

# 晶体非比例双滑移的一般运动学

王 自 强

(中国科学院,力学研究所,北京, 100080)

**提要** 本文对非比例双滑移的变形规律和运动学进行了一般的数学分析,提出了双线性双滑移、逐段线性双滑移的变形梯度张量的解析公式,导出了线元切向量的变形方程以及拉伸轴在极射赤面投影图上位置变化计算公式。

对于任意形式的双滑移,本文提出了运动学分析的精确的数值积分方法。

最后结合面心立方和体心立方晶体,计算了几种典型情况下的拉伸轴旋转。

**关键词** 晶体,非比例双滑移,运动学

## 一、引 言

晶体多滑移变形规律是晶体塑性理论中的重要问题。Göler 和 Sachs<sup>[1]</sup>利用 Taylor 各向同性硬化假设,对铝单晶进行双滑移分析。关于比例双滑移的一般变形规律是由 Chin 等人<sup>[2]</sup>, Shalaby 和 Havner<sup>[3]</sup>, Havner<sup>[4]</sup>提出的。他们得到了线元素的伸长、旋转演化方程,导出了变形梯度张量的解析公式。

但是单纯的比例双滑移在实际中并不存在。实际的双滑移,其主滑移系的滑移剪切量与次滑移系滑移剪切量之间的比值并不是常数,而是依照硬化规律而变化的。一般说来用逐段线性双滑移来模拟实际的双滑移规律是很合适的。

本文致力于非比例双滑移的研究,推导出双线性双滑移、逐段线性双滑移的变形梯度张量的解析公式;线元切向量的变形方程以及拉伸轴方位变形的计算公式。

对于任意形式的非比例双滑移,本文提出了精确的数值积分公式。

## 二、非比例双滑移的变形运动学

设想变形前的线段  $\widehat{PQ}$ , 经过变形成为线段  $\widehat{pq}$ 。

在  $P$  点附近,选择一个线元素  $\overline{PP'}$ , 点  $P'$  位于弧线  $\widehat{PQ}$  上。相应的  $p'$  位于弧线  $\widehat{pq}$  上。我们有

$$dx = FdX, \quad (2.1)$$

其中  $dx$  是线元  $\overline{pp'}$  的空间位置向量。 $dX$  是线元  $\overline{PP'}$  的空间位置向量。 $F$  是变形梯度张量。将 (2.1) 式除以线元  $\widehat{PP'}$  的弧长  $dS$ 。令  $dS$  趋于零。得

本文于 1990 年 10 月 17 日收到。

$$l = Fl_0 \quad (2.2)$$

此时  $l_0$  是弧线  $\widehat{PQ}$  在  $P$  点的单位切向量, 而  $l$  则是弧线  $\widehat{pq}$  在  $p$  点的切向量, 但一般说来并非单位向量。

我们只考虑滑移引起的塑性应变, 忽略晶格的弹性畸变。为了便于分析起见, 暂不考虑晶格的转动。而是让拉伸轴与某个确定的物质线元素方向保持一致也就是让拉伸轴随着变形旋转。

对 (2.2) 式取物质导数, 得:

$$\dot{i} = \dot{F}l_0 = LFl_0 = Ll \quad (2.3)$$

其中  $L$  是速度梯度张量。我们有,

$$L = \sum_{k=1}^2 (m \otimes n)_k \dot{\gamma}^{(k)}, \quad (2.4)$$

$m_k, n_k$  分别是第  $k$  滑移系滑移方向和滑移面法线方向的单位向量。 $\dot{\gamma}^{(k)}$  是第  $k$  滑移系的滑移剪切率。令

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= l \cdot n_1 = l \cos \phi_1, \\ x_2 &= l \cdot n_2 = l \cos \phi_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$\phi_k$  表示  $l$  向量与  $n_k$  向量之间的夹角。由 (2.3)–(2.5) 式, 我们可得:

$$\left. \begin{aligned} \dot{i} &= (x_1 m_1 + \alpha x_2 m_2) \dot{\gamma}^{(1)}, \\ \dot{x}_1 &= \alpha c_{12} x_2, \\ \dot{x}_2 &= c_{21} x_1, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

