

三维坑湍流分离流动的粘流/无粘流干扰计算

马侠

朱自强

中国科学院力学研究所,
北京(邮政编码 100080)

北京航空航天大学,
北京(邮政编码 100083)

摘要 本文对抗的三维分离流动做了低速粘流与无粘流的相互作用计算。对三维边界层反方法进行了分析和讨论。用数值试验的方法验证了在 H 和 α 作为已知量的情况下,三维边界层反方法的积分方程是双曲型的,并提出了一种近似数值特征线法进行求解。无粘流采用低速位流面元法。计算表明所用方法可计算出三维效应很强(即横向变化很大)的三维边界层分离流动。

关键词 边界层, 粘流/无粘流相互作用, 分离流。

引言

对于具有边界层分离的流动,二维边界层方程的解出现奇性。为了克服这一困难,发展了边界层反方法,即给定边界层中参量,计算边界层外缘上的速度等物理量。对于三维分离流动,使用反方法求解边界层方程,如果选择的输入量不同,方程不再是双曲型。方程如不能推进求解,则必须迭代求解就慢得多。Yoshihara^[1]等指出,对选用流向型参数 H 和边界层外缘速度方向角 α 作为输入量可使方程保持双曲型性质。本文的数值实验进一步验证了这一点。

用特征线法对方程进行求解,可随时验证方程的双曲型性质。由于三维坑的纵向变化尺度与横向变化尺度的量级相同,因此绕三维坑的流动是典型的三维流动。本文以三维坑为算例,用特征线法对方程进行了求解。并与面元法的位流进行了耦合。

一、反方法及计算方程的双曲型性质验证

三维湍流边界层积分方程^[2]经过变换可得到其反方法的计算方程

$$F_{\theta x} \frac{\partial \theta_{11}}{\partial x} + F_{\beta x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + F_{u_x} \frac{\partial u_e}{\partial x} + F_{\theta y} \frac{\partial \theta_{11}}{\partial y} + F_{\beta y} \frac{\partial \beta}{\partial y} + F_{u_y} \frac{\partial u_e}{\partial y} = F \quad (1)$$

$$G_{\theta x} \frac{\partial \theta_{11}}{\partial x} + G_{\beta x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + G_{u_x} \frac{\partial u_e}{\partial x} + G_{\theta y} \frac{\partial \theta_{11}}{\partial y} + G_{\beta y} \frac{\partial \beta}{\partial y} + G_{u_y} \frac{\partial u_e}{\partial y} = G \quad (2)$$

本文于1990年9月10日收到,1991年4月21日收到修改稿。

$$J_{\theta x} \frac{\partial \theta_{11}}{\partial x} + J_{\beta x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + J_{u_x} \frac{\partial u_c}{\partial x} + J_{\theta y} \frac{\partial \theta_{11}}{\partial y} + J_{\beta y} \frac{\partial \beta}{\partial y} + J_{u_y} \frac{\partial u_c}{\partial y} = J \quad (3)$$

式中 θ_{11} 为流线坐标系中的动量积分厚度, F 、 G 、 J 等系数见文献[3]。三个方程求解三个变量。

计算方程(1)、(2)和(3)的特征根方程在 $S = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \leq 0$ 时有三个实根, q 、 p 的表达式见文献[3]。 $S < 0$ 是计算方程为双曲型的充要条件。由于 S 对于全三维的情况是 α 、 H 、 θ_{11} 、 β 、 u_c 的极端复杂和繁琐的函数, 所以解析证明很困难, 数值验证容易。

