

# 对Schapery本构方程改进的几点尝试

向小运 张双寅

(中国科学院力学研究所)

## 提 要

Schapery本构关系能够很好地描述材料的粘弹性变形,但其中存在着下面几个问题:(1)当材料的蠕变变形含有粘塑性变形时,直接引用Schapery本构方程是不准确的;(2)材料的蠕变一般有损伤产生,Schapery本构方程不能体现损伤特征;(3)理论上讲,无论载荷的突变量多大,粘弹性变形总有一个时间过程,这一点与Schapery本构方程不一致;(4)Schapery本构方程的参数确定是由曲线来拟合,这种方法有很大的主观性,本文介绍了Schapery本构方程的推导过程,针对上述问题提出了一些修改意见。

## 一、Schapery本构方程

文献[6]详细地给出了Schapery粘弹性本构方程的推导,本文作如下的归纳:

将所考虑的材料设定为一个热力学系统,其状态由 $N$ 个广义变量 $q_i$ 表示(本文不考虑温度)定义相应的广义力为 $Q_i$ 使功增 $\delta w = Q_i \delta q_i$ ,将广义变量分为 $K$ 个显含变量 $q_m$ (宏观可测)和 $N-K$ 个隐含变量 $q_r$ (宏观不可测),一般地取隐含变量对应的广义力为0,定义指标求和范围:

$$i, j, p = 1, 2, \dots, N \quad (1-1)$$

$$m, n = 1, 2, \dots, K$$

$$r, s = K + 1, K + 2, \dots, N$$

根据热动理论得到 $q_i$ 满足的方程为<sup>[3,4,5]</sup>:

$$\frac{\partial F}{\partial q_m} + a_D b_{m,i} \frac{dq_i}{dt} = Q_m \quad (1-2A)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_r} + a_D b_{r,i} \frac{dq_i}{dt} = 0 \quad (1-2B)$$

其中: $F$ 为Helmholtz自由能, $a_D$ 为广义力 $Q_m$ 的函数,可以证明<sup>[6]</sup>:总能找到一组隐含变量使:

$$b_{m,i} = 0 \quad (1-3)$$

并引入Gibbs自由能:

$$G = F - Q_m q_m \quad (1-4)$$

则方程(1-2)为:

$$q_m = - \frac{\partial G}{\partial Q_m} \quad (1-5A)$$

本文收到日期1990年11月4日

$$\frac{\partial G}{\partial q_r} + a_D b_{r,s} \frac{dq_s}{dt} = 0 \quad (1-5B)$$

其中:  $G = G(Q_m, q_r)$

将 $G$ 对变量 $q_r$ 展开:

$$G = G_R + G'_r q_r + \frac{1}{2} d'_{rs} q_r q_s \quad (1-6)$$

其中:  $G_R, C'_r, d'_{rs}$  一般为 $Q_m$ 的函数, 代入到(1-5)中, 并略去 $q_r$ 的二次项及更高次项:

$$q_m = -\frac{\partial G_R}{\partial Q_m} - \frac{\partial C'_r}{\partial Q_m} q_r \quad (1-7A)$$

$$C'_r + d'_{rs} q_s + a_D b_{r,s} \frac{dq_s}{dt} = 0 \quad (1-7B)$$

假设:

$$d'_{rs} = a_G d_{r,s} \quad (1-8)$$

其中:  $a_G$ 为广义力 $Q_m$ 的函数,  $d_{r,s}$ 为常数, 并定义:

$$d\phi = \frac{dt}{a_G} \quad a_G = \frac{a_D}{a_G} \quad (1-9)$$

将 $q_r$ 建立在主坐标下,  $d_{r,s}, b_{r,s}$ 退化为对角阵 $d_r, b_r$ , 方程(1-7B)简化为:

$$d_r q_r + b_r \frac{dq_r}{d\phi} = -\frac{C'_r}{a_G} \quad (\text{对 } r \text{ 不求和}) \quad (1-10)$$

根据熵增原理, 有下列不等式成立:

$$d_r \geq 0 \quad b_r \geq 0 \quad (1-11)$$

(1)  $d_r > 0, b_r = 0$ : 由(1-5)得到,  $G$ 中不含这一类隐含变量 $q_r$ , 即 $q_m$ 与 $q_r$ 无关, 因此这一类隐含变量可以不考虑。

