质，发现高智[1]提出的 SNS 方程在分离点是正则的，即 SNS 方程在分离点邻域内存在级数解，这与 Navier-Stokes 方程在分离点为“正则”的结论[6]一致. 但 Davis[2] 和 Головачев-Кузьмин-Попов[3] 提出的 SNS 方程在分离点具有数学奇异性. 这些结论也与不同 SNS 方程解的比较分析[7]以及 SNS 方程的数学性质存在差异[8,9]的结论是一致的.

本文 1990 年 8 月 20 日收到，1991 年 7 月 16 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目.

二、Navier-Stokes方程的简化形式

我们考虑绕过平板的不可压定常层流流动，二维 Navier-Stokes 方程为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, & (2.1a)\\[2mm] u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), & (2.1b)\\[2mm] u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right). & (2.1c)\end{cases}$$

其中 P 表示压力，ρ 表示密度，$\nu=\dfrac{\mu}{\rho}$，μ 表示粘性系数，x 表示顺平板表面方向，y 表示平板的法向方向，原点(0,0)可取在平板上分离点或分离点前的某一位置。

根据经典边界理论[4]得到边界层方程为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, & (2.2a)\\[2mm] u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}+\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & (2.2b)\\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y}=0. & (2.2c)\end{cases}$$

根据文献[1]的 SNS 方程理论，得到简化 SNS 方程如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\[2mm] u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}+\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\[2mm] u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y}+\nu\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}.\end{cases}\tag{2.3}$$

根据文献[2,3]的 SNS 方程理论得到 SNS 方程如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\[2mm] u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}+\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\[2mm] u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y}.\end{cases}\tag{2.4}$$

为方便起见，我们称 SNS 方程(2.3)为第一种 SNS 方程，SNS 方程(2.4)为第二种 SNS 方程。第一种 SNS 方程是按照强粘性效应即惯性项 $u\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 与粘性项 $\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 为同数量级的估计，在 NS 方程中略去数量级小于 $\nu\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ 量级的项得到的[1,8]；第二种 SNS 方程(2.4)，则是在 NS 方程中略去数量级小于和等于 $\nu\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ 量级的粘性项得到的[2,3]。

边界层方程，SNS 方程和 Navier-Stokes 方程诸方程的数学类型不同[1]，边界层方程为抛物型，SNS 方程为扩散抛物型，但保留了压力连续性反映的椭圆性质，Navier-Stokes 方程为椭圆型，因此可以推断这些方程在流场某些特殊点将给出截然不同的结果.

三、两种 SNS 方程(2.3),(2.4)在分离点的特性

1. 讨论第一种 SNS 方程(2.3)

令 $x'=\dfrac{x}{d},\quad y'=\dfrac{R^{\frac{1}{2}}y}{d},\quad u'=\dfrac{u}{U},\quad v'=\dfrac{R^{\frac{1}{2}}v}{U},\quad p'=\dfrac{P}{\rho U^2},$

这里 d 表示特征长度，U 为特征速度，R 为 Reynolds 数. 为方便起见，我们仍用 x, y, u, v, p 表示 x', y', u', v', p'. 由方程(2.3)可得:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=-R\dfrac{\partial p}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}.\end{cases} \tag{3.1}$$

引入流函数 $\psi(x, y)$，$u=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$，$v=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$，方程(3.1)可写成

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)=0. \tag{3.2}$$

由物面条件和方程(3.1)第二式得 $\psi(x,y)$ 满足下列等式:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \quad (y=0), \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y}=0 \quad (y=0), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \quad (y=0). \tag{3.5}$$

设流函数 $\psi(x,y)$ 为:

$$\psi(x,y)=a_2\frac{y^2}{2!}+a_3\frac{y^3}{3!}+b_3\frac{y^2}{2!}\frac{x}{1!}+a_4\frac{y^4}{4!}+b_4\frac{y^3}{3!}\frac{x}{1!}+c_4\frac{y^2}{2!}\frac{x^2}{x!}+\cdots. \tag{3.6}$$

若记

$$\alpha_{n+2}^0=a_{n+2},\ \alpha_{n+3}^1=b_{n+3},\ \alpha_{n+4}^2=c_{n+4}\cdots \quad (n=0,1,2,3,\cdots), \tag{3.7}$$

则 $\psi(x,y)$ 可缩写为:

$$\psi(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{n+m+2}^m\frac{x^m}{m!}\frac{y^{n+2}}{(n+2)!}. \tag{3.8}$$

显然由(3.6)式所定义的流函数 $\psi(x,y)$满足条件(3.3),(3.4),(3.5).