在具有实际意义的流动中, 参量 α 、 H 、 θ_{11} 、 β 、 u_c 的变化范围是有限的, 因此在这些范围内取足够密集的点, 验证 S 在给定 H 、 α 参量和 θ_{11} 、 β 、 u_c 满足边界层反方法计算方程时小于零。本文从以下两个方面进行验证: ① 从整个流场以不同的 H 、 α 解析式来验证 S 值小于零。对于流场 D (即求解域) 如果给出 D 中 H 、 α 的分布: $H = H(x, y)$, $\alpha = \alpha(x, y)$ 和 θ_{11} 、 β 、 u_c 的初值, 流场就确定了。边界层反方法的计算方程(1)、(2)和(3)就可用特征线法试着向前推进求解。如 S 值始终小于零, 则说明在 D 域内方程组是双曲型的。 H 、 α 的不同分布则对应着不同的流场。选取 H 和 α 为 20 个不同基本函数组合的分布, 并对方程进行求解计算, 计算结果表明 S 值是小于零的。② 从单元点验证 S 值小于零。设 A 、 B 为流场中的任意两点。若这两点的所有参数为已知量, 而且在这两点的方程是双曲型的, 即 $S_A < 0$, $S_B < 0$, 则可用下节介绍的特征线法推进解出点 C 的 S 值也小于零。应用归纳原理的想法, 推进求解出的整个流场将是双曲型的。当然, 由于数值实验只能是一些离散的点, 所以这里的归纳是不严格的, 但以数值实验方式说明了在日常的外流计算范围内, 给定 H 、 α 的分布来计算三维湍流边界层积分方程是一个双曲型的问题。

二、用近似数值特征线法对计算方程进行求解

在 $S < 0$ 的情况下, 方程(1)、(2)和(3)可化为三个特征方向的常微分方程, 其差分形式为

$$\begin{aligned} y_4 - y_1 &= \lambda_1^1 (x_4 - x_1) \\ M_1^1 (\theta_4 - \theta_1) + N_1^1 (\beta_4 - \beta_1) + P_1^1 (u_4 - u_1) - C_1^1 (x_4 - x_1) &= 0 \\ y_4 - y_2 &= \lambda_2^2 (x_4 - x_2) \\ M_2^2 (\theta_4 - \theta_2) + N_2^2 (\beta_4 - \beta_2) + P_2^2 (u_4 - u_2) - C_2^2 (x_4 - x_2) &= 0 \\ y_4 - y_3 &= \lambda_3^3 (x_4 - x_3) \\ M_3^3 (\theta_4 - \theta_3) + N_3^3 (\beta_4 - \beta_3) + P_3^3 (u_4 - u_3) - C_3^3 (x_4 - x_3) &= 0 \end{aligned}$$

在由已知点推进求解相邻的未知点时, 由于方程是拟线性的, 因此方程中的系数不但是已知点的函数, 还是未知点的函数。

第一次取已知点的参数值代入方程中的系数。第二次和第三次取已知点和上一次求出的未知点的平均参数值代入方程中的系数。第四次取第三次求出的未知点的参数值代入方程中的系数。最后确定未知点的参数值为以上四次求出的未知点参数的加权平均, 如

$$x_s = (x_{s_a} + 2x_{s_b} + 2x_{s_c} + x_{s_d})/6, \quad \beta_s = (\beta_{s_a} + 2\beta_{s_b} + 2\beta_{s_c} + \beta_{s_d})/6$$

这种作法类似于 Runge-Kutta 方法, 所不同的是坐标点 x 、 y 也在变化。

三、粘流与三维低速位流的面元法耦合解

低速位流 ϕ 的方程为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

绕任意形状物体的位流流动, 可用一些待定的面元奇点的叠加去求解。离散后的代数方程为

$$[A_{ij}] \cdot [I_j] + [V_\infty n_i] = 0$$

矩阵 A_{ij} 为 i 点对 j 点的空气动力影响系数矩阵, I_j 点为 j 点的待定奇点强度。本文的控制点取在面心处。根据本文计算三维坑的没有升力的特点, 只布源汇就可解决问题。三维坑坐标的表达式为 $z = c \cdot \text{sech}(x) \cdot \text{sech}(y)$ 。坑的中心取在原点(如图1), 计算范围为 $x = -5$ 到 $x = 5$, $y = -5$ 到 $y = 5$, 根据坑的对称性取坑的一半进行计算, 从而节省计算量。计算时用平行于 x 和平行于 y 的直线将坑划分为 10×19 个小块曲面。

