

# 对流扩散方程的四阶紧凑迎风差分格式\*

陈国谦 高智

(中国科学院力学研究所)

## A COMPACT FOURTH-ORDER UPWIND FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR CONVECTION DIFFUSION EQUATION

Chen Guo-qian Gao Zhi

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

### Abstract

A compact fourth-order upwind finite difference scheme, which takes classical first-order upwind scheme as basic representation and thus has no grid Reynolds-number limitation, is developed for the convection diffusion equation with the help of a perturbation technique. Numerical examples including model equations of fluid flow and a problem of high Rayleigh-number natural convection with boundary-layer effect are given to illustrate the excellent behavior of the present scheme.

### § 1. 引言

流动和传热传质的基本方程均是对流扩散型的。对流扩散方程的高阶紧凑差分格式,作为提高计算可靠性和节省计算量的一条有效途径,已引起相当的重视<sup>[1]</sup>。作为该领域的一大进展,新近由 Dennis 推出的对流扩散方程四阶紧凑格式<sup>[2]</sup>,在二维情形下呈九点式且勿须引入中间变量,只涉及对流扩散量本身,能在较粗网格下获取较为准确的数值结果。从本质上说,该格式系指数型四阶紧凑格式<sup>[2,3]</sup>的多项式型翻版。它与指数型紧凑格式一样,基于指数型变换<sup>[4]</sup>和差分修正法<sup>[5]</sup>。指数型变换<sup>[4]</sup>是推求高阶紧凑格式的关键所在,因该变换能消除对流扩散方程中的一阶对流项,避免最为棘手的迎风效应的直接处理,而差分修正法是在低阶格式基础上添加方程各项的高阶差分展开项,以获得高阶精度。由于高阶差分的形式与低阶格式中低阶差分的形式不同,所得高阶格式往往不能保持低阶格式的对角占优结构,从而引起解的存在唯一性方面的问题。即便是一维情形,也

\* 1990年9月21日收到。

只有在一定条件下,由 Dennis 发展的四阶紧凑格式才能对角占优。

本文提出差分格式的摄动方法,不涉及所谓关键的指数型变换,直接从流体力学计算中最常用的一阶迎风格式出发,构造具有良好稳定性的对流扩散方程四阶紧凑迎风格式。众所周知,流体力学计算中最先采用的是二阶中心差分格式。中心格式因对大于 2 的网格雷诺数不能对角占优,遂被无条件对角占优的一阶迎风格式所取代。此举以牺牲精度来改善格式结构,代价沉重。在每一空间方向上涉及三个网格点的迎风格式只有一阶的精度,是流体力学计算中一大憾事。而本文的摄动方法,能在保持格式基本结构不变的前提下,将迎风格式的精度提高。首先就一维情形,经一阶摄动将迎风格式的精度提高至二阶,再以所得二阶迎风格式为基础,经三阶摄动推得无条件对角占优的四阶紧凑迎风格式。然后,同样的思路(复杂的摄动)用于二维情形。最终,作一、二维非线性流动模型方程和自然对流传热问题的详细数值求解,将所得结果与方程的准确分析解或问题的“标准”数值解作比较,以说明本文理论工作的成效。

## § 2. 一维二阶紧凑迎风格式

一维对流扩散方程

$$2A \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + S \quad (2.1)$$

的经典迎风格式

$$\begin{aligned} \frac{2}{h^2} (1 + |A_i| h) \phi_i - \frac{1}{h^2} [1 + 2\text{Max}(0, -A_i) h] \phi_{i+1} \\ + \frac{1}{h^2} [1 + 2\text{Max}(0, A_i) h] \phi_{i-1} + S_i \end{aligned} \quad (2.2)$$

(其中  $h$  为网格尺度)等价于微分方程

$$2A \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + S + E_s h + O(h^2), \quad (2.3)$$

其中

$$E_s = |A| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \quad (2.4)$$

由于迎风格式具有良好的性态,我们期望在改进精度的同时保持格式的基本结构不变。为消除等价方程(2.3)中的一阶项,设格式(2.2)中对流系数  $A$  和源项  $S$  发生一阶摄动,即格式成为

$$\begin{aligned} \frac{2}{h^2} (1 + |A_{p,i}| h) \phi_i - \frac{1}{h^2} [1 + 2\text{Max}(0, -A_{p,i}) h] \phi_{i+1} \\ + \frac{1}{h^2} [1 + 2\text{Max}(0, A_{p,i}) h] \phi_{i-1} + S_{p,i}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中

$$A_p = A + \Delta A \cdot h, \quad (2.6)$$

$$S_p = S + \Delta S \cdot h. \quad (2.7)$$

格式(2.5)的等价微分方程为

$$2A_p \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + S_p + E_{p,x}h + O(h^2), \quad (2.8)$$

其中

$$E_{p,x} = |A_p| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \quad (2.9)$$

若如下关系式成立:

$$\text{Sign}(A_p) = \text{Sign}(A), \quad (2.10)$$

$$2\Delta A \frac{\partial \phi}{\partial x} = |A| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Delta S + O(h), \quad (2.11)$$

则格式(2.5)即达二阶精度。为了确定  $\Delta A$  与  $\Delta S$  的具体形式,我们注意到方程(2.8),有

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2A \frac{\partial \phi}{\partial x} - S + O(h). \quad (2.12)$$

代入式(2.11),得摄动量的表达式如下:

$$\Delta A = \text{Sign}(A)A^2 + O(h), \quad (2.13)$$

$$\Delta S = |A|S + O(h), \quad (2.14)$$

且满足式(2.10).