定理 1. (a) 若 $(p)_{y=0}$，$(u)_{x=0}$，为已知函数，则第一种 SNS 方程(2.3)在顺流平板层流分离点上游寻常点处存在级数解。(b)若 $(P)_{y=0}$，$(u)_{x=0}$，为已知函数且在分离点处

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = a_4 \neq 0,$$

则 SNS 方程(2.3)在分离点邻域内存在级数解。

证. 设 $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y=0}$，$(u)_{x=0}$ 为如下级数

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3}\right)_{y=0} = a_3 + b_4 x + c_5 \frac{x^2}{2!} + \cdots, \tag{3.9}$$

$$(u)_{x=0} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y=0} = a_2 y + a_3 \frac{y^2}{2!} + a_4 \frac{y^3}{3!} + \cdots, \tag{3.10}$$

其中 $a_3, b_4, c_5, d_6, \cdots, a_2, a_3, a_4 \cdots$，由 $(p)_{y=0}$ 和 $(u)_{x=0}$ 来确定。

令 $r = \frac{1}{R}$，将 $\phi(x,y)$ 表达式(3.8)代入方程(3.2)比较 x, y 的同次幂系数可得下列等式：

$$\alpha^m_{m+4} + r\alpha^{m+2}_{m+4} = 0, \tag{3.11}$$

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha^j_{j+2}\alpha^{m-j+1}_{m-j+3}}{j!(m-j)!} = \frac{1}{m!}(\alpha^m_{m+5} + r\alpha^{m+2}_{m+5}), \tag{3.12}$$

$$\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha^j_{i+j+2}\alpha^{m-j+1}_{1-i+m-j+3}}{j!(i+1)!(m-j)!(1-i)!} - \sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha^{j+1}_{j+3}\alpha^{m-j}_{m-j+3}}{2!j!(m-j)!} = \frac{1}{2!m!}(\alpha^m_{m+6} + r\alpha^{m+2}_{m+6}), \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n+2}\sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha^j_{i+j+2}\alpha^{m-j+1}_{n+2-i+m-j+3}}{j!(i+1)!(m-j)!(n+2-i)!} + r\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha^{j+1}_{i+j+2}\alpha^{m-j+3}_{n-i+m-j+5}}{j!(i+1)!(m-j)!(n-i+2)!} \\
&- \sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha^{j+1}_{i+1+j}\alpha^{m-j}_{n+1-i+m-j+3}}{j!(i+2)!(m-j)!(n+1-i)!} \\
&- r\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha^{j+1}_{i+j+3}\alpha^{m-j+2}_{n-i+m-j+4}}{j!(i+2)!(m-j)!(n-i+1)!} \\
&= \frac{1}{m!(n+3)!}(\alpha^m_{n+m+7} + r\alpha^{m+2}_{n+m+7}),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$(m, n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$。根据 α 的定义(3.7)式，可将(3.11)—(3.14)式具体写成为