比例因子  $\alpha = \dot{\gamma}^{(2)}/\dot{\gamma}^{(1)}$ 。方程 (2.6) 中已经设想广义时间为  $r = r^{(1)}$ 。另有:

$$c_{12} = n_1 \cdot m_2, \quad c_{21} = n_2 \cdot m_1 \quad (2.7)$$

### 比例双滑移

设想比例因子  $\alpha$  是常数, 不随变形而改变。令

$$C = \sqrt{\alpha c_{12} c_{21}}, \quad K = c_{21}/c$$

我们有解答<sup>[3]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= l_0 \{ C_1 \exp(cr) + C_2 \exp(-cr) \} \\ x_2 &= Kl_0 \{ C_1 \exp(cr) - C_2 \exp(-cr) \} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \phi_1^0 + \frac{1}{K} \cos \phi_2^0 \right\} \\ C_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \phi_1^0 - \frac{1}{K} \cos \phi_2^0 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

另有:

$$l = l_0 + \{ X_1(r) m_1 + \alpha X_2(r) m_2 \} \quad (2.10)$$

$$F = I + \frac{1}{C} \left\{ B \operatorname{sh}(cr) + \frac{1}{C} B^2 [\operatorname{ch}(cr) - 1] \right\} \quad (2.11)$$

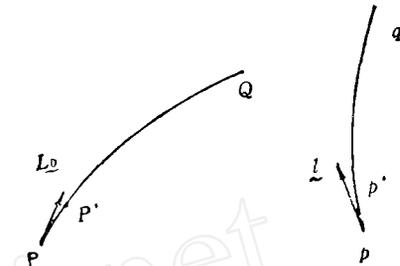


图 1

这里

$$X_1(\gamma) = \int_0^\gamma x_1 d\gamma, \quad X_2(\gamma) = \int_0^\gamma x_2 d\gamma \quad (2.12)$$

$$B = m_1 \otimes n_1 + \alpha m_2 \otimes n_2, \quad (2.13)$$

### 双线性双滑移

如图2所示,  $\gamma^{(1)}$  与  $\gamma^{(2)}$  之间的关系呈折线  $OM_1M_2$ .

$$a(\gamma) = \begin{cases} a_0, & \gamma \leq \gamma_1 \\ a_1, & \gamma > \gamma_1, \end{cases}$$

其中  $a_0, a_1$  是常数.

当  $0 \leq \gamma \leq \gamma_1$  时, 我们有:

$$l = l_0 + \{X_1(\gamma)m_1 + a_0 X_2(\gamma)m_2\}, \quad (2.14)$$

$$F = l + \frac{1}{C_0} \left\{ B_0 \operatorname{sh}(C_0 \gamma) + \frac{1}{C_0} B_0^2 [\operatorname{ch}(C_0 \gamma) - 1] \right\} \quad (2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \sqrt{a_0 C_{12} C_{21}}, \quad K_0 = C_{21}/C_0 \\ B_0 &= m_1 \otimes n_1 + a_0 m_2 \otimes n_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

记  $\gamma = \gamma_1$  时的向量  $l$  和变形梯度张量  $F$  为  $l_1, F_1$ :

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= l_0 + \{X_1(\gamma_1)m_1 + a_0 X_2(\gamma_1)m_2\}, \\ F_1 &= l + \frac{1}{C_0} \left\{ B_0 \operatorname{sh}(C_0 \gamma_1) + \frac{1}{C_0} B_0^2 [\operatorname{ch}(C_0 \gamma_1) - 1] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

当  $\gamma > \gamma_1$  时, 我们有:

$$\left. \begin{aligned} \gamma^{(2)} &= a_1 \gamma^{(1)} - a_1 \\ i &= x_1 m_1 + a_1 x_2 m_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 C_{12} x_2 \\ x_2 &= C_{21} x_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

由此得到解答:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= l_1 \{ C_1^{(1)} \exp(C_1(\gamma - \gamma_1)) + C_2^{(1)} \exp(-C_1(\gamma - \gamma_1)) \} \\ x_2 &= K_1 l_1 \{ C_1^{(1)} \exp(C_1(\gamma - \gamma_1)) - C_2^{(1)} \exp(-C_1(\gamma - \gamma_1)) \} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