将(2.13)和(2.14)代入方程(2.5),得二阶迎风格式

$$\begin{aligned} \frac{2}{h^2}(\alpha + |A_i|h)\phi_i - \frac{1}{h^2}[\alpha + 2\text{Max}(0, -A_i)h]\phi_{i+1} \\ + \frac{1}{h^2}[\alpha + 2\text{Max}(0, A_i)h]\phi_{i-1} + S_i, \end{aligned} \quad (2.15)$$

其中

$$\alpha = 1 - \frac{|A_i|h}{1 + |A_i|h}. \quad (2.16)$$

$1 \geq \alpha > 0$  保证了格式的无条件稳定性及迎风性。与源格式(2.2)对比,二阶格式(2.15)只是将经典格式中的扩散系数从 1 变成  $\alpha$ , 以补偿对流项迎风差分所引起的“伪扩散”<sup>[6]</sup>。我们称此补偿修正为扩散系数的对流修正。含对流修正的对流扩散方程

$$2A \frac{\partial \phi}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + S \quad (2.17)$$

的经典一阶迎风差分格式即源对流扩散方程(2.1)的二阶紧凑迎风差分格式。

一阶迎风格式向二阶紧凑迎风格式的转化,最终体现在扩散系数的修正上。修正对流系数的方法,通常称作人工粘性法或反扩散法。而本文中扩散系数的修正是在维持格式基本结构(以保证稳定性)的前提下提高格式精度而得,并非直接套用反扩散法所能达到。据一阶格式的等价方程(2.3)依反扩散法,可对方程:

$$2A \frac{\partial \phi}{\partial x} = (1 - |A|h) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + S$$

施行经典迎风差分,得到具有二阶精度的格式如下:

$$\begin{aligned} \frac{2}{h^2} \phi_i - \frac{1}{h^2} [1 - |A_i|h + 2\text{Max}(0, -A_i)h] \phi_{i+1} \\ + \frac{1}{h^2} [1 - |A_i|h + 2\text{Max}(0, A_i)h] \phi_{i-1} + S_i \end{aligned}$$

而该格式只在  $|A_i|h \leq 1$  的情况下才能对角占优,与经典中心差分格式一样,不能适应较大的网格雷诺数.

### § 3. 一维四阶紧凑迎风格式

四阶紧凑格式系以二阶紧凑格式为基本结构,经恰当摄动达成.

二阶紧凑迎风格式(2.15)的等价微分方程为

$$2A \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + S + E_{xx}h^2 + E_{xxx}h^3 + O(h^4), \quad (3.1)$$

其中

$$E_{xx} = A^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{3} A \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}, \quad (3.2)$$

$$E_{xxx} = -\text{Sign}(A) A^3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}. \quad (3.3)$$

为了消除(3.1)中的二、三阶截断误差,使格式的精度提高至四阶,设格式(2.15)发生摄动,成为

$$\begin{aligned} \frac{2}{h^2} (\alpha_p + |A_{p_i}|h) \phi_i - \frac{1}{h^2} [\alpha_p + 2\text{Max}(0, -A_{p_i})h] \phi_{i+1} \\ + \frac{1}{h^2} [\alpha_p + 2\text{Max}(0, A_{p_i})h] \phi_{i-1} + S_{p_i}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中

$$A_p = A + \Delta A_{xx} \cdot h^2 + \Delta A_{xxx} \cdot h^3, \quad (3.5)$$

$$S_p = S + \Delta S_{xx} \cdot h^2 + \Delta S_{xxx} \cdot h^3, \quad (3.6)$$

$$\alpha_p = 1 - \frac{|A_p|h}{1 + |A_p|h}. \quad (3.7)$$

相应的等价微分方程为

$$2A_p \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + S_p + E_{xx}h^2 + E_{xxx}h^3 + O(h^4). \quad (3.8)$$

可见只要满足关系式

$$2\Delta A_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \Delta S_{xx} + E_{xx} + O(h^2), \quad (3.9)$$

$$2\Delta A_{xxx} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \Delta S_{xxx} + E_{xxx} + O(h), \quad (3.10)$$

格式即达四阶精度.