$$a_4 + rc_4 = 0, \tag{4(1)}$$

$$\begin{cases} a_5 + rc_5 - a_2 b_3 = 0, & 5(1) \\ b_5 + rd_5 = 0. & 5(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_6 + rc_6 - 2a_2 b_4 = 0, & 6(1) \\ b_6 + rd_6 - a_2 c_4 - b_3^2 = 0, & 6(2) \\ c_6 + re_6 = 0. & 6(3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_7 + rc_7 + 2a_4 b_3 - 2a_3 b_4 - 3a_2(b_5 + rd_5) + 3rb_3 c_4 = 0, & 7(1) \\ b_7 + rd_7 - 2a_2 c_5 - 2b_3 b_4 = 0, & 7(2) \\ c_7 + re_7 - a_2 d_5 - 3b_3 c_4 = 0, & 7(3) \\ d_7 + rf_7 = 0. & 7(4) \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
a_8 + rc_8 + 5a_5b_3 - a_3(5b_5 + 6rd_5) - 4a_2(b_6 + rd_5) + 4rb_4c_4 + 6rb_3c_5 = 0, & 8(1)\\
b_8 + rd_8 + 2a_4c_4 - 2a_3c_5 - 3a_2(c_6 + re_6) - 2b_4^2 - b_3b_5 + 3rc_4^2 = 0, & 8(2)\\
c_8 + re_8 - 2a_6d_6 - 2b_4c_4 - 4b_3c_5 = 0, & 8(3)\\
d_8 + rf_8 - a_2e_6 - 4b_3d_5 - 3c_4^2 = 0, & 8(4)\\
e_8 + rg_8 = 0. & 8(5)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
a_9 + rc_9 + 9a_6b_3 + 5a_5b_4 - 5a_4(b_5 + 2rd_5) - a_3(9b_3 + 10rd_6) & \\
\quad - 5a_2(b_7 + rd_7) + 5rb_5c_4 + 10rb_4c_5 + 10rb_3c_6 = 0, & 9(1)\\
b_9 + rd_9 + 5a_5c_4 - a_3(5c_6 + 6re_6) - 4a_2(c_7 + re_7) + b_3(b_6 + 2rd_6) & \\
\quad - b_4(5b_4 + 2rd_5) + 10rc_4c_5 = 0, & 9(2)\\
c_9 + re_9 + 2a_4b_5 - 2a_3d_6 - 3a_2(d_7 + rf_7) + b_5c_4 - 6b_4c_5 & \\
\quad - b_3(4c_6 + 3re_6) + 6rc_4b_5 = 0, & 9(3)\\
d_9 + rf_9 - 2a_2e_7 - 2b_4d_5 - 6b_3d_6 - 6c_4c_5 = 0, & 9(4)\\
e_9 + rg_9 - a_2f_7 - 5b_3e_6 - 10c_4d_5 = 0, & 9(5)\\
f_9 + rh_9 = 0, & 9(6)
\end{cases}
$$

其中记号 $m(k)$ 表示此式中未知量的最大角标为 m。

将系数写成如下三角形式:

$$
\begin{array}{llllll}
\underline{a_2}, & & & & & \\
\underline{a_3} & b_3, & & & & \\
\underline{a_4} & \underline{b_4} & c_4, & & & \\
\underline{a_5} & b_5 & \underline{c_5} & d_5, & & \\
\underline{a_6} & b_6 & c_6 & \underline{d_6} & e_6, & \\
\underline{a_7} & b_7 & c_7 & d_7 & \underline{e_7} & f_7,
\end{array}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中划线部分表示已知量.

(a)原点(0,0)不是分离点时 ($a_2 \neq 0$),由4(1),5(1),5(2)等式可得

$$b_3 = a_2^{-1}(a_5 + rc_5),\ c_4 = -r^{-1}a_4,\ b_5 = -rd_5, \tag{3.15}$$

上式中 d_5 可借助于7(1),7(3)两式确定. 7(1),7(3)式可改写为

$$
\begin{cases}
rc_7 - 3a_2(b_5 + rd_5) = -a_7 - 2a_4b_3 + 2a_3b_4 - 3rb_3c_4, & (3.16)\\
c_7 - a_2d_5 = -re_7 + 3b_3c_4. & (3.17)
\end{cases}
$$

由(3.16),(3.17)式消去 c_7 得

$$3b_5 + 2rd_5 = a_2^{-1}(a_7 - r^2e_7 + 2a_4b_3 - 2a_3b_4 + 6rb_3c_4). \tag{3.18}$$

由(3.15),(3.18)式可求出 b_5 和 d_5,

$$d_5 = -r^{-1}a^{-1}(a_7 - r^2e_7 + 2a_4b_3 - 2a_3b_4 + 6rb_3c_4);$$

再由(3.16)式可求出 c_7

$$c_7 = r^{-1}(-a_7 - 2a_4b_3 + 2a_3b_4 - 3rb_3c_4).$$

在 7(2)和 7(4)式中 b_7, d_7, f_7 为未知量,因此有一未知量不能由 7(2)和 7(4)式确定,记此未知量为 f_7,类似于对 d_5 的求法,f_7 可由9(1),9(3),9(5)和 7(2),7(4)式确定,此求解过程可交错进行下去.

