第13卷 第4期
1992年12月

固体力学学报
ACTA MECHANICA SOLIDA SINICA

Vol.13 №.4
December 1992

变形梯度张量极分解中转动张量的直接表示及其应用*

王文标
(北京，中国科学技术大学研究生院，100039)

段祝平
(北京，中国科学院力学研究所，100080)

提要 本文通过变分途径建立了变形梯度张量的极分解和加法分解之间的联系．采用工程界通常采用的变形梯度张量的加法分解形式，得到了三维空间中极分解的转动张量和伸长张量的直接表示，即实现了转动和变形的分离．由这些直接表示，可以得到各种有用的近似表示．

关键词 变形梯度张量，极分解，转动张量，变分表示

1 引言

在连续介质力学中，变形梯度张量 **F** 的分解通常有两种方式，即加法分解和极分解．加法分解为

$$\mathbf{F}=\mathbf{I}+\mathbf{S}+\mathbf{W}$$

式中 **I** 为单位张量，**S** 为对称张量，**W** 为反对称张量．若引用位移矢量 **u**，则有

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\mathbf{u}+(\mathrm{grad}\mathbf{u})^T),$$

$$\mathbf{W}=\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\mathbf{u}-(\mathrm{grad}\mathbf{u})^T).$$

极分解也称为乘法分解，即

$$\mathbf{F}=\mathbf{RU}=\mathbf{VR}$$

这里 **U** 和 **V** 为对称正定张量，**R** 为转动张量($\det\mathbf{F}=\mathrm{III}_F>0$)．对于无穷小变形，**S** 即是无穷小应变，**W** 称为无穷小转动．**F** 的两种分解之间，以加法分解来表示极分解中的转动和变形是一个困难的问题，迄今没有得到解决．Biot[1965]成功地解决了平面变形条件下转动和变形的分离。对于空间变形，Martins 等[1987]考察了变形梯度张量两种分解方式的联系，但仅考虑了加法分解中 **S** 和 **W** 有一个为 **O** 或乘法分解中 **R** 和 **U** 有一个消失的情形．Tommasi 和 Marzano [1988]研究了加法分解在变形局部分析中的作用，得到了一些有用的结果．通常由 **F** 的加法分解求转动张量 **R** 都采用间接方式，如 Hoger 和 Carlson[1984a]，Ting[1985]和 Sawyers[1986]．由这种方式很难得到关于 **R** 的转轴和转角的显式表示．

* 本文于1991年3月26日收到．

Martins 和 Podio–Guidugli[1979]提出了证明极分解定理的变分途径，他们发现

$$\min_{\mathbf{Q}\in\mathrm{Orth}}|\mathbf{F}-\mathbf{Q}|=|\mathbf{F}-\mathbf{R}|, \tag{1}$$

这里 Orth 表示正交群. Gurtin[1981]提出可以利用(1)式得到计算 $\mathbf{R}$ 的一条新路. 沿着这条新路，郑泉水[1989]得到了关于 $\mathbf{R}$ 的转轴和转角的方程. 由于方程比较复杂，仅作了些定性的分析.

本文根据(1)式，得到了关于 $\mathbf{R}$ 的转轴和转角的方程并进而得到了方程的显式解. 之后通过间接方式得到了 $\mathbf{U}$ 的表示式. 根据上述准确结果可以得到 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{U}$ 的各种近似表示，这些近似公式在板壳理论中，对于中小变形都是很有用的.

2 确定转动张量 R 的新途径

按照定义，我们有

$$|\mathbf{F}-\mathbf{Q}|=\{\mathrm{tr}[(\mathbf{F}-\mathbf{Q})(\mathbf{F}-\mathbf{Q})^T]\}^{1/2}.$$

这里上标“T”表示张量的转置，“tr”表示求迹运算. 式(1)等价于

$$\max_{\mathbf{Q}\in\mathrm{Orth}}\mathrm{tr}(\mathbf{Q}\mathbf{F}^T)=\mathrm{tr}(\mathbf{R}\mathbf{F}^T) \tag{2}$$

假定给 $\mathbf{Q}$ 一个无穷小增量 $\delta\mathbf{Q}$，则上式成立的必要条件是

$$\mathrm{tr}\,(\delta\mathbf{Q}\mathbf{F}^T)|_{\mathbf{Q}=\mathbf{R}}=0 \tag{3}$$