由(3.8)有

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2A \frac{\partial \phi}{\partial x} - S + O(h^2), \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 2 \left( \frac{\partial A}{\partial x} + 2A^2 \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} - 2AS - \frac{\partial S}{\partial x} + O(h^2), \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = & \left( 8A^3 + 12A \frac{\partial A}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} - 4 \left( \frac{\partial A}{\partial x} + A^2 \right) S \\ & - 2A \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + O(h^2). \end{aligned} \quad (3.13)$$

代入(3.9)和(3.10),即得各摄动量的表达式如下:

$$\Delta A_{xx} = \frac{1}{12} \left( 8A^3 + 2A \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) + O(h^2), \quad (3.14)$$

$$\Delta A_{xxx} = -\text{Sign}(A)A^4 + O(h), \quad (3.15)$$

$$\Delta S_{xx} = \frac{1}{12} \left[ \left( 8A^2 + 4 \frac{\partial A}{\partial x} \right) S - 2A \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right] + O(h^2), \quad (3.16)$$

$$\Delta S_{xxx} = -\text{Sign}(A)A^3 S + O(h). \quad (3.17)$$

(3.14)至(3.17)中各导数按二阶中心差分估取,即得各摄动量的离散形式。至此,完成了基本四阶紧凑格式的构造。该四阶格式的结构与经典一阶迎风格式相同,故亦适应于任意网格雷诺数。

#### § 4. 二维二阶紧凑迎风格式

二维对流扩散方程

$$2A \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2B \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + S \quad (4.1)$$

的经典迎风差分格式

$$\begin{aligned} & 2 \left[ \frac{1}{h_1^2} (1 + |A_{ij}|h_1) + \frac{1}{h_2^2} (1 + |B_{ij}|h_2) \right] \phi_{ij} \\ & - \frac{1}{h_1^2} [1 + 2\text{Max}(0, -A_{ij})h_1] \phi_{i+1,j} + \frac{1}{h_1^2} [1 + 2\text{Max}(0, A_{ij})h_1] \phi_{i-1,j} \\ & + \frac{1}{h_2^2} [1 + 2\text{Max}(0, -B_{ij})h_2] \phi_{i,j+1} \\ & + \frac{1}{h_2^2} [1 + 2\text{Max}(0, B_{ij})h_2] \phi_{i,j-1} + S_{ij} \end{aligned} \quad (4.2)$$

(其中  $h_1, h_2$  分别为  $x, y$  方向网格尺度,设其具有同一量级  $O(h)$ ) 等价于微分方程

$$2A \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2B \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + S + E_x h_1 + E_y h_2 + O(h^2), \quad (4.3)$$

其中

$$E_x = |A| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (4.4)$$

$$E_y = |B| \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}. \quad (4.5)$$

设格式(4.2)中对流系数  $A, B$  和源项  $S$  发生一阶摄动,  $A, B, S$  由如下形式的  $A_p, B_p, S_p$  所取代:

$$A_p = A + \Delta A_x \cdot h_1, \quad (4.6)$$

$$B_p = B + \Delta B_y \cdot h_2, \quad (4.7)$$

$$S_p = S + \Delta S_x \cdot h_1 + \Delta S_y \cdot h_2, \quad (4.8)$$

则摄动后格式的等价微分方程成为

$$2A_p \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2B_p \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + S_p + E_{px}h_1 + E_{py}h_2 + O(h^2), \quad (4.9)$$

其中

$$E_{px} = |A_p| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (4.10)$$

$$E_{py} = |B_p| \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}. \quad (4.11)$$

若如下关系式成立:

$$\text{Sign}(A_p) = \text{Sign}(A), \quad (4.12)$$

$$\text{Sign}(B_p) = \text{Sign}(B), \quad (4.13)$$

$$2\Delta A_x \cdot h_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2\Delta B_y \cdot h_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} - |A|h_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + |B|h_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \Delta S_x \cdot h_1 + \Delta S_y \cdot h_2 + O(h^2), \quad (4.14)$$

格式即达二阶精度. 为了确定  $\Delta A_x, \Delta B_y, \Delta S_x$  和  $\Delta S_y$  的具体形式, 依据方程(4.9), 有

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2A \frac{\partial \phi}{\partial x} - S_x + O(h), \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - 2B \frac{\partial \phi}{\partial y} - S_y + O(h), \quad (4.16)$$

其中

$$S_x = S + \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - 2B \frac{\partial \phi}{\partial y} \right), \quad (4.17)$$

$$S_y = S + \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right). \quad (4.18)$$

将(4.13), (4.14)代入(4.12), 得到摄动量的表达式如下:

$$\Delta A_x = \text{Sign}(A)A^2 + O(h), \quad (4.19)$$

$$\Delta B_y = \text{Sign}(B)B^2 + O(h), \quad (4.20)$$

$$\Delta S_x = |A|S_x + O(h), \quad (4.21)$$

$$\Delta S_y = |B|S_y + O(h) \quad (4.22)$$

且式(4.12), (4.13)成立.