(b) $a_2=0$，$a_4\neq 0$（即原点(0,0)为分离点时）由式 5(1) 可得下式

$$a_5+rc_5=0, \tag{3.27}$$

此式表示压力与速度之间的关系，事实上(3.27)式可由方程(3.2)对 y 求导并利用物面条件和分离条件得到，把方程(3.2)对 y 求导得.

$$\frac{\partial^5\psi}{\partial y^5}+r\frac{\partial^5\psi}{\partial y^3\partial x^2}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y}+r\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)=0. \tag{3.28}$$

物面条件和分离条件分别为：

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0\quad(y=0), \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0\quad(x=y=0). \tag{3.30}$$

由方程(3.28)和条件(3.29)，(3.30)得到

$$\frac{\partial^5\psi}{\partial y^5}+r\frac{\partial^5\psi}{\partial y^5}=0\quad(x=y=0). \tag{3.31}$$

由方程(3.31)即可得到(3.27)式.

下面解方程组，由 4(1)，6(1)，6(2)，6(3)，7(1)，7(3)式得

$$c_4=-\frac{a_4}{r},\quad c_6=-\frac{a_6}{r},\quad e_6=\frac{a_6}{r^2},\quad b_3=\frac{1}{4a_4}(a_7-r^2e_7-2a_3b_4),$$

$$b_6=-rd_6+\frac{1}{16a_4^2}(a_7-r^2e_7-2a_3b_4)^2,\quad c_7=-\left(re_7+\frac{3b_3a_4}{r}\right).$$

在 4(1)—7(4)式中剩下三个方程 5(2)，7(2)，7(4).

$$\begin{cases}b_5+rd_5=0, & 5(2)\\ b_7+rd_7=2b_3b_4=0, & 7(2)\\ d_7+rd_7=0. & 7(4)\end{cases}$$

以上的方程组中含有五个未知量，它们可借助于 9(1)，9(3)，9(5) 等式来确定. 9(1)，9(3)，9(5)式可写为

$$\begin{cases}rc_9-5(a_4-rc_4)b_5-10ra_4d_5=-9a_6b_3-5a_5b_4,\\ \quad+a_3(9b_6+10rd_6)-10rb_4c_5-10rb_3c_6=N_1,\\ c_9+re_9+c_4b_5+(2a_4+6rc_4)d_5=2a_3d_6+6b_4c_5,\\ \quad+b_3(4c_6+3re_6)=N_2,\\ e_9-10c_4d_5=-rg_9+5b_3e_6=N_3,\end{cases} \tag{3.32}$$

其中 N_1,N_2,N_3 表示已知量

在(3.32)式中消去未知量 c_9 和 e_9 得到

$$a_4(9b_5+8rd_5)=N_1+rN_2-r^2N_3. \tag{3.33}$$

由(3.32)，(3.33)及 5(2)式可得

$$
\begin{cases}
b_5 = -\dfrac{1}{a_4}(N_1 - rN_2 + r^2N_3), \\
d_5 = \dfrac{1}{ra_4}(N_1 - rN_2 + r^2N_3), \\
c_9 = \dfrac{N_1}{r}, \\
e_9 = N_3 - \dfrac{10}{r^2}(N_1 - rN_2 + r^2N_3);
\end{cases}
$$

再由 8(1)—8(5)式可求出 b_8, c_8, d_8, e_8, g_8，剩下的方程 7(2)和 7(4)中有三个未知量 b_7, d_7, f_7，记 f_7 为由 7(2)和 7(4) 式无法确定的未知量，类似于确定 d_5 的过程，f_7 可由 11(1)，11(3)，11(5)，11(7)式来确定(求解过程略)．对一般情况下的求解过程可参照定理 1 情况(a)．故第一种 SNS 方程在分离点邻域内存在级数解，至此定理 1(b) 证毕．

2. 关于第二种 SNS 方程(2.4)

定理 2. 若 $(p)_{y=0}$，$(u)_{x=0}$ 为已知函数，则第二种 SNS 方程(2.4)在分离点上游寻常点处存在级数解．

证. 将流函数 $\psi(x,y)$ 代入方程(2.4)得

$$
\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + r\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^4\psi}{\partial y^4},
$$