(2)  $d_r = 0, b_r > 0$ : 积分(1-10)得到:

$$q_r = -\frac{C'_r}{b_r a_G} \phi \quad (1-12)$$

(3)  $d_r > 0, b_r > 0$ : 求解(1-10)得到:

$$q_r = -\left(1 - e^{-\phi/\tau_r}\right) \frac{C'_r}{d_r a_G} \quad (1-13)$$

其中:  $\tau_r = b_r/d_r$

具有(2)的特性的隐含变量用 $r_2$ 表示, 其余隐含变量具有(3)的特性, 用 $r_3$ 表示, 将(1-12)、(1-13)代入到(1-7A)中:

$$q_m = -\frac{\partial G_R}{\partial Q_m} + \sum_{r_3} \frac{\partial C'_{r_3}}{\partial Q_m} \left(1 - e^{-\phi/\tau_{r_3}}\right) \frac{C'_{r_3}}{d_{r_3} a_G} + \sum_{r_2} \frac{\partial C'_{r_2}}{\partial Q_m} \frac{C'_{r_2}}{b_{r_2} a_G} \phi \quad (1-14)$$

对于变载荷, 取积分为:

$$q_m = -\frac{\partial G_R}{\partial Q_m} + \sum_{r3} \frac{\partial C'_{r3}}{\partial Q_m} \frac{1}{d_{r3}} \int_{-\infty}^{\phi} (1 - e^{-(\phi - \phi')/\tau_{r3}}) \frac{d(C'_{r3}/a_G)}{d\phi'} d\phi' + \sum_{r2} \frac{\partial C'_{r2}}{\partial Q_m} \frac{1}{b_{r2}} \int_{-\infty}^{\phi} \left(\frac{C'_{r2}}{a_G}\right) d\phi' \quad (1-15)$$

在线性系统内，将G对Q<sub>m</sub>、q<sub>r</sub>展开，并与(1-6)比较，可以得到：

$$C'_r = d_{rm} Q_m \quad (1-16A)$$

其中：d<sub>rm</sub>为常数，对于非线性系统，Schapery假设：

$$C'_r = d_{rm} \hat{Q}_m \quad (1-16B)$$

将(1-16B)代入到(1-14)中，对变载荷作积分得到

$$q_m = -\frac{\partial G_R}{\partial Q_m} + \frac{\partial \hat{Q}_m}{\partial Q_m} \int_{-\infty}^t \Delta S_{np}(\phi - \phi') \frac{d(\hat{Q}_p/a_G)}{d\phi'} d\phi' \quad (1-17A)$$

$$\Delta S_{np}(\phi) = \sum_{r3} A_{np}^{(r3)} (1 - e^{-\phi/\tau_{r3}}) + A'_{np} \phi \quad (1-17B)$$

$$A_{np}^{(r3)} = \frac{d_{r3n} d_{r3p}}{d_{r3}} \quad A'_{np} = \sum_{r2} \frac{d_{r2n} d_{r2p}}{b_{r2}} \quad (1-17C)$$

简化到一维问题，即得到Schapery本构方程：

$$\varepsilon = s_0 g_0 \sigma + g_1 \int_{-\infty}^{\phi} \Delta s(\phi - \phi') \frac{d(g_2 \sigma)}{d\phi'} d\phi' \quad (1-18)$$

其中：  $g_0 = -\frac{dG_R}{s_0 d\sigma}$ ,  $g_1 = \frac{d\hat{Q}_1}{d\sigma}$ ,  $g_2 = \frac{\hat{Q}_1}{\sigma a_G}$ ,  $a_\sigma = \frac{a_D}{a_G}$ ,

$d\phi = \frac{dt}{a_\sigma}$ ,  $\Delta s = s_1 \phi^n$ .