将(4.19)至(4.22)代入源格式(4.2)的摄动形式, 得二维二阶迎风格式

$$2 \left[ \frac{1}{h_1^2} (\alpha_x + |A_{ij}|h_1) + \frac{1}{h_2^2} (\alpha_y + |B_{ij}|h_2) \right] \phi_{ij}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{h_1^2} [\alpha_x + 2\text{Max}(0, -A_{ij}h_1)] \phi_{i+1,j} + \frac{1}{h_1^2} [\alpha_x + 2\text{Max}(0, A_{ij}h_1)] \phi_{i-1,j} \\
& + \frac{1}{h_2^2} [\alpha_y + 2\text{Max}(0, -B_{ij}h_2)] \phi_{i,j+1} \\
& + \frac{1}{h_2^2} [\alpha_y + 2\text{Max}(0, B_{ij}h_2)] \phi_{i,j-1} + S_{ij}, \quad (4.23)
\end{aligned}$$

其中含有对流修正的扩散系数

$$\alpha_x = 1 - \frac{|A_{ij}|h_1}{1 + |A_{ij}|h_1 + |B_{ij}|h_2}, \quad (4.24)$$

$$\alpha_y = 1 - \frac{|B_{ij}|h_2}{1 + |A_{ij}|h_1 + |B_{ij}|h_2}. \quad (4.25)$$

一般情况下  $\alpha_x$  与  $\alpha_y$  不等, 经对流修正后扩散成为各向异性的, 且各方向扩散系数的对流修正量系对应方向对流系数的增函数: 含有对流修正的对流扩散方程

$$2A \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2B \frac{\partial \phi}{\partial y} - \alpha_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + S \quad (4.26)$$

的经典一阶迎风格式即源对流扩散方程的二阶紧凑迎风格式。

## § 5. 二维四阶紧凑迎风格式

二维二阶紧凑迎风格式(4.23)的等价微分方程为

$$\begin{aligned}
2A \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2B \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + S + E_{xy}h_1h_2 + E_{xx}h_1^2 + E_{yy}h_2^2 \\
+ E_{xx}h_1^2h_2 + E_{yy}h_1h_2^2 + E_{xxx}h_1^3 + E_{yyy}h_2^3 + O(h^4), \quad (5.1)
\end{aligned}$$

其中

$$E_{xy} = |AB| \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right), \quad (5.2)$$

$$E_{xx} = A^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{3} A \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}, \quad (5.3)$$

$$E_{yy} = B^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{3} B \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}, \quad (5.4)$$

$$E_{xxy} = -A^2|B| \left( 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right), \quad (5.5)$$

$$E_{xyy} = -B^2|A| \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right), \quad (5.6)$$

$$E_{xxx} = -|A|^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (5.7)$$

$$E_{yyy} = -|B|^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}. \quad (5.8)$$

为了消除(5.1)中的二、三阶误差, 使格式的精度提高至四阶, 设格式(4.23)发生摄动, 成为

$$\begin{aligned}
& 2 \left[ \frac{1}{h_1^2} (\alpha_{px} + |A_{pjj}|h_1) + \frac{1}{h_2^2} (\alpha_{py} + |B_{pjj}|h_2) \right] \phi_{ij} \\
& - \frac{1}{h_1^2} [\alpha_{px} + 2\text{Max}(0, -A_{pjj}h_1)] \phi_{i+1,j} + \frac{1}{h_1^2} [\alpha_{px} + 2\text{Max}(0, A_{pjj}h_1)] \phi_{i-1,j} \\
& + \frac{1}{h_2^2} [\alpha_{py} + 2\text{Max}(0, -B_{pjj}h_2)] \phi_{i,j+1} \\
& + \frac{1}{h_2^2} [\alpha_{py} + 2\text{Max}(0, B_{pjj}h_2)] \phi_{i,j-1} + S_{pif}, \quad (5.9)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
A_p = & A + \Delta A_{xy} \cdot h_1 h_2 + \Delta A_{xx} \cdot h_1^2 + \Delta A_{xy} \cdot h_1^2 h_2 \\
& + \Delta A_{xyy} \cdot h_1 h_2^2 + \Delta A_{xxx} \cdot h_1^3, \quad (5.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_p = & B + \Delta B_{xy} \cdot h_1 h_2 + \Delta B_{yy} \cdot h_2^2 + \Delta B_{xyy} \cdot h_1^2 h_2 \\
& + \Delta B_{xyy} \cdot h_1 h_2^2 + \Delta B_{yyy} \cdot h_2^3, \quad (5.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_p = & S + \Delta S_{xy} \cdot h_1 h_2 + \Delta S_{xx} \cdot h_1^2 + \Delta S_{yy} \cdot h_2^2 \\
& + \Delta S_{xyy} \cdot h_1^2 h_2 + \Delta S_{xyy} \cdot h_1 h_2^2 + \Delta S_{xxx} \cdot h_1^3 + \Delta S_{yyy} \cdot h_2^3, \quad (5.12)
\end{aligned}$$

而

$$\alpha_{px} = 1 - \frac{|A_{pjj}|h_1}{1 + |A_{pjj}|h_1 + |B_{pjj}|h_2}, \quad (5.13)$$

$$\alpha_{py} = 1 - \frac{|B_{pjj}|h_2}{1 + |A_{pjj}|h_1 + |B_{pjj}|h_2}. \quad (5.14)$$