做类似于定理 1 中的运算，得到如下关系式:

$$
\alpha^m_{m+4} = 0,\ \sum_{j=0}^{m}\frac{\alpha^j_{j+2}\alpha^{m-j+1}_{m-j+3}}{j!(m-j)!} = \frac{\alpha^m_{m+5}}{m!},
$$

$$
\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{m}\frac{\alpha^j_{i+j+2}\alpha^{m-j+1}_{1-i+m-j+3}}{j!(i+1)!(m-j)!(1-i)!} - \sum_{j=0}^{m}\frac{\alpha^{j+1}_{j+3}\alpha^{m-j}_{m-j+3}}{2!j!(m-j)!} = \frac{\alpha^m_{m+6}}{2!m!},
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{m}\frac{\alpha^j_{i+j+2}\alpha^{m-j+1}_{n+2-i+m-j+3}}{j!(i+1)!(m-j)!(n+2-i)!} \\
&+ r\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\alpha^j_{i+j+2}\alpha^{m-j+2}_{n-i+m-j+5}}{j!(i+1)!(m-j)!(n-i+2)!} \\
&- \sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{m}\frac{\alpha^{j+1}_{i+j+2}\alpha^{m-j}_{n+1-i+m-j+3}}{j!(i+2)!(m-j)!(n+1-i)!} \\
&- r\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\alpha^j_{i+j+2}\alpha^{m-j+2}_{n-i+m-j+4}}{j!(i+2)!(m-j)!(n-i+1)!} \\
&= \frac{\alpha^m_{n+m+7}}{m!(3+n)!} \quad (m, n = 0, 1, 2, \cdots).
\end{aligned}
$$

由 α 的定义(3.7)式，可将上面关系式具体写为

$$a_4 = 0, \tag{4'(1)}$$

$$
\begin{cases}
a_5 - a_2b_3 = 0, & 5'(1) \\
b_5 = 0, & 5'(2)
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} a_6 - 2a_2b_4 = 0, & 6'(1) \\ b_6 - a_2c_4 - b_3^2 = 0, & 6'(2) \\ c_6 = 0. & 6'(3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_7 - 2a_3b_4 - 3ra_2d_5 + 3rb_3c_4 = 0, & 7'(1) \\ b_7 - 2a_2c_5 - 2b_3b_4 = 0, & 7'(2) \\ c_7 - a_2d_5 - 3b_3c_4 = 0, & 7'(3) \\ d_7 = 0. & 7'(4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_8 + 5a_5b_3 - a_3(5b_5 + 6rd_5) - 4a_2(b_6 + rd_6) + 4rb_4c_4 + 6rb_3c_5 = 0, & 8'(1) \\ b_8 + 2a_4c_4 - 2a_3c_5 - 3a_2(c_6 + re_6) - 2b_4^2 - b_3b_5 + 3rc_4^2 = 0, & 8'(2) \\ c_8 - 2a_2d_6 - 2b_4c_4 - 4b_3c_5 = 0, & 8'(3) \\ d_8 - a_2e_6 - 4b_3d_5 - 3c_4^2 = 0, & 8'(4) \\ e_8 = 0, & 8'(5) \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

原点(0,0)不是分离点时 $a_2 \neq 0$，由5′(1)式求出 $b_3 = \frac{a_5}{a_2}$；再由 6′(2)，7′(1)，8′(1)式求出 c_4，$d_5, b_6, \cdots$（详细求解过程略）。此时 SNS 方程(2.4)在原点邻域内存在级数解。至此定理 2 证毕。

定理 3. 若 $(p)_{y=0}$，$(u)_{x=0}$ 为已知函数，则第二种 SNS 方程(2.4)在分离点邻域内不存在形如(3.6)式的级数解。

证. 原点(0,0)为分离点时 $a_2 = 0$，由 4′(1)式可知 $a_4 = 0$，此时流函数 $\phi(x,y)$ 不能由此确定，故 SNS 方程(2.4)在分离点邻域内不存在形如(3.6)式的级数解。

定理 4. 若在分离点 $(x_s, 0)$ 处，$\left.\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right|_{(x_s,0)} \neq 0$，则第二种 SNS 方程(2.4)在分离点处存在数学奇性。

证. 记 $\bar{u} = \frac{\partial u}{\partial y}$，$\bar{v} = \frac{\partial v}{\partial y}$，$\bar{\bar{u}} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\bar{\bar{v}} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$，将方程(2.4)的第一式对 y 求一次导数，第二式对 y 求二次导数，并利用物面条件 $u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0$ 及方程(2.4)第一式导出的条件 $\bar{v}|_{y=0} = 0$，当 $y = 0$ 时，可得

