

双自由面重力流的数值保角变换方法 (II)数值方法

杨志峰

陈国谦

(北京大学力学系, 北京 100871)

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 本文是文献[1]的继续。在薄壁堰双自由面泄流问题数学模型的基础上, 本文进一步发展了该问题的一种数值离散和数值计算方法, 包括不同单元插值函数的选取、边界奇异积分的处理等。文中选取倾角为 45° 薄壁堰泄流流动进行了数值计算, 所得上、下两自由面位置和泄流流量与实测或分析值吻合很好。全文得出了一些有益的结论。

关键词 计算水力学, 动边界, 重力势流, 保角变换, 数值方法。

作者曾应用势流保角变换理论, 将含有非规则可动边界的薄壁堰泄流物理平面②变换到规则的无限带状域变换平面①, 如图 1 所示;

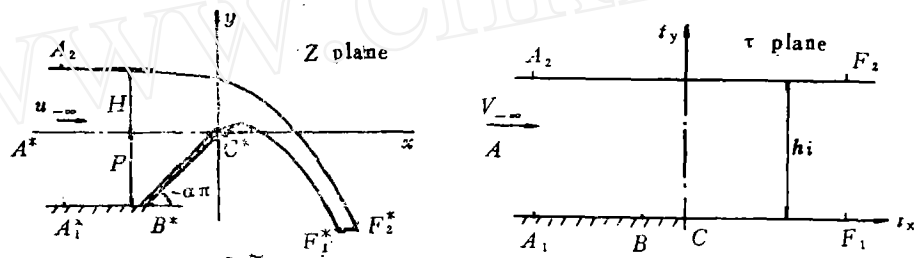


图 1 平面变换对应关系

作者进一步建立了该问题的数学模型^[1]。现选取

$$Z = Z^* H, \quad V = V^* \sqrt{2gH}, \quad P = P^* H$$

这里长度特征尺度 H 为上游无穷远处堰顶水深, 对文献[1]中数学模型无量纲化(为了书写方便, 略去无量纲化表达式中上标“*”号), 可得

$$\frac{dZ}{d\tau} = \frac{1+P}{h} E e^{-i\alpha\beta} \quad Z \in \Gamma \quad (1a)$$

$$V^2 + I_m(Z) = \text{const} \quad Z \in \text{自由面} \quad (1b)$$

$$V = V_\infty / E \quad Z \in \text{自由面} \quad (1c)$$

$$V_\infty = E_c / \sqrt{1 - E_c^2} \quad (1d)$$

这里 $E = \exp \left[-\alpha \ln \left| 1 - e^{-\frac{\pi}{h}(\tau + b - \tau)} \right| + \int_{-\alpha}^{\frac{1}{2}} \ln \left| 1 - e^{-\frac{\pi}{h}(b - \tau)} \right| d\beta - \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \left| 1 - e^{-\frac{\pi}{h}(b - \tau)} \right| d\beta \right],$

Z 、 τ 分别为 ② 平面和 ① 平面复变量, P 是堰高, h 表示变换平面条带宽度(可任意取值), β 定义

本文于 1991 年 1 月 26 日收到。

为②平面自由边界上任一点角度(按文献[1]定义), V 表示流速, $V_{-\infty}$ 则为上游无穷远处 V 值, E_c 表示堰顶点 C^* 在变换平面对应点处的 E 值, Γ 为区域边。

式(1a)为一非线性微分-积分方程, 其特点对②平面上一给定非规则边界, b 未知, 必须作为解的一部分和方程一同求解, 此乃求解困难之一; 再者, 式(1)所描述的为一动边界问题, 自由面边界非规则且待定, 也必须作为解的一部分和方程一同进行非线性迭代确定, 此乃求解困难之二。本文的主要目的就是表明这一复杂自由边界问题的求解如何数值实现。作者在文献[1]中曾提出了应用式(1)的两种求解方式, 即在泄流的物理平面上求解或在变换平面上求解, 经过分析和比较, 作者认为应优先考虑在变换平面上求解, 亦是本文所采用的求解方案。

1 单元插值函数

数值计算的第一步应将求解区域离散化, 用有限离散系统来近似取代无限连续系统。根据文献[1]中提出的求解基本思想, 我们只需在区域边界上进行区域离散或单元划分, 边界单元的划分如图2所示。下自由面对应边界上, 划分了 n 个单元, 其中包括一个近壁元和一个无穷元; 上自由面对应边界上, 划分了 $ns - n + 1$ 个单元, 其中有2个无穷元。所有常规元均采用等间距划分, 并假定角度 β 在单元内呈线性分布, 而近壁元或无穷元内 β 分布需进行特殊处理。