相应的等价微分方程成为

$$\begin{aligned}
2A_p \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2B_p \frac{\partial \phi}{\partial y} = & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + S_p + E_{xy} h_1 h_2 + E_{xx} h_1^2 + E_{yy} h_2^2 \\
& + E_{xyy} h_1^2 h_2 + E_{xyy} h_1 h_2^2 + E_{xxx} h_1^3 + E_{yyy} h_2^3 + O(h^4), \quad (5.15)
\end{aligned}$$

只要满足关系式:

$$2 \left( \Delta A_{xy} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Delta B_{xy} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \Delta S_{xy} + E_{xy} + O(h^2), \quad (5.16)$$

$$2 \Delta A_{xx} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = \Delta S_{xx} + E_{xx} + O(h^2), \quad (5.17)$$

$$2 \Delta B_{yy} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} = \Delta S_{yy} + E_{yy} + O(h^2), \quad (5.18)$$

$$2 \left( \Delta A_{xyy} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Delta B_{xyy} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \Delta S_{xyy} + E_{xyy} + O(h), \quad (5.19)$$

$$2 \left( \Delta A_{xyy} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Delta B_{xyy} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \Delta S_{xyy} + E_{xyy} + O(h), \quad (5.20)$$

$$2 \Delta A_{xxx} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = \Delta S_{xxx} + E_{xxx} + O(h), \quad (5.21)$$

$$2 \Delta B_{yyy} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} = \Delta S_{yyy} + E_{yyy} + O(h). \quad (5.22)$$

由(5.15)及其微分, 可将  $\partial^2 \phi / \partial x^2$ ,  $\partial^3 \phi / \partial x^3$  和  $\partial^4 \phi / \partial x^4$  表成  $\partial \phi / \partial x$ ,  $\partial S_x / \partial x$  和

$\partial^2 S_x / \partial x^2$  的关系式, 将  $\partial^2 \phi / \partial y^2$ ,  $\partial^3 \phi / \partial y^3$  和  $\partial^4 \phi / \partial y^4$  表成  $\partial \phi / \partial y$ ,  $\partial S_y / \partial y$  和  $\partial^2 S_y / \partial y^2$  的关系式, 代入(5.16)至(5.22), 即得各摄动量的表达式如下:

$$\Delta A_{xy} = \text{Sign}(AB)A^2B + O(h^2), \quad (5.23)$$

$$\Delta B_{xy} = \text{Sign}(AB)AB^2 + O(h^2), \quad (5.24)$$

$$\Delta A_{xx} = \frac{1}{12} \left( 8A^3 + 2A \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) + O(h^2), \quad (5.25)$$

$$\Delta B_{yy} = \frac{1}{12} \left( 8B^3 + 2B \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) + O(h^2), \quad (5.26)$$

$$\Delta A_{xxy} = -2\text{Sign}(B)A^2B + O(h), \quad (5.27)$$

$$\Delta B_{xxy} = -\text{Sign}(B)A^2B^2 + O(h), \quad (5.28)$$

$$\Delta A_{xyy} = -\text{Sign}(A)B^2A^2 + O(h), \quad (5.29)$$

$$\Delta B_{xyy} = -2\text{Sign}(A)B^3A + O(h), \quad (5.30)$$

$$\Delta A_{xxx} = -\text{Sign}(A)A^3 + O(h), \quad (5.31)$$

$$\Delta B_{yyy} = -\text{Sign}(B)B^3 + O(h), \quad (5.32)$$

$$\Delta S_{xy} = \text{Sign}(AB)ABS + O(h^2), \quad (5.33)$$

$$\Delta S_{xx} = \frac{1}{12} \left[ 4 \left( 2A^2 + \frac{\partial A}{\partial x} \right) S_x - 2A \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} \right] + O(h^2), \quad (5.34)$$

$$\Delta S_{yy} = \frac{1}{12} \left[ 4 \left( 2B^2 + \frac{\partial B}{\partial y} \right) S_y - 2B \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} \right] + O(h^2), \quad (5.35)$$

$$\Delta S_{xxy} = -\text{Sign}(B)A^2B(2S_x + S_y) + O(h), \quad (5.36)$$

$$\Delta S_{xyy} = -\text{Sign}(A)AB^2(S_x + 2S_y) + O(h), \quad (5.37)$$

$$\Delta S_{xxx} = -\text{Sign}(A)A^3S_x + O(h), \quad (5.38)$$

$$\Delta S_{yyy} = -\text{Sign}(B)B^3S_y + O(h). \quad (5.39)$$

(5.23) 至 (5.39) 中的  $A$ ,  $\partial A / \partial x$ ,  $\partial^2 A / \partial x^2$ ;  $B$ ,  $\partial B / \partial y$ ,  $\partial^2 B / \partial y^2$ ;  $S_x$ ,  $\partial S_x / \partial x$ ,  $\partial^2 S_x / \partial x^2$  和  $S_y$ ,  $\partial S_y / \partial y$ ,  $\partial^2 S_y / \partial y^2$  诸量均按二阶精度估取, 即得所有摄动量的离散表达式。其中源项的摄动量涉及图 1 所示的九个网格点。由于源项摄动系数高阶量, 计算中可以方便地当作迭代滞后量处理。图 1 中将只在源项摄动中涉及到的点 5, 6, 7, 8 以虚线相联, 以示与格式的基本网格点 0, 1, 2, 3, 4 有所区别。至此, 完成了二维四阶紧凑格式的构造。