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \nu \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}. \tag{3.38}$$

记 $\left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x}\right)_{(x_s,0)} = a$，式中 $a = 2\nu\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{(x_s,0)}$。由 $\left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x}\right) = 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)$ 及分离条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(x_s,0)} = 0,$$

可知当 $a \neq 0$ 时，$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)$ 在分离点 $(x_s, 0)$ 处发生奇性，即 $\lim\limits_{x \to x_s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = \infty$。下面进一步讨论 u, v 在分离点附近的特性。由分离条件 $(\bar{u})_{(x_s,0)} = 0$ 及等式(3.38)可知 $\bar{u}^2$ 可写成下列级数形式：

$$\bar{u}^2 = -a(x_s - x) + \cdots, \quad (x < x_s). \tag{3.39}$$

由(3.39)式可知 $a<0$，记 $k=(-a)^{\frac{1}{2}}$，由(3.39)式可得

$$\bar{u}=k(x_s-x)^{\frac{1}{2}}+\cdots,(x<x_s), \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}=-\frac{k}{2}(x_s-x)^{\frac{1}{2}}+\cdots,\ (x<x_s). \tag{3.41}$$

将 SNS 方程(2.4)第一式对 y 求二次导数，第二式对 y 求三次导数．并利用物面条件

$$u|_{y=0}=v|_{y=0}=0,$$

当 $y=0$ 时，可得

$$2\bar{u}=\frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial x}=\nu\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}; \tag{3.42}$$

再由(3.40)式可得

$$\frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial x}=\frac{\phi_1(x)}{\sqrt{x_s-x}}, \tag{3.43}$$

式中 $\phi_1(x)=\dfrac{\nu\left(\dfrac{\partial^5 u}{\partial y^5}\right)_{y=0}}{2k(1+0(\sqrt{x_s-x}))}$.

由(3.41)和(3.43)式，$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 可写成为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_{y=0}y+\left(\frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial x}\right)_{y=0}\frac{y^2}{2}+\cdots. \tag{3.44}$$

最后由连续方程和(3.44)式可得 u,v 在分离点附近可近似为

$$u(x,y)=u_0(y)+\alpha(y)\sqrt{x_s-x},\ v(x,y)=\frac{\beta(y)}{\sqrt{x_s-x}},$$

式中 $$\alpha(y)=\frac{1}{2}(-ky+\phi_1(x_s)y^2),\ \alpha(y)=2\beta'(y).$$

故第二种 SNS 方程在分离点存在奇异性．证毕．

四、Navier-Stokes 方程，两种 SNS 方程及边界层方程在非分离点及分离点的特性比较

记 $\psi^{(1)}(x,y)$，$\psi^{(2)}(x,y)$，$\psi^3(x,y)$ 及 $\psi^4(x,y)$ 分别表示 NS 方程、边界层方程及第一种和第二种 SNS 方程(2.3)，(2.4)．

1. 原点(0,0)不是分离点时 $(a_2\neq 0)$，此时由上文讨论可知 $\psi^{(1)}(x,y)$，$\psi^{(2)}(x,y)$，$\psi^{(3)}(x,y)$，$\psi^{(4)}(x,y)$ 分别可表示为如下级数形式[5]

$$\psi^{(1)}(x,y)=a_2\frac{y^2}{2}+a_3\frac{y^3}{3!}+\frac{a_5+2rc_5}{a_2}\frac{y^2}{2!}\frac{x}{1}+a_4\frac{y^4}{4!}+b_4\frac{y^3}{3!}\frac{x}{1}+\frac{a_4}{2r}\frac{y^2}{2!}\frac{x^2}{2!}+\cdots,$$

$$\psi^{(2)}(x,y)=a_2\frac{y^2}{2}+a_3\frac{y^3}{3!}+\frac{a_5}{a_2}\frac{y^2}{2!}\frac{x}{1}+b_4\frac{y^3}{3!}\frac{x}{1}+\frac{a_2a_8+a_5^2}{4a_2^3}\frac{y^2}{2!}\frac{x^2}{2!}+\cdots,$$

$$\psi^{(3)}(x,y)=a_2\frac{y^2}{2!}+a_3\frac{y^3}{3!}+\frac{a_5+rc_5}{a_2}\frac{y^2}{2!}\frac{x}{1}+a_4\frac{y^4}{4!}+b_4\frac{y^3}{3!}\frac{x}{1!}-\frac{a_4}{r}\frac{y^2}{2!}\frac{x^2}{2!}+\cdots,$$

$$\psi^{(4)}(x,y)=a_2\frac{y^2}{2!}+a_3\frac{y^3}{3!}+\frac{a_5}{a_2}\frac{y^2}{2!}\frac{x}{1}\cdots.$$