由于 $\mathbf{Q}$ 是正交张量，$\delta\mathbf{Q}$ 应满足下面的限制条件

$$(\delta\mathbf{Q})\mathbf{Q}^T+\mathbf{Q}\delta\mathbf{Q}^T=\mathbf{O}. \tag{4}$$

利用转轴和转角，转动张量可表示为

$$\mathbf{R}=\mathbf{I}+\sin\alpha\mathbf{P}+(1-\cos\alpha)\mathbf{P}^2 \tag{5}$$

这里 α 为 $\mathbf{R}$ 的转角，$\alpha\in[0,\pi]$，α 可由 $\mathbf{R}$ 唯一确定，

$$\alpha=\cos^{-1}\left[\frac{1}{2}(\mathrm{tr}\mathbf{R}-1)\right],\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\pi.$$

$\mathbf{P}$ 为反对称张量，

$$\mathbf{P}^T=-\mathbf{P}\qquad \text{且}\qquad -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathbf{P}^2=1 \tag{6}$$

$\mathbf{P}$ 的轴向量 $\mathbf{p}$ 即是 $\mathbf{R}$ 的转轴，

$$\mathbf{p}=-\frac{1}{2}\mathbf{E}:\mathbf{P}$$

这里 $\mathbf{E}$ 为置换张量. 若 $\alpha\neq0$，$\mathbf{P}$ 可由 $\mathbf{R}$ 唯一确定，若 $\alpha=0$，恒有 $\mathbf{R}=1$，任意方向均可视为 $\mathbf{R}$ 的转轴，所以此时 $\mathbf{P}$ 不唯一.

在 $\mathbf{Q}=\mathbf{R}$ 给定无穷小增量 $\delta\mathbf{Q}$，有

$$\delta\mathbf{Q}=\delta\alpha(\cos\alpha\mathbf{P}+\sin\alpha\mathbf{P}^2)+\sin\alpha\delta\mathbf{P}+(1-\cos\alpha)(\mathbf{P}\delta\mathbf{P}+\delta\mathbf{P}\mathbf{P}) \tag{7}$$

这里 $\delta\alpha$ 是任意无穷小增量，$\delta\mathbf{P}$ 为反对称张量，且满足下面的约束条件

$$\mathrm{tr}(\mathbf{P}\delta\mathbf{P})=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\delta\mathbf{P})^2 \tag{8}$$

这是由(6)式来的，当仅计及一阶变分时，(8)式右端取为 0，即可以认为 $\delta\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{P}$ 正交.

为计算方便，对 $\mathbf{F}$ 作如下加法分解

$$\mathbf{F}=\frac{1}{3}\mathrm{I}_F\mathbf{I}+\mathbf{S}'+\kappa\mathbf{A} \tag{9}$$

这里

$$\mathrm{I}_F=\mathrm{tr}\mathbf{F},\quad \kappa=\left[-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\mathbf{F}-\mathbf{F}^T}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathbf{S}'^T=\mathbf{S}',\quad \mathrm{tr}\mathbf{S}'=0,$$

$$\mathbf{A}^T=-\mathbf{A},\qquad -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathbf{A}^2=1.$$

把(9)式代入(7)和(3)，可以得到下列方程

$$\sin\alpha\,\mathrm{tr}(\mathbf{S}'\mathbf{P}^2)-\kappa\cos\alpha\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{P})=\frac{2}{3}\mathrm{I}_F\sin\alpha \tag{10a}$$

$$(1-\cos\alpha)(g'\mathbf{P}+\mathbf{S}'\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{S}')=\kappa\sin\alpha\mathbf{A} \tag{10b}$$

g'是一个新参数，这是在变分过程中由于 $\delta\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{P}$ 相垂直而引进的．需要指出的是引进 g' 和(8)式，式(2)的二阶变分必须增加一项

$$\frac{1}{2}\left(g'-\frac{2}{3}\mathrm{I}_F\right)(1-\cos\alpha)\mathrm{tr}(\delta\mathbf{P})^2.$$

若 $\alpha=0$ 理解为 $\alpha\to0$ 的极限过程，则由方程(10)可以得到

$$\mathrm{tr}(\mathbf{S}'\mathbf{P}^2)-\kappa\cot\alpha\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{P})=\frac{2}{3}\mathrm{I}_F, \tag{10a$'$}$$

$$g'\mathbf{P}+\mathbf{S}'\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{S}'=\kappa\cot\frac{\alpha}{2}\mathbf{A}. \tag{10b$'$}$$