方程中含有S<sub>0</sub>、S<sub>1</sub>、n三个参数和g<sub>0</sub>、g<sub>1</sub>、g<sub>2</sub>、a<sub>σ</sub>四个参函数，他们可由Schapery方法来确定<sup>[7]</sup>，下面讨论这一本构中存在的几个问题。

## 二、g<sub>1</sub> 的存在性

(1) 假设蠕变的应力曲线如图1所示，积分(1-18)得到，在t<sub>1</sub><sup>-</sup>时刻：

$$\varepsilon(t_1^-) = S_0 g_0(\sigma_1) \sigma_1 + g_1(\sigma_1) g_2(\sigma_1) \cdot \sigma_1 \Delta S(\phi_1) \quad (2-1A)$$

在t<sub>1</sub><sup>+</sup>时刻：

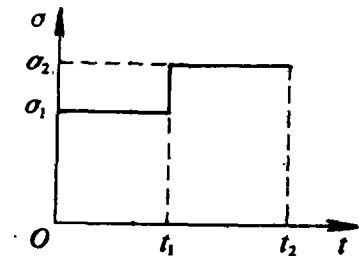


图 1

$$\varepsilon(t_1^+) = S_0 g_0(\sigma_2) \sigma_2 + g_1(\sigma_2) g_2(\sigma_1) \cdot \sigma_1 \Delta S(\phi_1) \quad (2-1B)$$

两式相减:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_1^+) - \varepsilon(t_1^-) = & S_0 [g_0(\sigma_2) \sigma_2 - g_0(\sigma_1) \sigma_1] \\ & + [g_1(\sigma_2) - g_1(\sigma_1)] g_2(\sigma_1) \Delta S(\phi_1) \end{aligned} \quad (2-2)$$

式(2-2)中第二项的物理意义:在载荷突然改变的瞬间,粘弹性变形也同时改变,即粘弹性变形是不连续的,这与粘弹性理论中的三元件、四元件模型是矛盾的。

(2) Schapery在系统受常载荷作用下求解得到(1-14)的结果,在变载荷作用时取了

(1-15)的积分,并假设其中的 $\frac{\partial C'_r}{\partial Q_m}$ 与时间 $t$ (或 $\phi$ )无关,因此在积分号之外,实际上,

$\frac{\partial C'_r}{\partial Q_m}$ 为 $Q_m$ 的函数,在变载荷作用时, $\frac{\partial C'_r}{\partial Q_m}$ 也将随时间而改变,因此积分应该为:

$$\begin{aligned} q_m = & -\frac{\partial G_R}{\partial Q_m} + \sum_{r3} \frac{1}{d_{r3}} \int_{-\infty}^{\phi} \left( 1 - e^{-(\phi - \phi')/\tau_{r3}} \right) \\ & \cdot \frac{d \left( \frac{C'_{r3}}{a_G} \cdot \frac{\partial C'_{r3}}{\partial Q_m} \right)}{d\phi'} d\phi' \\ & + \sum_{r2} \frac{1}{b_{r2}} \int_{-\infty}^{\phi} \left( \frac{C'_{r2}}{a_G} \frac{\partial C'_{r2}}{\partial Q_m} \right) d\phi' \end{aligned} \quad (2-3)$$

上式的修正在一维本构方程体现为 $g_1$ 在 $g_2$ 之前,不妨取 $g_1 \cdot g_2$ 仍为函数 $g_2$ ,则方程即不含 $g_1$ ,由此,本文建议Schapery本构中 $g_1$ 恒为1。

### 三、粘塑性项的引入

(1) Schapery本构方程是从热力学过程中推导的,其变量是广义的,本构关系中应包括粘塑性变形。

分析 $d_r = 0$ 、 $d_r > 0$ 这一情况不难得到(1-14)中的第二项和第三项分别为粘弹性变形和粘塑性变形, Schapery将这两项合并为式(1-17A)的一个函数 $\Delta S_{np}$ ,因此 $\Delta S_{np}$ 的选取应包括塑性流动。Schapery在文献<sup>[8]</sup>中指出: $\Delta S$ 的选取并不是唯一的,对于有塑性流动的情况,可取为<sup>[8]</sup>:

$$\Delta S(\phi) = \sum_r D_r (1 - e^{\phi/\tau_r}) + D_S \phi \quad (3-1)$$

他认为塑性变形一般很小,因此 $D_S = 0$ ;在一些文献中对一维问题取 $\Delta S = S_1 \phi^n$ ,并且对变载荷作遗传积分,实际上也忽略了塑性流动。