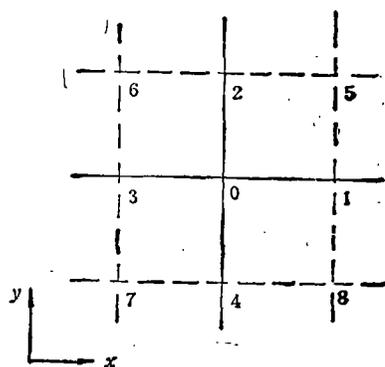


图 1 四阶紧凑格式的九点式网格

## § 6. 应 用

本文作一、二、三维流动模型方程及自然对流传热问题的数值求解, 例示本文格式的良好性态, 模型方程并以参考格式(是中心差分格式或迎风差分格式, 取决于对流系数的

大小) 求解, 所得结果与精确解或数值“标准解”作对比, 迭代收敛准则为  $\max |\phi_i^{(k+1)} - \phi_i^{(k)}| \leq \varepsilon$ , 其中  $k$  为迭代步数,  $\varepsilon$  在求解二维模型方程的双精制算法中取  $10^{-10}$ , 而在其他情况下均为  $10^{-5}$ .

例 1. 作为函数值可发生急剧变化的最简单算例, 我们采取 Burgers 方程

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6.1)$$

的准确解为

$$u = \tanh[\text{Re}(1-x)/4] \quad (6.2)$$

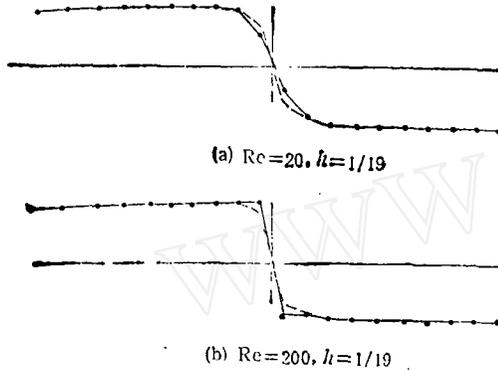


图 2 两种  $\text{Re}$  数下 Burgers 方程解算结果, 其中实线为准确解, 虚线为参考格式 ( $\text{Re} = 20$  时取中心差分格式,  $\text{Re} = 200$  时取迎风差分格式), 而实点表示本文的二阶格式解。

的情形。当  $\text{Re}uh < 2$  时, 参考格式取中心差分格式, 否则取迎风差分格式。计算域 ( $0 \leq x \leq 1$ ) 以长度为  $h$  的网格均分。图 2 和表 1 给出若干解值分布, 其中  $u_a$  为准确解,  $u_b$  为本文四阶格式解, 而  $u_c, u_d$  分别为本文二阶格式和经典中心差分格式的计算结果。比较表明, 四阶格式能够给出比二阶格式大为准确的结果, 而后者又比经典中心差分格式的结果明显准确, 且在大的网格雷诺数下具有比迎风格式更好的分辨率, 较准确地反映函数值的突然变化。

例 2. [7] 和 [1] 中考察过的二维流动模型方程可简化为

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (2 \sin y + \sin x) \cos x, \quad (6.3)$$

其中

$$v = \sin x \cos y, \quad (6.4)$$

准确解为

$$u = -\cos x \sin y. \quad (6.5)$$

计算域取为  $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ , 边界上  $u$  值由式 (6.5) 求取。为检验格式的四阶精度, 计算网格取 (1)  $h = \pi/10$  和 (2)  $h = \pi/20$  两种, 算法采取双精制。表 2 给出  $y/\pi$  从 0 到 0.5 的分布  $u(0.7, y/\pi)$ , 其中  $u_a$  为准确解,  $u_b$  为  $h = \pi/20$  时本文四阶格式计算值;  $u_c, u_d$  和  $u_e$  分别为  $h = \pi/10$  时本文四阶格式、二阶格式和经典中心差分格式的计算值; 而  $E$  为给定网格点上粗网格计算结果与准确解之间的误差比上细网格计算误差。按照理论推测, 计算达到四阶精度时网格减小一倍, 误差减小 16 倍。本算例  $E$  接近 16, 说明在本文所采取的较粗网格下, 格式已基本发挥四阶精度。

例 3. 考察方腔  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  中发生的自然对流传热问题。[8] 给出了该题计算的“标准解”, 控制方程的无量纲形式为

$$\nabla^2 \phi = -\zeta, \quad (6.6a)$$

$$\nabla^2 \zeta = \text{Pr}^{-1} \left( u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \text{Ra} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (6.6b)$$