以上说明当原点(0,0)不是分离点时，Navier-Stokes 方程、边界层方程、第一种 SNS 方程(2.3)及第二种 SNS 方程(2.4)在原点邻域内存在级数解。

2. 原点(0,0)为分离点时 ($a_2=0$)，$\psi^{(1)}(x,y)$，$\psi^{(3)}(x,y)$ 可分别表示为如下形式的级数。

$$\psi^{(1)}(x,y)=a_3\frac{y^3}{3!}+\frac{5}{2a_4}(a_7-3r^2e_7-2a_3b_4)\frac{y^2}{2!}\frac{x}{1!}+a_4\frac{y^4}{4!}+b_4\frac{y^3}{3!}\frac{x}{1}-\frac{a_4}{2r}\frac{y^2}{2!}\frac{x^2}{2!}+\cdots,$$

$$\psi^{(3)}(x,y)=a_3\frac{y^3}{3!}+\frac{1}{4a_4}(a_7-r^2e_7-2a_3b_4)\frac{y^2}{2!}\frac{x}{1!}+a_4\frac{y^4}{4!}+b_4\frac{y^3}{3!}\frac{x}{1!}-\frac{a_4}{r}\frac{y^2}{2!}\frac{x^2}{2!}+\cdots.$$

此时边界层方程及第二种 SNS 方程 (2.4) 在分离点邻域内不存在形式为(3.6)式的级数解。Goldstein 早已证明了边界层方程在分离点的数学奇异性，本文证明了第二种 SNS 方程(2.4)在分离点的数学奇异性(即定理 4)。

附　　录

下面讨论一般求解过程，为此记

$$\psi_{2n+1}=\alpha_{2n+1}\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}+\alpha_{2n}\frac{y^{2n}}{(2n)!}\frac{x}{1!}+\cdots+\alpha_2\frac{y^2}{2!}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\tag{3.19}$$

$$\psi_{2n-1}=\beta_{2n-1}\frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!}+\beta_{2n-2}\frac{y^{2n-2}}{(2n-2)!}\frac{x}{1!}+\cdots+\beta_2\frac{y^2}{2!}\frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!}\tag{3.20}$$

在 ψ_{2n+1} 中 α_{2n+1} 和 α_3 是已知量，在 ψ_{2n-1} 中 β_{2n-1} 和 β_3 为已知量. 从前面的讨论可知 $\beta_5,\beta_7\cdots\beta_{2n-3}$ 可以确定，另外的 $n-1$ 个未知量 $\beta_2,\beta_4,\beta_6\cdots\beta_{2(n-1)}$ 满足下列 $(n-2)$ 个方程：

$$\begin{cases}\beta_{2n-2}+r\beta_{2n-4}=N_{2n-2},\\ \beta_{2n-4}+r\beta_{2n-6}=N_{2n-4},\\ \cdots\cdots\\ \beta_6+r\beta_4=N_6,\\ \beta_4+r\beta_2=N_4,\end{cases}\tag{3.21}$$

其中 $N_4,N_6\cdots N_{2(n-2)}$ 是已知量，今以 β_2 表示由上方程组(3.21)无法确定的未知量，(3.21)式可改写为

$$\begin{cases}\beta_4=-r\beta_2+N_4,\\ \beta_6=r^2\beta_2+N_6,\\ \cdots\cdots,\\ \beta_{2n-2}=(-1)^n r^{n-2}\beta_2+N_{2n-2}.\end{cases}\tag{3.22}$$