$$\left. \begin{aligned} C_1^{(1)} &= \frac{1}{2} \left( \cos \phi_1^{(1)} + \frac{1}{K_1} \cos \phi_2^{(1)} \right) \\ C_2^{(1)} &= \frac{1}{2} \left( \cos \phi_1^{(1)} - \frac{1}{K_1} \cos \phi_2^{(1)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \sqrt{a_1 C_{12} C_{21}}, \quad K_1 = C_{21}/C_1 \\ l &= l_1 + \{X_1(\gamma)m_1 + a_1 X_2(\gamma)m_2\} \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1(\gamma) &= \int_{\gamma_1}^\gamma x_1 d\gamma, \quad X_2(\gamma) = \int_{\gamma_1}^\gamma x_2 d\gamma \\ X_1(\gamma) &= \frac{l_1}{C_1} \left\{ C_1^{(1)} \exp(C_1(\gamma - \gamma_1)) - C_2^{(1)} \exp(-C_1(\gamma - \gamma_1)) - \frac{1}{K_1} \cos \phi_2^{(1)} \right\} \\ X_2(\gamma) &= K_1 \frac{l_1}{C_1} \left\{ C_1^{(1)} \exp(C_1(\gamma - \gamma_1)) + C_2^{(1)} \exp(-C_1(\gamma - \gamma_1)) - \cos \phi_1^{(1)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

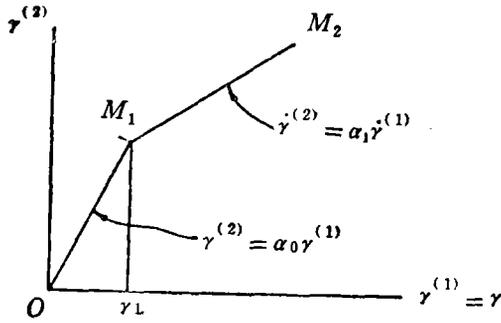


图 2

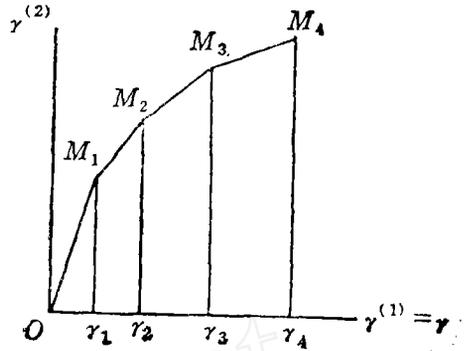


图 3

$\phi_1^{(1)}, \phi_1^{(2)}$  是  $\gamma = \gamma_1$  时,  $l$  向量与  $n_k$  向量间夹角.

$$F = F^* F_1, \tag{2.24}$$

$$F^* = I + \frac{1}{C_1} \left\{ B_1 \text{sh}(C_1(\gamma - \gamma_1)) + \frac{1}{C_1} B_1^2 [\text{ch}(C_1(\gamma - \gamma_1)) - 1] \right\} \tag{2.25}$$

**逐段线性双滑移**

如图 3 所示, 双滑移的历史可以用逐段线性的关系来表示. 当  $\gamma_i < \gamma \leq \gamma_{i+1}$  时,

$$\dot{\gamma}^{(2)}/\dot{\gamma}^{(1)} = \alpha_i.$$

$\alpha_i$  是常数.

设想  $0 \leq \gamma \leq \gamma_i$  的变形运动学已经清楚, 令  $\gamma^{(1)} = \gamma_i$  时, 切向量  $l$  及变形梯度张量  $F$  为  $l_i$  及  $F_i$ .

当  $\gamma_i < \gamma \leq \gamma_{i+1}$  时, 我们有:

$$i = x_1 m_1 + \alpha_i x_2 m_2 \tag{2.26}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_i C_{12} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_2 &= C_{21} \dot{x}_1 \end{aligned} \right\} \tag{2.27}$$

由此我们有解答:

$$l = l_i + \{X_1(\gamma)m_1 + \alpha_i X_2(\gamma)m_2\} \tag{2.28}$$

$$X_1(\gamma) = \int_{\gamma_i}^{\gamma} x_1 d\gamma, \quad X_2(\gamma) = \int_{\gamma_i}^{\gamma} x_2 d\gamma \tag{2.29}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= l_i \{C_1^{(i)} \exp(C_i(\gamma - \gamma_i)) + C_2^{(i)} \exp(-C_i(\gamma - \gamma_i))\} \\ x_2 &= K_i l_i \{C_1^{(i)} \exp(C_i(\gamma - \gamma_i)) - C_2^{(i)} \exp(-C_i(\gamma - \gamma_i))\} \end{aligned} \right\} \tag{2.30}$$

$$C_i = \sqrt{\alpha_i C_{21} C_{12}}, \quad K_i = C_{21}/C_i$$

$$X_1(\gamma) = \frac{l_i}{C_i} \left\{ C_1^{(i)} \exp(C_i(\gamma - \gamma_i)) - C_2^{(i)} \exp(-C_i(\gamma - \gamma_i)) - \frac{1}{K_i} \cos \phi_1^{(i)} \right\} \tag{2.31}$$