方程(6)和(10)或(10)′是决定 α 和 $\mathbf{P}$ 的必要条件，王文标等[1989]曾首次简要报告了这些方程．必须结合(2)式的二阶变分才能把 α 和 $\mathbf{P}$ 唯一确定下来．

方程(10b)′两端乘以 $\mathbf{P}$ 然后对新方程求迹，可以得到

$$-g'+\mathrm{tr}(\mathbf{S}'\mathbf{P}^2)=\frac{1}{2}\kappa\cot\frac{\alpha}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{P}), \tag{11}$$

结合(10a)′，可得

$$\kappa\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{P})=-2\left(g'-\frac{2}{3}\mathrm{I}_F\right)\cot\frac{\alpha}{2}, \tag{12a}$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{S}'\mathbf{P}^2)=g'-\left(g'-\frac{2}{3}\mathrm{I}_F\right)\cot\frac{\alpha}{2}. \tag{12b}$$

上述表达式在 $\kappa=0$ 和 $\alpha=0$ 时仍然成立，只要我们此时取 $g'=\frac{2}{3}\mathrm{I}_F$．

方程(10b)′是 $\mathbf{P}$ 的线性张量方程．

Sidoroff[1978]和 Hoger[1984b]曾解过类似方程．按照他们的方法，可以构造 $\mathbf{P}$ 的如下生成子

$$\mathbf{A},\ \mathbf{S}'\mathbf{A}+\mathbf{A}\mathbf{S}',\ \mathbf{S}'^2\mathbf{A}+\mathbf{A}\mathbf{S}'^2.$$

这组生成子完备且相互独立．$\mathbf{P}$ 是上述生成子的线性组合，从而我们得到 $\mathbf{P}$ 的如下表示．

$$\mathbf{P}=\frac{\kappa}{\Delta}\cot\frac{\alpha}{2}[g'^2\mathbf{A}-g'(\mathbf{S}'\mathbf{A}+\mathbf{A}\mathbf{S}')+\mathbf{S}'\mathbf{A}\mathbf{S}'] \tag{13}$$

这里

$$\Delta = g'^3 + \mathrm{II}'g - \mathrm{III}',$$

式中II'和III'分别是$\mathbf{S}'$的第2和第3不变量. 若使用恒等式

$$\mathbf{S}'\mathbf{A}\mathbf{S}' = -\mathrm{II}'\mathbf{A} - (\mathbf{S}'^2\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{S}'^2)$$

(见 Rivlin[1955]), 我们可以得到

$$\mathbf{P} = \frac{\kappa}{\Delta}\cot\frac{\alpha}{2}[(g'^2 - \mathrm{II}')\mathbf{A} - g'(\mathbf{S}'\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{S}') - (\mathbf{S}'^2\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{S}'^2)] \qquad (13)'$$

由(6)和(13)式, 可以确定α,

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{\kappa}{\Delta}\right)^2[g'^4 + 2M_1 g'^3 + (3M_2 - 4\mathrm{II}')g'^2 + 2\mathrm{III}'g' + \mathrm{II}'M_2 + \mathrm{III}'M_1 - \mathrm{II}'^2], \qquad (14)$$

这里

$$M_n = \mathrm{tr}(\mathbf{S}'_n\mathbf{A}^2), \quad n = 1,2.$$

剩下的关键问题是确定g', 把(13)代入(12a), 可以得到关于g'的四次代数方程

$$(g' - \frac{2}{3}\mathrm{I}_F)(g'^3 + \mathrm{II}'g' - \mathrm{III}') - \kappa^2(g'^2 + M_1 g' + M_2 - \mathrm{II}') = 0 \qquad (15)$$

如果引用$g = g' - \frac{2}{3}\mathrm{I}_F$, 记$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$的第1和第2不变量为$\mathrm{I}_c$和$\mathrm{II}_c$, 由上式可得

$$g^4 + 2\mathrm{I}_F g^3 + (\frac{3}{2}\mathrm{I}_F^2 - \frac{1}{2}\mathrm{I}_c)g^2 + (\frac{1}{2}\mathrm{I}_F^3 - \frac{1}{2}\mathrm{I}_F\mathrm{I}_c - \mathrm{III}_F)g$$
$$+ \frac{1}{16}(\mathrm{I}_F^2 - \mathrm{I}_C)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{I}_F\mathrm{III}_F - \frac{1}{4}\mathrm{II}_C = 0. \qquad (16)$$

这一方程可以方便地用于有限变形, 而方程(15)用于近似计算则比较方便.