由比较同次幂得到的方程组可知，$\beta_2,\beta_4,\cdots\beta_{2n-2}$ 出现在以 $\alpha_5,\alpha_7,\cdots\alpha_{2n-1},\alpha_{2n+1}$ 为未知量所组成的方程组中，并具有下列形式(参考 4(1)—9(6)式)。

$$a_2(\beta_{2n-2k}+r\beta_{2n-2(k+1)}),\quad k=1,2,\cdots,(n-1).$$

而形式为 $a_2(\beta_{2n-2k}+r\beta_{2n-2(k+1)})$ 的项仅出现在

$$-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+r\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]=-a_2y\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+r\frac{\partial^2\psi}{\partial x}\right]+\cdots\tag{3.23}$$

中。通过计算得到关于带有奇数指标集 α 的方程组

$$\begin{cases}\alpha_{2n+1} + r\alpha_{2n-1} - (2n-3)a_2(\beta_{2n-2} + r\beta_{2n-4}) = N_{2n+1}, \\ \alpha_{2n-1} + r\alpha_{2n-3} - (2n-5)a_2(\beta_{2n-4} + r\beta_{2n-6}) = N_{2n-1}, \\ \cdots, \\ \alpha_5 + r\alpha_3 - a_2\beta_2 = N_5,\end{cases} \tag{3.24}$$

其中 $N_5, N_7 \cdots N_{2n+1}$ 是已知量,将(3.21)式代入(3.24)式得

$$\begin{cases} r\alpha_{2n-1} = N_{2n+1}, \\ \alpha_{2n-1} + r\alpha_{2n-3} = N_{2n-1}, \\ \cdots \\ \alpha_7 + r\alpha_5 = N_7, \\ \alpha_5 - a_2\beta_2 = N_5,\end{cases} \tag{3.25}$$

在式(3.25)中消去 $\alpha_5, \alpha_7 \cdots \alpha_{2n-1}$ 得到

$$(-1)^{n-1}r^{n-2}a_2\beta_2 = N_{2n+1} - rN_{2n-1} + \cdots + (-1)^{n-2}N_5. \tag{3.26}$$

将(3.26)式的 β_2 代入(3.22)式可求出 $\beta_4, \beta_6, \cdots \beta_{2n-2}$, 即此求解过程可交错进行下去,故流函数可表为级数解。至此定理 1(a) 证毕。

补记 级数解系数的进一步关系,由于

$$u' = \frac{\partial\phi'}{\partial y'} = u_1y' + u_2y'^2 + u_3y'^3 + \cdots \quad (x' = 0), \tag{3.34}$$

$$-\frac{\partial p'}{\partial x'} = p_0 + p_1x' + p_2x'^2 + \cdots \quad (y' = 0). \tag{3.35}$$

故

$$u = Uu' = U\frac{\partial\phi'}{\partial y'} = U\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(\frac{R^{1/2}y}{d}\right)^n \quad (x = 0), \tag{3.36}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\frac{U^2}{d}\frac{\partial p'}{\partial x'} = \rho\frac{U^2}{d}\sum_{n=0}^{\infty} p_n\left(\frac{x}{d}\right)^n \quad (y = 0). \tag{3.37}$$

以上各式中诸系数之间存在下列关系

$$s!u_s = a_{s+1}\ (s = 1,2,3,\cdots),\quad p_0 = -a_3;\quad p_1 = -b_4,\quad 2!p_2 = -c_5,\cdots.$$

由前面讨论可知定理 1(a)的前提条件又可转化为(1) $u_1 \neq 0$, $2u_2 + p_0 = 0$;定理 1(b) 的前提条件又可转化为(2) $u_1 = 0$, $u_3 \neq 0$, $2u_2 + p_0 = 0$, $4!u_4 - 4rp_2 = 0$.

参 考 文 献

[1] 高智,力学学报,14(1982),6: 606—611.
[2] Davis, R.T., *AIAA Jour.*, 8 (1970), 5:843—851.
[3] Головачев, Ю.П. и.д., *Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физ.*, **13** (1973), 4:1021—1028.
[4] Anderson, D.A. et al., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw-Hill Book Company, 1982.
[5] Smith, F.T., *IMA Journal of Applied Mathematics*, 28 (1982), 3.
[6] Dean, W.R., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **46**(1949), 293—306.
[7] 高智,中国科学 A 辑,1987,10: 1058.
[8] 高智,同上,1988,6: 625.
[9] 高智,力学学报,20(1990),1: 9—19.