(2) 如果考虑塑性变形,  $\Delta S(\phi)$  中含有粘弹性项和粘塑性项, 但它不能按(1-17)那样作遗传积分, 公认地对于变载荷作用的粘弹性变形应作遗传积分<sup>[16]</sup>, 但塑性流动仅有变形的积累, 其增量取决于当前时刻的应力和变形, 因此应该在时间域里取历史积分, 即按(1-15)或(2-3)处理。

一些工程材料(如复合材料)不仅具有粘弹特性, 而且也有粘塑特性, 要准确地描述其变形必须引入粘塑性项。

#### 四、损伤的引入

实验数据表明<sup>[9]</sup>: 在蠕变卸载时刻的弹性变形比加载时刻的弹性变形大, 可以认为在蠕变过程中弹性模量减小了, 按照经典损伤力学理论, 在本构关系中引入损伤量可以反映这一特征。

综上所述, 本文对Schapery本构方程作了如下的改进。

对于常载荷:

$$\varepsilon = S_0 g_0 \tilde{\sigma} + \Delta S_{v,e}(\phi) g_2 \tilde{\sigma} + \Delta S_{v,p}(t) g_3 \tilde{\sigma} \quad (4-1)$$

其中  $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D}$ ,  $D$  为标量形式的损伤量, (当  $d_r = 0$  时, 将(1-10)的  $\phi$  还原为  $t$  即得到上式中的第三项), 对于变载荷作用:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & S_0 g_0 \tilde{\sigma} + \int_{-\infty}^{\phi} \Delta S_{v,e}(\phi - \phi') \frac{\partial(g_2 \tilde{\sigma})}{\partial \phi'} d\phi' \\ & + \int_{-\infty}^t g_3 \tilde{\sigma}(t') \frac{\partial[\Delta S_{v,p}(t')]}{\partial t'} dt' \end{aligned} \quad (4-2)$$

#### 五、参数的拟合

(1) 本构方程的参数测定: 式(4-2)的本构方程中耦合有损伤, 但在蠕变的第一、二阶段, 损伤量很小, 因此实验可设计在第一、二两个阶段, 在弹性部分考虑损伤, 在粘性部分应力仍取名义应力<sup>[17]</sup>:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & S_0 g_0 \tilde{\sigma} + \int_{-\infty}^{\phi} \Delta S_{v,e}(\phi - \phi') \frac{\partial(g_2 \tilde{\sigma})}{\partial \phi'} d\phi' \\ & + \int_{-\infty}^t g_3 \tilde{\sigma} \frac{\partial[\Delta S_{v,p}(t')]}{\partial t'} dt' \end{aligned} \quad (5-1)$$

$$\text{其中: } d\phi = \frac{dt}{a_\sigma}$$

方程中  $\Delta S_{v,e}$  仍按Schapery设定的形式

$$\Delta S_{v,e} = S_1 \phi^n \quad (5-2)$$

方程中 $\Delta S_{v,p}$ 按(3-1)式为 $t$ 的线性函数,参考文献<sup>[12]</sup>,可以取为指数形式:

$$\Delta S_{v,p} = B t^m \quad (5-3)$$

参考塑性蠕变规律<sup>[14][15]</sup>,设:

$$g_3 \sigma = \sigma^s \quad (5-4)$$

以上方程中含有参数 $B$ 、 $s$ 、 $m$ 、 $S_0$ 、 $S_1$ 、 $n$ 和参函数 $g_0(\sigma)$ 、 $g_2(\sigma)$ 、 $a_\sigma(\sigma)$ ,它们将通过蠕变-恢复实验来确定,实验应力如图2所示,变形分解如图3所示,其中弹性变形(考虑到损伤量 $D$ 很小):