$$X_2(\gamma) = K_i \frac{l_i}{C_i} \left\{ C_1^{(i)} \exp(C_i(\gamma - \gamma_i)) + C_2^{(i)} \exp(-C_i(\gamma - \gamma_i)) - \cos \phi_1^{(i)} \right\}$$

$$F = F^* F_i, \tag{2.32}$$

$$F^* = I + \frac{1}{C_i} \left\{ B_i \text{sh}(C_i(\gamma - \gamma_i)) + \frac{1}{C_i} B_i^2 [\text{ch}(C_i(\gamma - \gamma_i)) - 1] \right\} \tag{2.33}$$

我们来校核公式(2.2)。我们有:

$$(F^*)^{-1} = I - \frac{1}{C_i} \left\{ B_i \operatorname{sh}(C_i(\gamma - \gamma_i)) - \frac{1}{C_i} B_i^2 [\operatorname{ch}(C_i(\gamma - \gamma_i)) - 1] \right\} \quad (2.34)$$

事实上

$$B_i = m_1 \otimes n_1 + \alpha_i m_2 \otimes n_2, \quad (2.35)$$

$$B_i^2 = + C_i \left( \alpha_i K_i m_2 \otimes n_1 + \frac{1}{K_i} m_2 \otimes n_2 \right) \quad (2.36)$$

$$B_i^3 = C_i^2 B_i \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \dot{F} \dot{F}^{-1} &= \left\{ I + \frac{1}{C_i^2} B_i^2 [\operatorname{ch}(C_i(\gamma - \gamma_i)) - 1] \right\}^2 - \frac{1}{C_i^2} B_i^2 [\operatorname{Sh}(C_i(\gamma - \gamma_i))]^2 \\ &= I + \frac{2B_i^2}{C_i^2} [\operatorname{ch}(C_i(\gamma - \gamma_i)) - 1] + \frac{1}{C_i^2} B_i^2 [\operatorname{ch}(C_i(\gamma - \gamma_i)) - 1]^2 \\ &\quad - \frac{B_i^2}{C_i^2} \operatorname{Sh}^2(C_i(\gamma - \gamma_i)) = I + \frac{2}{C_i^2} B_i^2 [\operatorname{ch}(C_i(\gamma - \gamma_i)) - 1] \\ &\quad - \frac{1}{C_i^2} B_i^2 \operatorname{Sh}^2(C_i(\gamma - \gamma_i)) + \frac{B_i^2}{C_i^2} [\operatorname{ch}^2(C_i(\gamma - \gamma_i)) + 1 \\ &\quad - 2\operatorname{ch}(C_i(\gamma - \gamma_i))] = I \end{aligned} \quad (2.38)$$

另一方面,

$$(\dot{F}^*)^{-1} = \left\{ B_i \operatorname{ch}(C_i(\gamma - \gamma_i)) + \frac{1}{C_i} B_i^2 \operatorname{Sh}(C_i(\gamma - \gamma_i)) \right\} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} (\dot{F}^*)^{-1} \dot{F}^* &= \operatorname{ch}(C_i(\gamma - \gamma_i)) \left\{ B_i - \frac{B_i^2}{C_i} \operatorname{Sh}(C_i(\gamma - \gamma_i)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{C_i^2} B_i^2 [\operatorname{ch}(C_i(\gamma - \gamma_i)) - 1] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{C_i} \operatorname{Sh}(C_i(\gamma - \gamma_i)) \left\{ B_i - \frac{B_i^2}{C_i} \operatorname{Sh}(C_i(\gamma - \gamma_i)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{C_i^2} B_i^2 [\operatorname{Ch}(C_i(\gamma - \gamma_i)) - 1] \right\} = B_i = L \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\dot{F} \dot{F}^{-1} = \dot{F}^* \dot{F}^{*-1} = L \quad (2.41)$$

由此看出(2.32)–(2.33)确实给出了正确的变形梯度张量。

由公式(2.33)不难推得如下公式:

$$F = \dot{F} \dot{F}_1 \dot{F}_{i-1} \cdots \dot{F}_1 \quad (2.42)$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{F}_k &= I + \frac{1}{C_{k-1}} \left\{ B_{k-1} \operatorname{Sh}(C_{k-1}(\gamma_k - \gamma_{k-1})) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{C_{k-1}} B_{k-1}^2 [\operatorname{ch}(C_{k-1}(\gamma_k - \gamma_{k-1})) - 1] \right\} \quad (2.43) \\ &\quad k \geq 1 \end{aligned}$$