方程(15)有四个根, 只有一个使$\mathbf{R}^T\mathbf{F}$为正定对称. 为确定恰当的g', 要使用(2)式的二阶变分. (2)式的变分, 经过使用(10b)′和(12)式整理, 得到

$$-\frac{1}{2}(g' - \frac{2}{3}\mathrm{I}_F)\sin^2(\alpha/2)(\delta\alpha)^2 + \kappa\delta\alpha\mathrm{tr}(\mathbf{A}\delta\mathbf{P}) + \sin^2\frac{\alpha}{2}[2\mathrm{tr}(\mathbf{S}'(\delta\mathbf{P})^2) + g'\mathrm{tr}(\delta\mathbf{P})^2] \leqslant 0. \qquad (17)$$

上式中等号仅在$\alpha = 0$时成立, 因为这时$\mathbf{P}$不唯一. 为了分析(17)式, 首先我们令$\delta\alpha \neq 0$, 但$\delta\mathbf{P} = 0$, 显然, 我们必须有

$$g' \geqslant \frac{2}{3}\mathrm{I}_F$$

其次, 我们令$\delta\alpha = 0$, 但$\delta\mathbf{P} \neq 0$, 根据$\mathbf{S}'$本征值的极值性质(见 Courant and Hilbert[1953]), 我们有

$$g' \geqslant \max(-\mathrm{S}'_i, \quad i = 1,2,3)$$

式中S'_i为$\mathbf{S}'$的本征值. 最后我们得到

$$g' \geqslant \max(\frac{2}{3}\mathrm{I}_F; \quad -\mathrm{S}'_i, \quad i = 1,2,3). \qquad (18)$$

(17)式中的混合变分项不能给出有用的信息. 因此(18)式仍然是必要条件. 当然对一般变形, (18)能给出唯一的g'. 必要时, 要检验不同g'所对应的$\mathbf{R}^T\mathbf{F}$的正定性.

由α和$\mathbf{P}$, 可以得到转动张量$\mathbf{R}$的如下表达式

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} = {} & \mathbf{I} + \frac{\kappa}{\Delta}(1+\cos\alpha)[g'^2\mathbf{A} - g'(\mathbf{S}'\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{S}') + \mathbf{S}'\mathbf{A}\mathbf{S}' + \kappa(g'\mathbf{A}^2 + \mathbf{S}'\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^2\mathbf{S}') \\
& + \frac{\kappa}{\Delta}(a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{S}' + a_2\mathbf{S}'^2)]
\end{aligned} \tag{19}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
a_0 &= -2g'[M_1 g'^2 + (M_2 - 2\mathrm{II}')g' + \mathrm{III}'], \\
a_1 &= 2g'^3 + M_1 g'^2 + M_2 g' - \mathrm{III}', \\
a_2 &= g'^2 + M_1 g' + M_2 - \mathrm{II}'.
\end{aligned}
$$

然后由 $\mathbf{R}^T\mathbf{F}$，可以得到 $\mathbf{U}$ 的如下表达式

$$
\mathbf{U} = \frac{1}{3}\mathrm{I}_F\mathbf{I} + \mathbf{S}' + \frac{1}{2}\sin\alpha[\mathbf{S}'\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{S}' - \kappa(\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})] + (1-\cos\alpha)[\frac{1}{3}\mathrm{I}_F\mathbf{P}^2 - \frac{\kappa}{2}(\mathbf{A}\mathbf{P}^2 - \mathbf{P}^2\mathbf{A})]
$$