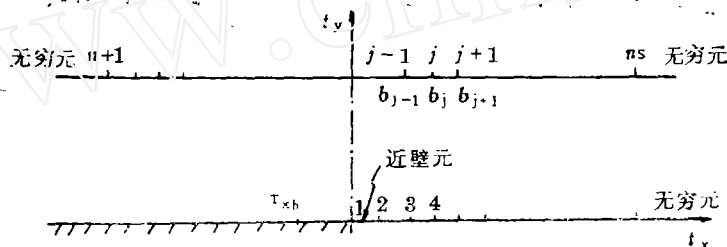


图2 单元划分或结点分布

1.1 常规元

也可称为线性元, 即假定 β 在单元内与 b 呈线性变化,

$$\beta = \beta_i + \Delta\beta_i \xi \tag{2}$$

$$\Delta\beta_i = \beta_{i+1} - \beta_i \quad i = 2, 3, \dots, n-1, n+2, n+3, \dots, ns \tag{2a}$$

这里 $\xi = \frac{b - b_i}{\Delta\tau_x} (= 0 - 1)$ 为单元局部坐标参数, $\Delta\tau_x$ 为单元长度。

1.2 近壁元

是指水舌脱离堰壁自由边界所对应的第一个单元, 即单元1。 β 在该单元内变化较为剧烈, 不妨假定在这一单元内 β 为二次抛物性变化, 考虑到在脱离点处水流与堰壁相切, 因此 β 应满足 $\frac{d\beta}{db} |_{b=b_1} = 0$, 我们给出

$$\beta = C_0 + C_1 \xi^{1+\varepsilon} + C_2 \xi^2 \tag{3}$$

其中 ε 为一高阶小量, C_0, C_1, C_2 为单元待定常数, 可由单元结点处 β 值及 β 变化率的连续性条件来确定, 在此给出结果

$$\beta = \beta_1 + \Delta\beta_1(2 - B_1)\xi^{1+\varepsilon} + \Delta\beta_1(B_1 - 1)\xi^2 \tag{4}$$

式中, $\Delta\beta_1 = \beta_2 - \beta_1$; $B_1 = \frac{1}{\Delta\beta_1}(-1.5\beta_2 + 2\beta_3 - 0.5\beta_4)$; $\beta_1 = -\alpha$.

1.3 无穷元

无穷元意味着单元的某一端在无穷远处, 对本问题, 可分为上游无穷元和下游无穷元.

(1) 上游无穷元. 即上边界上的第一个单元, 在该单元内, β 值接近于零, 如图3所示. 单元坐标与局部坐标参数的关系取为 $b = b_{n+1} + \ln\xi (\xi = 0-1)$, 忽略近似线性项的影响, 假定

$$\beta = C_0 + C_2\xi^2 \tag{5}$$

则条件 $\frac{d\beta}{db} \Big|_{b \rightarrow -\infty} = 0$ 自然满足. 又 $\xi = 0, 1$ 时, β 值分别为 $0, \beta_{n+1}$, 这样应有

$$\beta = \beta_{n+1}\xi^2 \tag{6}$$

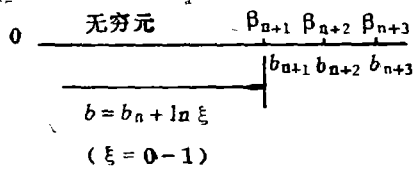


图3 上游无穷单元

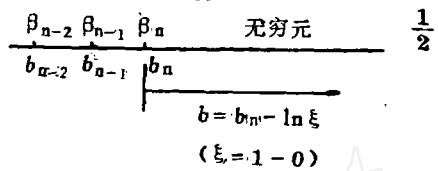


图4 下游无穷单元

(2) 下游无穷元. 即上、下两边界上的最后一个单元. 以下边界为例, 其单元形式和单元局部坐标参数的选取如图4示. 该单元插值函数的选取与确定方法与近壁元的相同. 即式(3)在该单元内仍成立 (但 $b = b_n - \ln\xi$), 条件 $\frac{d\beta}{db} \Big|_{b \rightarrow +\infty} = 0$ 自然满足; 注意到 $\xi = 1, 0$ 时 β 值分别为 $\beta_n,$