### 三、双滑移变形运动学的一般公式

双滑移变形的基本方程为:

$$i = x_1 m_1 + \alpha x_2 m_2 \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha C_{12} x_2 \\ \dot{x}_2 = C_{21} x_1 \end{cases} \tag{3.2}$$

设想比例因子  $\alpha$  是  $\gamma$  的确定函数。方程 (3.2) 是变系数的常微分方程组。在一定的初始条件下, 由方程组 (3.2), 利用龙格-库塔法求得精确的数值解  $x_1, x_2$ 。再由公式 (3.1) 求得  $l$ :

$$l = l_0 + \{X_1(\gamma)m_1 + \alpha(\gamma)X_2(\gamma)m_2\} \tag{3.3}$$

$$\left. \begin{aligned} X_1(\gamma) &= \int_0^\gamma x_1(\gamma) d\gamma \\ X_2(\gamma) &= \frac{1}{\alpha(\gamma)} \int_0^\gamma x_2(\gamma) \alpha(\gamma) d\gamma \end{aligned} \right\} \tag{3.4}$$

现在来分析变形梯度张量  $F$ 。我们有:

$$\dot{F} = LF \tag{3.5}$$

$$L = m_1 \otimes n_1 + \alpha(\gamma)m_2 \otimes n_2 \tag{3.6}$$

其中  $\gamma$  是“广义”时间。

在固定的空间直角坐标系内。方程 (3.5) 写成分量形式为:

$$\dot{F}_{ij} = L_{ik} F_{kj} \tag{3.7}$$

将  $F_{ij}$  看作是  $\gamma$  的函数。方程 (3.7) 是变系数的常微分方程组。在一定的初始条件下, 由方程组 (3.7), 利用龙格-库塔法可以求得精确的数值解  $F_{ij}$ 。

再由变形梯度张量  $F$ , 可以直接求得  $l$ :

$$l = Fl_0 \tag{3.8}$$

作为一个典型例子, 我们来分析下述情况:

$$\alpha(\gamma) = \alpha_0(1 - \beta_0 e^{-k_0 \gamma}) \tag{3.9}$$

$$\alpha_0, k_0 > 0, 0 < \beta_0 < 1$$

$$\gamma^{(2)} = \alpha_0 \left( \gamma + \frac{\beta_0}{k_0} (e^{-k_0 \gamma} - 1) \right) \tag{3.10}$$

对于不同的初值  $\phi_1^0, \phi_2^0$ , 利用 (3.9), 积分方程组 (3.2)、(3.4), 可以得到  $x_1(\gamma), x_2(\gamma), X_1(\gamma), X_2(\gamma)$ 。

图 4 显示了关于  $X_1(\gamma), X_2(\gamma)$  的计算结果。

又由 (3.3) 式得,

$$l^2 = l_0^2 + X_1^2 + \alpha^2 X_2^2 + 2l_0 \cdot (X_1 \cos \lambda_1^0 + \alpha X_2 \cos \lambda_2^0) + 2\alpha X_1 X_2 m_{12} \tag{3.11}$$