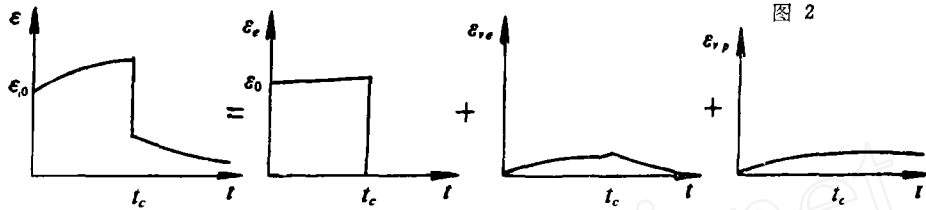
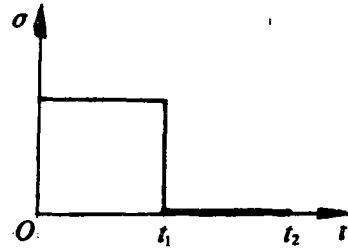


图3

$$\varepsilon_e = S_0 g_0 \tilde{\sigma} = g_0 S_0 \sigma (1 + D) \quad (5-5)$$

蠕变阶段的变形(不包括弹性变形)

$$\varepsilon_c = g_2 S_1 \sigma t^n / a_\sigma^n + B \sigma^s t^m \quad (5-6)$$

恢复阶段的变形:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{v,p}(t_c) + [\varepsilon(t_c^+) - \varepsilon_{v,p}(t_c)] [(1 + a_\sigma \lambda)^n - (a_\sigma \lambda)^n] \quad (5-7)$$

$$\text{其中: } \lambda = \frac{t - t_c}{t_c}$$

参数确定的步骤是:(1)低应力水平 $\sigma_{min}$ 下确定 $S_0$ 、 $S_1$ 、 $n$ 及 $\varepsilon_{v,p}(\sigma_{min}, t_c)$ ;(2)高应力水平 $\sigma_i$ 下确定 $g_0(\sigma_i)$ 、 $g_2(\sigma)$ 、 $a_\sigma(\sigma)$ 及 $\varepsilon_{v,p}(\sigma_i, t_c)$ ;(3)由 $\varepsilon_{v,p}(\sigma_i, t_c)$ 确定参数 $B$ 、 $s$ 、 $m$ ;(4)由 $g_0(\sigma_i)$ 等各函数值确定函数形式。

(2)曲线拟合的改进:Schapery<sup>[7]</sup>的曲线拟合参数是通过曲线平移并由平移量来确定取值。本文提出离散变量和最小二乘法相结合的方法,例如在最低应力下式(5-7)为:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{v,p} + \left[ \varepsilon(t_c^+) - \varepsilon_{v,p} \right] \left[ (1 + \lambda)^n - \lambda^n \right] \quad (5-8)$$

作余差函数:

$$f(\varepsilon_{v,p}, n) = \varepsilon_r - \varepsilon_{v,p} - \left[ \varepsilon(t_c^+) - \varepsilon_{v,p} \right] \left[ (1 + \lambda)^n - \lambda^n \right] \quad (5-9)$$

参数确定的步骤是:离散变量 $\varepsilon_{v,p}$ 、 $n$ ,使余差函数的平方和取得最小值时所对应的离散值 $\varepsilon_{v,p}$ 、 $n$ 近似为真实值;逐渐缩小范围离散,所求得的离散值就可以逼近真实值。

## 六、实例分析

本文实验采用玻璃纤维复合材料,实验在常温下进行,实验中的应力分别为 $\sigma = 36 \text{ MPa}$

和 $\sigma = 70\text{MPa}$ , 实验与理论比较如图4、5所示, 其中的实线为蠕变—恢复的实验记录曲线;