表 1 Eurgers 方程(6.1)的解算结果 ( $Re = 5, h = 1/10$ )

$x$	$u_a$	$u_b$	$u_c$	$u_d$
.1	.76159	.76153	.7615	.7525
.2	.63515	.63508	.6353	.6206
.3	.46212	.46206	.4626	.4479
.4	.24492	.24489	.2455	.2364
.5	.00000	.00000	.0000	.0000
.6	-.24492	-.24489	-.2455	-.2364
.7	-.46212	-.46206	-.4626	-.4479
.8	-.63515	-.63508	-.6353	-.6206
.9	-.76159	-.76153	-.7615	-.7525

表 2 二维流动模型方程(6.3)的计算结果

$x/\pi$	$y/\pi$	$u_a$	$u_b$	$u_c$	$u_d$	$u_e$	$E$
0.7	0.1	.18163563	.18163480	.18162271	.1824	.1779	15.6
0.7	0.2	.34549150	.34548964	.34546315	.3467	.3377	15.2
0.7	0.3	.47552827	.47552570	.47549064	.4770	.4646	14.6
0.7	0.4	.55901700	.55901423	.55897791	.5608	.5465	14.1
0.7	0.5	.58778524	.58778249	.58774698	.5898	.5752	14.0

$$\nabla^2 T = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (6.6c)$$

其中  $u = \partial\phi/\partial y$ ,  $v = -\partial\phi/\partial x$  为  $x, y$  方向速度分量,  $R_s$  为 Rayleigh 数,  $P_r$  为 Prandtl 数。以  $c$  表单位方腔周界,  $n$  为通过  $c$  向外的法线, 可给定方程(8.10)的边界条件为

$$\phi = \partial\phi/\partial n = 0 \quad \text{在 } c \text{ 上}, \quad (6.7a)$$

$$T = 1, x = 0; T = 0, x = 1, \quad (6.7b)$$

$$\partial T/\partial y = 0, y = 0, 1. \quad (6.7c)$$

方程(6.6)均属对流扩散型, 可依本文四阶紧凑迎风差分格式直接离散。方程(6.6b)中涉及  $\frac{\partial T}{\partial x}$  的项代表温度场对动量迁移的驱动作用, 需有四阶精度, 可用下式求取:

$$(\partial T/\partial x)_{ij} = \frac{1}{12h_1} (-T_{i+2,j} + 8T_{i+1,j} - 8T_{i-1,j} + T_{i-2,j}) + O(h^4). \quad (6.8)$$

源项摄动中还涉及  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^3}$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}$  和  $\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y^2}$ , 均需有二阶精度。除  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  可循三点中心差分, 其余各导数可采用如下近似:

$$(\partial^3 T/\partial x^3)_{ij} = \frac{1}{2h_1^3} (T_{i+2,j} - 2T_{i+1,j} + 2T_{i-1,j} - 2T_{i-2,j}) + O(h^2), \quad (6.9)$$

$$(\partial^2 T/\partial x\partial y)_{ij} = \frac{1}{4h_1 h_2} (T_{i+1,j+1} - T_{i-1,j+1} + T_{i-1,j-1} - T_{i+1,j-1}) + O(h^2), \quad (6.10)$$

$$(\partial^3 T/\partial x\partial y^2)_{ij} = \frac{1}{2h_1 h_2^2} [-2(T_{i+1,j} - T_{i-1,j}) + T_{i+1,j+1} - T_{i-1,j+1} - T_{i-1,j-1} + T_{i+1,j-1}] + O(h^2). \quad (6.11)$$

由于式(6.8)和(6.9),计算中将涉及边界外一点的 $T$ 值,可由方腔内的温度值按五阶外插式估取.而边界处的涡值,有如下四阶公式<sup>[4]</sup>:

$$\zeta_B = \frac{15}{23h_i^2} (8\phi_{I_1} - \phi_{I_2}) - \frac{1}{23} (16\zeta_{I_1} - 11\zeta_{I_2} + 2\zeta_{I_3}) + O(h^4). \quad (6.1)$$

当 $B$ 平行于 $x$ 轴时, $h_i$ 为 $h_2$ ;当 $B$ 平行于 $y$ 轴时, $h_i$ 为 $h_1$ ;  $I_1, I_2$ 和 $I_3$ 表示通过 $B$ 的法线上紧邻边界的三个内点.

按本文四阶格式计算,取 $h = 1/10, 1/20, 1/30$ 三种网格尺度,就 $P_r = 0.71, R_s = 10^3, 10^4$ 和 $10^5$ 三种情况进行.计算中涡场每迭代一步,流函数和温度场迭代 $n$ 步.当 $R_s$ 数较低时, $n$ 为1;而当 $R_s$ 高达 $10^5$ 时, $n$ 增至15且取0.45的松弛系数以促进迭代收敛.表3至5列出若干典型计算结果并附以 de Vahl Davis 的“标准解”以资比较,其中包括(1)方腔中点上的流函数值,(2)铅直中分线上最大 $u$ 值,(3)水平中分线上最大 $v$ 值,(4)边界 $x = 0$ 上平均 Nusselt 数,(5)边界 $x = 0$ 上最大与最小 Nusselt 数及其位置.其中最大值及其位置的求取是按四阶内插多项式进行的,而局部 Nusselt 数得之于四阶差商式.“标准解”<sup>[6]</sup>是按网格逐级加密法二阶外推所得,据称是相当准确的.