其中

$$m_{12} = m_1 \cdot m_2$$

另一方面由公式 (3.8) 也可以求得  $l$ ,  $l$  图 4 同时给出了  $\Delta l$  与  $\gamma$  的关系。

$$(\Delta l = l - l_0).$$

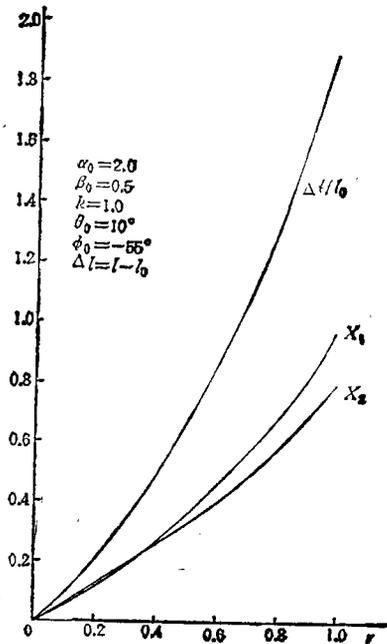


图 4

计算表明依照公式 (3.3) 算得的  $l$  与依照公式 (3.8) 算得的  $l$  是完全一致的。

### 四、拉伸轴的转动

利用上面得到的非比例双滑移一般公式, 我们来分析双线性双滑移的拉伸轴转动。

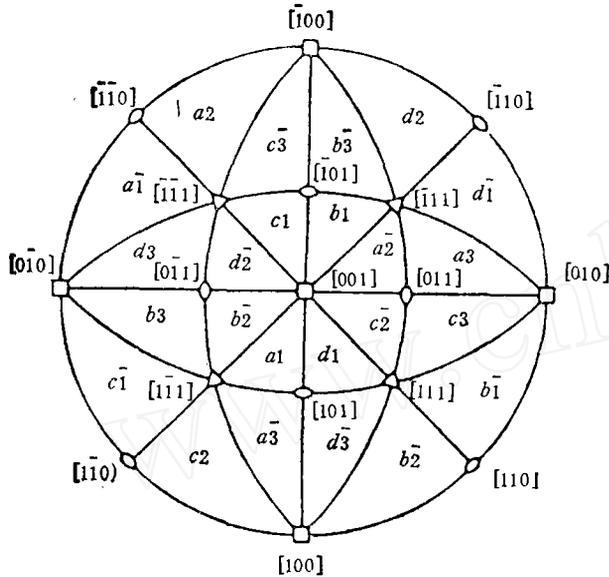


图 5 立方晶体极射投影图

图 5 是标准的 [001] 极射赤道面投影图。该图划分成 24 个小三角形区域。当拉伸轴位于某个小三角形区域时, 图上标志的滑移系将有最大的分解剪应力。

表 1 和表 2 分别列出了面心立方晶体和体心立方晶体各个滑移系的命名。

对面心立方晶体, 4 个字母表示 4 个滑移面 {111}; 3 个滑移方向 <110> 是用指标 1, 2, 3 来表示。对体心立方晶体, 4 个字母表示 4 个滑移方向 <111>; 而指标 1, 2, 3 表示 3 个滑移面 {110}。

建立空间固定的直角坐标系 OXYZ, 它与晶轴坐标系完全重合。

$x$  轴指向晶轴 [100],  $y$  轴和  $z$  轴分别指向 [010] 和 [001]。

表 1 面心立方晶体滑移系

滑移面	(111)	( $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ )	( $\bar{1}11$ )	(1 $\bar{1}\bar{1}$ )
滑移方向	[0 $\bar{1}$ 1][10 $\bar{1}$ ][ $\bar{1}$ 10]	[011][ $\bar{1}$ 0 $\bar{1}$ ][1 $\bar{1}$ 0]	[0 $\bar{1}$ 1][ $\bar{1}$ 0 $\bar{1}$ ][110]	[011][10 $\bar{1}$ ][ $\bar{1}\bar{1}$ 0]
滑移系	$a_1, a_2, a_3$	$b_1, b_2, b_3$	$c_1, c_2, c_3$	$d_1, d_2, d_3$

表 2

滑移面	(0 $\bar{1}$ 1)(10 $\bar{1}$ )( $\bar{1}$ 10)	(011)( $\bar{1}$ 0 $\bar{1}$ )(1 $\bar{1}$ 0)	(0 $\bar{1}$ 1)( $\bar{1}$ 0 $\bar{1}$ )(110)	(011)(10 $\bar{1}$ )( $\bar{1}\bar{1}$ 0)
滑移方向	[111]	[ $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ ]	[ $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ ]	[1 $\bar{1}\bar{1}$ ]
滑移系	$a_1, a_2, a_3$	$b_1, b_2, b_3$	$c_1, c_2, c_3$	$d_1, d_2, d_3$

用欧拉角  $\theta, \phi$  表示拉伸轴方位。此时有:

$$l = l(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)^T \quad (4.1)$$

该方向在极射赤道平面图用点  $(x, y)$  来表示。我们有

$$\left. \begin{aligned} x &= \sin \theta \cos \phi / (1 + \cos \theta) \\ y &= \sin \theta \sin \phi / (1 + \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

令  $\phi_1, \phi_2$  是向量  $l$  与滑移面法线方向  $n_1, n_2$  之间的夹角;  $\lambda_1, \lambda_2$  是向量  $l$  与滑移方向  $m_1, m_2$  之间的夹角。

### 1. 滑移系 $a_1$ 和 $b_2$ 双滑移

设想拉伸轴的初始位置接近边界  $[001]-[1\bar{1}1]$ , 此时最有可能同时开动滑移系  $a_1$  和  $b_2$ .