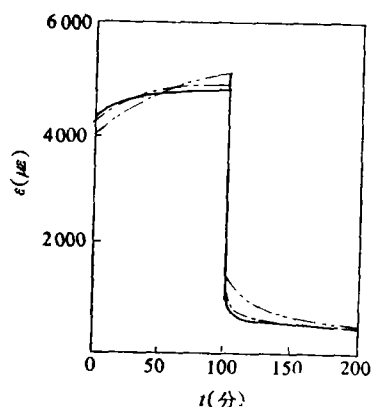


图 4

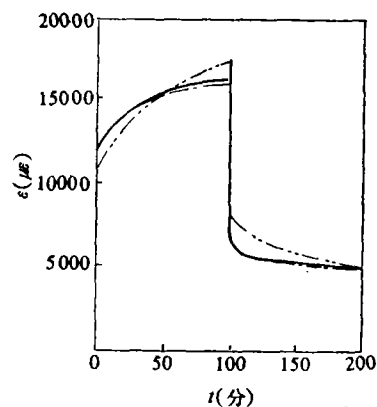


图 5

点画线所表示的理论曲线考虑了粘塑性变形存在, 双点画线所表示的理论曲线是由Schapery方法<sup>[7]</sup>得到的, 即没有考虑粘塑性变形, 图中结果表明考虑粘塑性变形是趋于准确的。

## 七、小 结

(1) 本文改进的本构方程能保证应力突变时粘弹性变形的连续性。

(2) 在本构方程中引入了粘塑性项, 实验结果表明; 这一改进使理论本构方程能更准确地描述蠕变变形。

(3) 提出了离散变量和最小二乘法联合拟合非线性方程中参数的方法, 实践证明: 这一方法在精度上和计算时间上都是可行的。

## 参 考 文 献

- [1] M.A.Biot, J.Appl. Phys., 25, 11 (1954), PP.1385-1391
- [2] M.A.Biot, Proc.3rd U.S.Nat Cong. Appl. Mech., ASME (1958), PP.1-18
- [3] R.A.Schapery, J. Appl. Phys., 35,5 (1964), PP.1451-1465
- [4] R.A.Schapery, Proc. 5th U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., ASME(1966), PP.510-530
- [5] R.A.Schapery, Int. J. Solids Structures, 2 (1966), PP.407-425
- [6] R.A.Schapery, Further development of a Thermodynamic Constitutive Theory: Stress Formulation, Purdue University, Rept. No. 69-2 (February 1969)
- [7] Y.C.Lou and R.A.Schapery, J.Comp. Mater., 5 (1971), PP.208-234
- [8] R.A.Schapery, Ploymer Engng. Sci., 9, 4 (1969), PP.295-310
- [9] M.E.Tuttle and H.F.Brinson, Experimental Mechanics, March, (1986),

PP.89-102

- [10] A.H.Cardon, Proc. ICCM-7, V.2, PP.15-20, Ed. by Wu Yunshu, 1989, Beijing
- [11] A.H.Cardon et., Proc. ISCMS., P.619-623, Ed. by T.T.Coo and C.T.Sun, June 1986, Beijing, China
- [12] 蔡良武, 张双寅, 第五届全国复合材料会议论文集, PP312-317, 1988, 西安
- [13] J.L.Chaboche, Nuclear Engng. Desi., 79 ( 1984 ), PP.309-319
- [14] C.Y.Hui, Elastic-Plastic Fracture, V.1, PP.573-593, ASTM 803, 1983
- [15] H.Riedel, Proc. ICF-5 ( 1981 ). V.2, PP.683-698, D.Francois ed.
- [16] 蔡峨, 粘弹性力学基础, 北京航天航空大学出版社, 1987
- [17] J.Lemaitre, Nuclear Engng. Desi., 80 ( 1984 ), PP.233-245

## SOME SUGGESTIONS ON THE MODIFICATION OF SCHAPERY EQUATION

Xiang Xiaoyun Zhang Shuangyin

( Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences )

### Abstract

Based on thermodynamics, Schapery derived the nonlinear viscoelastic constitutive equation. Keeping up with it, many researchers used it to describe the viscoelastic or creep deformations. But the following points are questionable: 1) It is not valid to use Schapery Equation directly when viscoplastic deformation occurs, which cannot be recovered after the load is removed. 2) Generally the damage will develop in creep process, i.e., cracks or voids will appear in the material; Schapery Equation cannot characterize the damage behavior. 3) No matter how large is the loading change, viscoelastic-plastic deformation is continuous, which disagrees with Schapery Equation. 4) In some way, results by Schapery's modelling curves are subjectively affected.

In this paper, the derivation of Schapery Equation is reviewed. Then the above four questions are discussed in detail. Finally, the conclusion is drawn that Schapery Equation, being properly modified, can be used to describe the creep deformation and characterize the damage of materials.