或者，使用(13)，得到不含 $\mathbf{P}$ 的表达式

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U} = {} & \frac{1}{3}\mathrm{I}_F\mathbf{I} + \mathbf{S}' + (1+\cos\alpha)\frac{\kappa}{\Delta}\{\kappa[M_1 g' + 2(M_2 - 2\mathrm{II}') + \frac{1}{\Delta}(\frac{1}{3}\mathrm{I}_F a_0 + \mathrm{III}' a_2)]\mathbf{I} \\
& + \kappa[-g' + M_1 + \frac{1}{\Delta}(a_0 + \frac{1}{3}\mathrm{I}_F a_1 - \mathrm{II}' a_2)]\mathbf{S}' + \kappa[-3 + \frac{1}{\Delta}(a_1 + \frac{1}{3}\mathrm{I}_F a_2)]\mathbf{S}'^2 \\
& + \kappa[-g'^2 + \frac{1}{3}\mathrm{I}_F g' - 2\mathrm{II}']\mathbf{A}^2 + \frac{1}{2}[g'^2 - \kappa^2 + \frac{\kappa^2}{\Delta}a_1](\mathbf{S}'\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{S}') + \frac{1}{2}[-g' \\
& + \frac{\kappa^2}{\Delta}a_2](\mathbf{S}'^2\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{S}'^2) + \frac{1}{3}\kappa\mathrm{I}_F(\mathbf{S}'\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^2\mathbf{S}') - \kappa(\mathbf{S}'^2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^2\mathbf{S}'^2) \\
& + \frac{1}{2}\kappa^2(\mathbf{A}^2\mathbf{S}'\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{S}'\mathbf{A}^2) + \frac{1}{2}(\mathbf{S}'^2\mathbf{A}\mathbf{S}' - \mathbf{S}'\mathbf{A}\mathbf{S}'^2)\}.
\end{aligned} \tag{20}
$$

至此，我们完成了关于 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{U}$ 的计算，即实现了三维空间中变形和转动的分离.

3　一些简例

为了检验上面所得到结果的正确性，我们考虑简单剪切

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{i} \otimes \mathbf{j}, \quad \gamma > 0.$$

这里 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 是直角笛卡儿坐标系的单位基底. 由此立即得到

$$\mathrm{I}_F = 3, \qquad \kappa = \gamma$$

$$\mathbf{S}' = \gamma(\mathbf{i}\otimes\mathbf{j} + \mathbf{j}\otimes\mathbf{i}), \qquad \mathbf{A} = \mathbf{i}\otimes\mathbf{j} - \mathbf{j}\otimes\mathbf{i}.$$

通过简单代数运算，使用(16)、(18)、(19)和(20)式，可以得到

$$g' = 1 + \sqrt{1+\gamma^2}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\gamma}(\sqrt{1+\gamma^2} - 1)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}(\mathbf{i}\otimes\mathbf{j} - \mathbf{j}\otimes\mathbf{i}) - (1 - \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}})(\mathbf{i}\otimes\mathbf{i} + \mathbf{j}\otimes\mathbf{j})$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}[\mathbf{i}\otimes\mathbf{i} + \gamma(\mathbf{i}\otimes\mathbf{j} + \mathbf{j}\otimes\mathbf{i}) + (1+2\gamma^2)\mathbf{j}\otimes\mathbf{j}] + \mathbf{k}\otimes\mathbf{k}$$

这是众所周知的结果，不难直接验证.

另一个例子是 $|\mathbf{S}'| = \mathrm{O}(\kappa) \ll 1$，保留 $\mathbf{U}$ 表达式的二阶项，有

$$\mathbf{U}=\frac{1}{3}\mathrm{I}_F\mathbf{I}+\mathbf{S}'+\frac{\kappa}{2}(\mathbf{S}'\mathbf{A}-\mathbf{A}\mathbf{S}'-\kappa\mathbf{A}^2)+\mathbf{O}(\kappa^3)$$

这是 Biot[1965]所得到的近似结果.

4 近似计算中的应用

由于 **R** 和 **U** 的准确表达式相当冗长，给直接应用带来不便. 但是我们可以以此为出发点，得到各种有用的近似关系.

首先我们考虑 $\kappa \ll 1$, 即 F 有一个非常小的反对称部分. 由(15)式可以得到 g'的近似式

$$g'=g'_0+\kappa^2\frac{g'_0+M_1g'_0+M_2-\mathrm{II}'}{g'^3_0+\mathrm{II}'g'_0-\mathrm{III}'+(g'_0-\frac{2}{3}\mathrm{I}_F)(3g'^2_0+\mathrm{II}')}+\mathbf{O}(\kappa^4)$$

这里g'_0是 $\kappa=0$ 时(16)的最大正根，即

$$g'_0=\max(\frac{2}{3}\mathrm{I}_F,\ \mathbf{S}'_i,\quad i=1,2,3)$$

以下分两种情形讨论；一是$\mathbf{F}_0$ 正定，这里 $\mathbf{F}_0=\mathbf{F}|_{\kappa=0}$，我们有$g'_0=2\mathrm{I}_F/3$，然后由(14)式得到 $\alpha=\mathbf{O}(\kappa)$，即此时转角很小. 另一种情形是$\mathbf{F}_0$非正定，但仍有$\det\mathbf{F}_0>0$，这时我们有$g'_0=\mathbf{S}'_1$、 $(\mathbf{S}'_1\geqslant\mathbf{S}'_2\geqslant\mathbf{S}'_3)$，由(14)可知 $\alpha=\pi+\mathbf{O}(\kappa)$. 这相当于绕某轴转动 π 后再迭加一个小转动. 由上面的分析可以看出，当 F 的反对称部分很小时，对应的转动不一定小，有时会很大.