对面心立方晶体, 我们有:

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos \phi_1 + \cos \phi_2) \\ \operatorname{tg} \phi &= -\frac{\cos \theta - \sqrt{2} \cos \lambda_1}{\cos \theta - \sqrt{2} \cos \lambda_2} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

对体心立方晶体,

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos \lambda_1 + \cos \lambda_2) \\ \operatorname{tg} \phi &= -\frac{\cos \theta - \sqrt{2} \cos \phi_1}{\cos \theta - \sqrt{2} \cos \phi_2} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

由公式 (3.3), 立即得到:

$$l = \sqrt{l_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + 2l_0(X_1 \cos \lambda_1^0 + X_2 \cos \lambda_2^0 \alpha) + 2X_1 X_2 \cdot \alpha \cdot m_{12}}, \quad (4.5)$$

$$\left. \begin{aligned} l \cos \lambda_1 &= l \cdot m_1 = l_0 \cos \lambda_1^0 + X_1 + \alpha X_2 m_{12} \\ l \cos \lambda_2 &= l \cdot m_2 = l_0 \cos \lambda_2^0 + X_1 m_{12} + \alpha X_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

$$\left. \begin{aligned} l \cos \phi_1 &= l \cdot n_1 = l_0 \cos \phi_1^0 + \alpha_0 X_2 \cdot C_{12} \\ l \cos \phi_2 &= l \cdot n_2 = l_0 \cos \phi_2^0 + X_1 \cdot C_{21} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

根据公式 (4.5)–(4.7), 可以求得  $\lambda_1, \lambda_2, \phi_1, \phi_2$ . 代入 (4.3)、(4.4) 即可求得  $\theta, \phi$ . 我们也可以直接建立求解  $\theta, \phi$  中的公式,

$$\left. \begin{aligned} l \cdot \cos \theta &= l_0 \cos \theta_0 + X_1(m_1 \cdot e_3) + \alpha X_2(m_2 \cdot e_3) \\ l \cdot \cos \phi \sin \theta &= l_0 \cos \phi_0 \sin \theta_0 + X_1(m_1 \cdot e_1) + \alpha X_2(m_2 \cdot e_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

图 6 绘出了面心立方晶体的计算结果. 拉伸的初始方位是  $\theta_0 = 45^\circ, \phi_0 = -55^\circ$ . 第一阶段  $\alpha_0 = 0.5$ . 当  $\gamma = 5.0$  时, 进入第二阶段,  $\alpha_1$  的 5 个不同值 (0.02, 0.5, 1.0, 2.0, 50.0) 继续变形. 其极限位置与比例双滑移的相应极限位置一致 (也就是从初始位置出发, 以  $d\gamma^{(2)}/d\gamma^{(1)} = \alpha_0 \Rightarrow (0.02, 0.5, 1.0, 2.0, 50.0)$  的比例双滑移的极限位置).

图 7 绘出了体心立方晶体的计算结果. 其中  $\theta_0 = 45^\circ, \phi_0 = -55^\circ, \alpha_0 = 2.0, \gamma_1 = 1.0$

$$\alpha_1 = (0.05, 0.5, 1.0, 2.0, 50.0)$$

### 2. 试样初始拉伸转接近边界 $[001]-[101]$ .

对于这种情况, 可能开动的两个滑移系是  $a_1$  和  $d_1$ . 我们有公式:

对面心立方晶体,

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= (\cos \lambda_1 + \cos \lambda_2) / \sqrt{2} \\ \operatorname{tg} \phi &= \frac{\sqrt{3} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2)}{2(\sqrt{3} \cos \phi_2 - \sqrt{2} \cos \lambda_1)} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