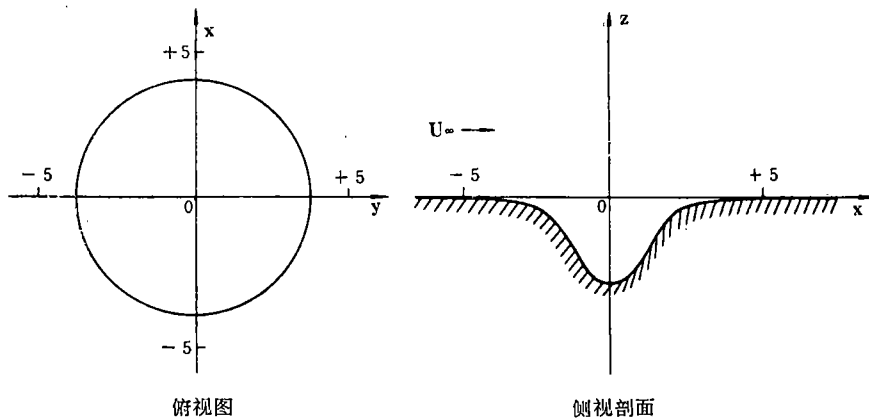


图1 坑的形状示意图

Fig.1 Profile of the dent

本文中采用了 Yoshihara 等提出的干扰律更新形状因子 H , 用当量位移物体法修正无粘流。

四、计算结果

本文计算了一个三维坑不可压湍流流动的算例。坑的深度 c 取 $c = 0.4$ 。算例的雷诺数为 10^5 , 来流速度 u 为 10 米/秒。

图2~图5给出了不可压流通过三维坑四个横向站(正 y 方向的一半坑)的计算结果。四个横向站分别为 (Stat.1) $y = 0$, (Stat.2) $y = 1.67$, (Stat.3) $y = 3.33$, (Stat.4) $y = 5$ 。

图2为边界层位移厚度 δ 的分布情况。从图中可以看出, 在坑的中间有一个小分离气泡。在中心截面 (Stat.1) 分离范围最长, 分离区中间的高度为最高, 它向坑的边缘方向 (Stat.3) 的分离迅速减小。因此, 这是一个三维分离区(从边界层位移厚度迅速鼓

起的意义而言)。

图3为边界层外缘速度的分布。从图中可以看出,在坑的前半部外缘速度迅速下降。对应的压力迅速增强(即逆压梯度很大),这就是导致边界层分离的原因。从图中

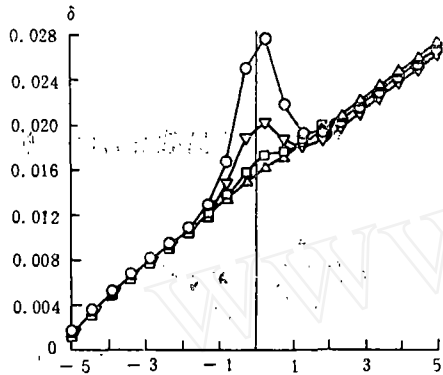


图2 边界层位移厚度分布

Fig.2 Boundary-layer displacement thickness

○ Sta.1 ▽ Sta.2
□ Sta.3 △ Sta.4

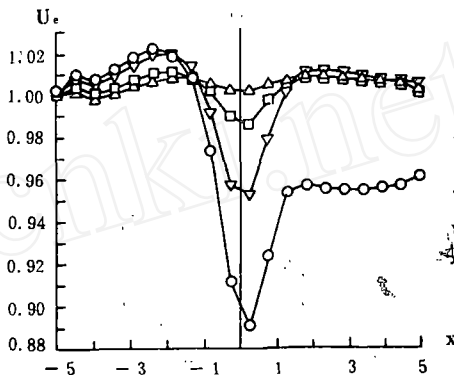


图3 边界层外缘速度分布

Fig.3 Edge velocity of boundary-layer

○ Sta.1 ▽ Sta.2
□ Sta.3 △ Sta.4

还可看出,由于粘性的影响,坑的前、后半部的速度分布不再对称(对于前后对称的坑,单纯的无粘流解是对称的),而且中心截面(Sta.1)最为突出。

图4为边界层形状因子 H 的分布。它是用反方法计算边界层时给定的已知参量,也是连接粘流与无粘流的纽带。图中从(Sta.1)~(Sta.4)边界层的横向变化是很大的(即流动的三维效应很明显)。