接下来我们考虑中等转动迭加小变形，此时有$1\gg\kappa^2\sim\mathbf{O}(|\mathbf{S}|)$且 $\mathrm{I}_F=3+\mathbf{O}(\kappa^2)$. 保留 $\mathbf{O}(\kappa^2)$项，由(20)和(19)不难得到

$$\mathbf{R}=1+\kappa\mathbf{A}+(1-\sqrt{1-\kappa^2})\mathbf{A}^2+\mathbf{O}(\kappa^3),$$

$$\mathbf{U}=\frac{1}{3}\mathrm{I}_F\mathbf{I}+\mathbf{S}'-(1-\sqrt{1-\kappa^2})\mathbf{A}^2+\mathbf{O}(\kappa^3).$$

若定义$\mathbf{U}-\mathbf{I}=\mathbf{S}_B$，为 Biot 应变，则不难看出，在上述近似条件下，可以得到

$$\mathbf{R}+\mathbf{S}_B=\mathbf{F}+\mathbf{O}(\kappa^3).$$

5 结论

我们通过变分途径，得到极分解中转动张量的转轴和转角的直接表示，因而 **R** 可以不经过 **U** 直接计算. 这一工作可以看作 Biot 在平面变形条件下分离变形和转动在空间变形条件下的直接延伸. 所得的结果可以用于准确计算或估计转动的大小，对变形进行按转动分类，用于检验现存的应变的近似表示并发现在不同变形条件下的新的表示.

作者感谢国家自然科学基金(No. 9187004)和中科院力学所 LNM 实验室对这一研究的部分支持.

参考文献

1 Biot M A. Mechanics of Incremental Deformations, John Willey, 1965

2 Courant R, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics, Interscience, 1953, 1

3 Hoger A, Carlson D. Determination of the stretch and rotation in the polar decomposition of the

deformation gradient, Quart Appl Math, 1984a, 42:113–117

4 Hoger A, Carlson D. On the derivative of the square root of a tensor and Guo's rate theorems. J Elas, 1984b, 4: 263–267

5 Matins L, Podio–Guidugli P. A variational approach to the polar decomposition theorem, Lencei–rend. Sc fis mat enat, 1979, LZVI: 487–493

6 Martins L, Oliviera R, Podio–Guidugli P. On the vanishing of the additive measure of strain and rotations for finite deformations. J Elas 1987, 17 :189–193

7 Rivlin R S. Further remarks on the stress deformation relation for isotropic mechanics. J Rat Mech Anal, 1955, 4: 681–701

8 Sawyers K, Comments on the Paper" Determination of the stretch and rotation in the polar decomposition of the deformation gradient" by A Hoger and D E Carlson. Quart Appl Math, 1986, 44: 309–311

9 Ting T C T. Determination of $C^{1/2}$, $C^{-1/2}$ and more general isotropic tensor functions of C. J Elas, 1985, 15 :319–323

10 Tommasi D, Marzano S. On the local analysis of continuum deformation. Meccanica, 1988, 23: 166–169

11 Wang Wenbiao, Duan Zhuping. The invariant representation of spins with applications in the theory of finite deformations. Acta Mechanica Sinica, 1990, 6 : 133–140

12 郑泉水. 连续介质力学中的几个基本问题. 清华大学博士论文, 1989

THE EXACT REPRESENTATION OF THE ROTATION TENSOR IN POLAR DECOMPOSITION OF DEFORMATION GRADIENT AND ITS APPLICATIONS

Wang Wenbiao　　Duan Zhuping

(The Graduate School, USTC, Beijing, 100039)　*(Inst. of Mechanics, CAS, Beijing, 100080)*

Abstract

Through a variational approach, the passage from the additive decomposition to polar decomposition of deformation gradient has been completed. An exact formula of the rotation tensor in the polar decomposition is obtained in terms of the additive decomposition. The formula is fundamental in comtinuum mechanics and is useful in the theory of shells and plates for establishing approximate expressions.

Key words

deformation gradient, polar decomposition, rotation tensor, exact representation