对体心立方晶体,

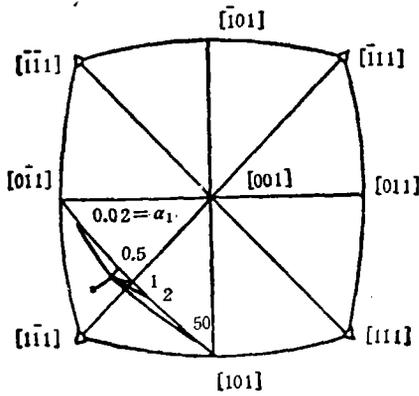


图 6

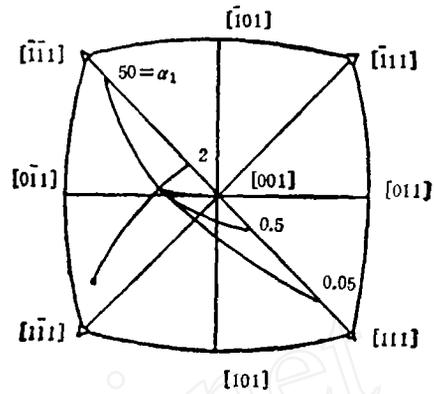


图 7

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= (\cos \phi_1 + \cos \phi_2) / \sqrt{2} \\ \operatorname{tg} \phi &= \frac{\sqrt{3} (\cos \lambda_1 - \cos \lambda_2)}{2(\sqrt{3} \cos \lambda_2 - \sqrt{2} \cos \phi_1)} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

图 8 表示了面心立方晶体的计算结果。其中  $\theta_0 = 40^\circ$ ,  $\phi_0 = 10^\circ$ ,  $\alpha_0 = 50.0$ ,  $\gamma_1 = 0.05$ ,

$$\alpha_1 = (0.02, 0.5, 1.0, 2.0, 50.0).$$

图 9 绘出了体心立方晶体的计算结果。其中  $\theta_0 = 10^\circ$ ,  $\phi_0 = 10^\circ$ ,  $\alpha_0 = 0.02$ ,  $\gamma_1 = 1.0$ ,

$$\alpha_1 = (0.02, 0.5, 1.0, 2.0, 50.0).$$

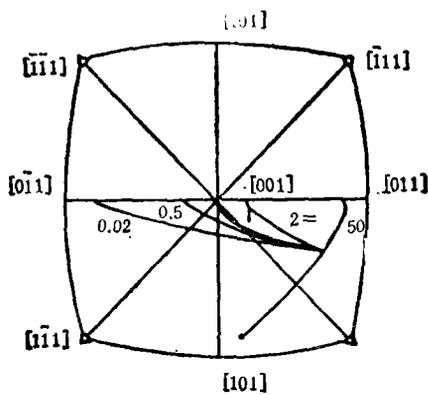


图 8

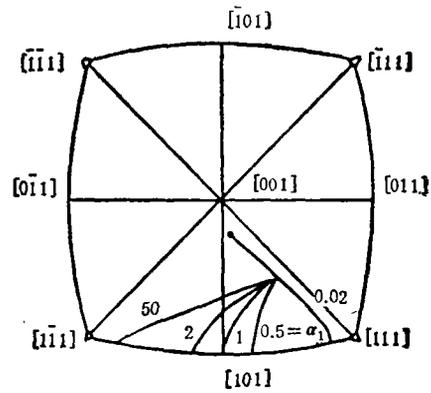


图 9

## 五、讨 论

本文讨论是纯几何学的。分析中设想两个滑移系的滑移剪切率的比值是已知的，而实际变形过程，这个比值是未知的。这需要通过硬化规律的分析来求得或者通过实验测

定某些变形量来推断。这个问题作者已有另外文章来分析, 这里不作论述。事实上本文的分析方法与实验测定若干宏观应变变量相结合可以用来测定硬化系数  $h_{ag}$ 。

致谢 本文得到中国科学院重大项目(No. 87-52)资助。

### 参 考 文 献

- [1] Von Göler F and Sachs G. *Z. Phys.* 1927 41:103
- [2] Chin G Y Thurston R N and Nesbitt E A. *Trans. metall. Soc., AIME* 1966 236:69
- [3] Havner K S. *J. Mech. Phys. Solids*. 1979, 27:415
- [4] Shalaby A H and Havner K S. *J. Mech. phys. Solids* 1978, 26:79

## A GENERAL KINEMATICAL ANALYSIS OF NONPROPORTIONAL DOUBLE SLIP

Wang Tzu-Chiang

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing, 100080, China)

**Abstract** This paper presents a general kinematical analysis for nonproportional double slip in fcc and bcc crystals. The analytical formulas for the deformation gradient are obtained for bilinear path double slip and piece-wise proportional double slip. The purely kinematical equation for the tangent vector of a line element is derived.

The axis rotations on a stereographic projection are illustrated for several different slip-system combinations, initial axis positions in both fcc and bcc crystal.

An accurate numerical method for the general kinematical analysis of arbitrary nonproportional double slip is developed.

**Key words** crystal, nonproportional double slip, kinematics