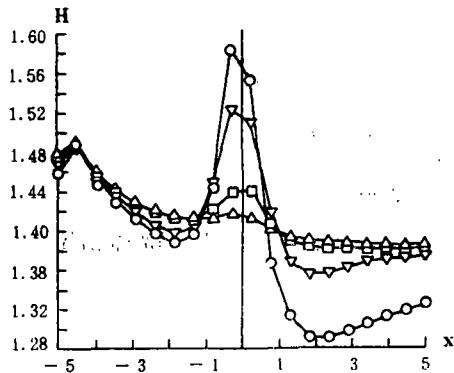


图4 边界层形状因子分布

Fig.4 Shape factor of boundary-layer

○ Sta.1 ▽ Sta.2
□ Sta.3 △ Sta.4

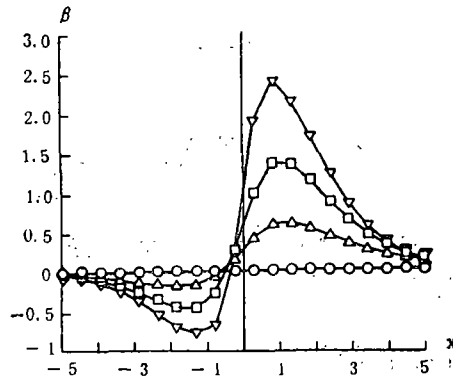


图5 边界层极限流角分布

Fig.5 Limiting streamline angle

○ Sta.1 ▽ Sta.2
□ Sta.3 △ Sta.4

图5为边界层极限流角 β 的分布。在(Sta.1)的截面上(中心对称面)极限流角为零。在(Sta.2)截面(对应 $y=1.67$),极限流角变化幅度最大。在从(Sta.3)~(Sta.4)中, β 的变化幅度逐渐减小,这符合实际情况。因为坑在逐渐变浅。图中坑的前后缘(即 $x=-5$ 到 $x=5$) β 值为零。在前缘($x=-5$), β 为零是给定的,因为这时流动还未遇到坑,所以 β 应给定为零。在后缘($x=5$), β 等于零是由边界层推进求解而得。流体流过坑后

又变成平板边界层。因此, 推进求解出边界层极限流角 β 为零是正确的结果。在坑的前半部分 β 为负值, 后半部分为正值, 这说明在坑的前半部分边界层内横向流指向中心对称面, 在坑的后半部分边界层内的横向流背离中心对称面。

五、结 论

通过以上计算可以得出以下结论: 用积分形式的边界层反方法与无粘流的耦合计算, 可以计算三维小分离区的流动。这里三维分离区是从边界层位移厚度急剧抬起, 达到最大值后又急剧下降恢复到原来的尺度这个意义上而言。这个分离区沿横向也有很急剧的变化, 所以是三维的分离区。通过上节中的定性分析, 其计算结果是合理的, 而且所需计算资源很少。因此, 这个粘流与无粘流相互作用的模型可以基本代替 N-S 方程对带有小分离区的三维湍流流动进行计算。

参 考 文 献

- 1 Wigton L B and Yoshihars H. Second Symposium on Numerical and Physical Respects of Aerodynamic Flow. Springer Verlag, New York, 1983.
- 2 Smith P D. ARC R & M 3739, 1972.
- 3 马侠. 博士论文, 北京航空航天大学.
- 4 Wu J M, Chen Z L and Moulkon T H. AIAA-84-0267

Viscous-Inviscid Interaction Coupled Calculation of Three-Dimensional Turbulent Separated Flow over Dents

Ma Xia

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Zhu Ziqiang

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

Abstract The coupled calculation for the viscous-inviscid interaction of three dimensional separated flow over dents at low speed has been made in the present paper. The analysis and discussion have been made to the inverse boundary layer method. It has been verified by the numerical experiments that the integral equation of the inverse boundary layer method is hyperbolic when H and α were given. An approximated numerical characteristic method has been proposed. The outer inviscid flow is solved with potential panel method. The computational results have shown that the three dimensional boundary layer separated flow with strong three dimensional effect can be obtained with the present method.

key words turbulent boundary layer, viscous-inviscid interaction, separated flow.