表6列出本文结果与“标准解”之间的百分差,以说明本文四阶格式的优越性.据估计<sup>[6]</sup>，“标准解”各典型参数的误差百分率在 $R_s = 10^3, 10^4, 10^5$ 三种情况下分别不超过0.1,0.2和0.3.

表3 方腔自然对流典型参数计算结果 ( $P_r = 0.71, R_s = 10^4$ )

$h$	$ \psi_{mid} $	$u_{max}$ $y(x=0.5)$	$v_{max}$ $x(y=0.5)$	$Nu_0$	$Numax$ $y(x=0)$	$Numin$ $y(x=0)$
1/10	1.1789	3.6634 0.8120	3.7210 0.1805	1.1159	1.5101 0.0702	0.6931 1
1/20	1.1759	3.6517 0.8127	3.6999 0.1792	1.1165	1.5082 0.0829	0.6924 1
1/30	1.1747	3.6511 0.8131	3.6981 0.1781	1.1173	1.5057 0.0880	0.6922 1
BMS	1.174	3.649 0.813	3.697 0.178	1.117	1.505 0.092	0.692 1

注 BMS 表“标准解”

表4 方腔自然对流典型参数计算结果 ( $P_r = 0.71, R_s = 10^4$ )

$h$	$ \psi_{mid} $	$u_{max}$ $y(x=0.5)$	$v_{max}$ $x(y=0.5)$	$Nu_0$	$Numax$ $y(x=0)$	$Numin$ $y(x=0)$
1/10	5.0941	16.2615 0.8220	19.4201 0.1301	2.3021	3.6912 0.1723	0.5945 1
1/20	5.0732	16.1860 0.8219	19.5529 0.1187	2.2316	3.5340 0.1559	0.5894 1
1/30	5.0720	16.1828 0.8240	19.6301 0.1193	2.2364	3.5170 0.1421	0.5857 1
BMS	5.071	16.178 0.823	19.617 0.119	2.238	3.528 0.143	0.586 1

表6显示各 $R_s$ 数下四阶格式在 $h = 1/30$ 网格上的计算结果与“标准解”的偏差已小于此误差限度.注意到 $R_s = 10^5$ 时“标准解”是在 $h = 1/40$ 和 $1/80$ 的计算结果基

表 5 方腔自然对流典型参数计算结果 ( $P_r = 0.71, R_a = 10^5$ )

$h$	$ \psi_{mid} $	$u_{max}$ $y(x=0.5)$	$v_{max}$ $x(y=0.5)$	$N_{\#0}$	$Numax$ $y(x=0)$	$Numin$ $y(x=0)$
1/10	9.4001	39.017 0.8619	56.263 0.0811	4.7603	8.7981 0.1346	0.7429 1
1/20	9.2230	36.198 0.8563	63.570 0.0682	4.6981	8.3212 0.1011	0.7301 1
1/30	9.1201	34.821 0.8543	68.743 0.0674	4.5198	7.9510 0.0812	0.7280 1
BMS	9.111	34.73 0.855	68.59 0.066	4.509	7.717 0.081	0.729 1

表 6 方腔自然对流问题典型参数计算值与“标准解”之间的偏差百分率

$R_a$	$h$	$ \psi_{mid} $	$u_{max}$	$v_{max}$	$N_{\#0}$
1000	1/10	0.42	0.39	0.65	0.10
	1/20	0.16	0.07	0.08	0.04
	1/30	0.06	0.06	0.03	0.03
10000	1/10	0.46	0.52	1.00	2.86
	1/20	0.04	0.05	0.32	0.29
	1/30	0.02	0.03	0.07	0.07
100000	1/10	3.17	12.34	17.97	5.57
	1/20	1.23	4.23	7.32	4.19
	1/30	0.10	0.26	0.22	0.24

基础上再外推而得,故本文四阶格式可用粗得多的网格获取同等精度的结果,大大节省计算量。

## 参 考 文 献

- [1] S. C. R. Dennis, J. D. Hudson, *J. Comp. Phys.*, 85(1989), 390.
- [2] —, *J. Inst. Math. Applics.*, 23(1979), 43.
- [3] —, —, 26(1980), 369.
- [4] S. C. R. Dennis, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 13(1960), 487.
- [5] L. Fox, *Proc. R. Soc. A*, 190(1947), 31.
- [6] S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, 1980.
- [7] D. F. Roscoe, *J. Inst. Math. Applics.*, 16(1975), 291.
- [8] G de V. Davis, *Int. J. Num. Methods Fluids*, 3(1983), 249.