$\frac{1}{2}$ 以及在单元分界处变化率连续条件 $\frac{d\beta}{db} \Big|_{b=b_n^+} = \frac{d\beta}{db} \Big|_{b=b_n^-}$, 可推得

$$\beta = \frac{1}{2} - \Delta\beta_n(2 + B_n)\xi^{1+\epsilon} - \Delta\beta_n(1 + B_n)\xi^2 \tag{7}$$

其中

$$\Delta\beta_n = \frac{1}{2} - \beta_n$$

$$B_n = \frac{1}{\Delta\beta_n}(-0.5\beta_{n-2} + 2\beta_{n-1} - 1.5\beta_n)$$

同样, 在上边界无穷元内应有

$$\beta = \frac{1}{2} - \Delta\beta_{ns}(2 + B_{ns})\xi^{1+\epsilon} - \Delta\beta_{ns}(1 + B_{ns})\xi^2 \tag{8}$$

式(8)中各符号含义可由式(7)类推.

2 离散方程

在变换平面 ζ 上进行了上述离散及单元插值函数选定后, 其物理泄流平面自由边界也应对应地视为由一个个连续的单元组成, 两平面单元间应满足变换关系式(1). 为了简化计算, 取 ζ 平面

条带宽 $h = \pi$, 并将 $b = \begin{cases} \tau_x + i\pi & \text{上边界} \\ \tau_x & \text{下边界} \end{cases}$, $\tau_j = \begin{cases} \tau_{\omega_j} + i\pi & \text{上边界} \\ \tau_{\omega_j} & \text{下边界} \end{cases}$ 代入到式(1), 则对任一点 τ_j 有

$$\frac{dZ}{d\tau} \Big|_j = \frac{1+P}{\pi} E_j e^{-i\theta_j \pi} \tag{9}$$

这里

$$E_j = \exp \left[-\alpha \ln \left| 1 \mp e^{-(\tau_{ab} - \tau_{aj})} \right| + \int_{-\alpha}^{\frac{1}{2}} \ln \left| 1 \mp e^{-(\tau_{\sigma} - \tau_{aj})} \right| d\beta - \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \left| 1 \pm e^{-(\tau_{\sigma} - \tau_{aj})} \right| d\beta \right] \quad (10)$$

式中“ \mp ”(或“ \pm ”)号取值定义为： τ 与 b 共线，取“-”号(或“+”号)； τ 与 b 异线，则取“+”号(或“-”号)。例如， τ_{aj} 在下边界上取值时，式(10)指数式中对应于下边界的前两项的“ \mp ”号应取“-”号，而对应于上边界的最后一项应取“+”号。

在图2所示区域离散下，式(10)中积分项可做下述离散计算

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\frac{1}{2}} \ln \left| 1 \mp e^{-(\tau_{\sigma} - \tau_{aj})} \right| d\beta &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} \ln \left| 1 \mp e^{-(\tau_{\sigma} - \tau_{aj})} \right| d\beta \\ &+ \int_{\beta_n}^{\frac{1}{2}} \ln \left| 1 \mp e^{-(\tau_{\sigma} - \tau_{aj})} \right| d\beta = \sum_{i=1}^n L_{i,j} \Delta\beta_i \end{aligned} \quad (11)$$

同样，

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln \left| 1 \pm e^{-(\tau_{\sigma} - \tau_{aj})} \right| d\beta = \sum_{i=n+1}^{ns} L_{i,j} \Delta\beta_i + L'_{n+1,j} \beta_{n+1} \quad (12)$$

这里

$$L_{i,j} = \frac{1}{\Delta\beta_i} \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} \ln \left| 1 \mp e^{-(\tau_{\sigma} - \tau_{aj})} \right| d\beta \quad \text{或} \quad \frac{1}{\Delta\beta_i} \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} \ln \left| 1 \pm e^{-(\tau_{\sigma} - \tau_{aj})} \right| d\beta \quad (13)$$

$$L'_{n+1,j} = \frac{1}{\beta_{n+1}} \int_0^{\beta_{n+1}} \ln \left| 1 \pm e^{-(\tau_{\sigma} - \tau_{aj})} \right| d\beta \quad (14)$$

对式(11)、(12)进一步做分解，有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n L_{i,j} \Delta\beta_i &= \sum_{i=1}^n L_{i,j} \beta_{i+1} - \sum_{i=1}^n L_{i,j} \beta_i \\ &= -L_{1,j} \beta_1 + \sum_{i=2}^n (L_{i-1,j} - L_{i,j}) \beta_i + \frac{1}{2} L_{n,j} \end{aligned} \quad (15)$$

同样，

$$\sum_{i=n+1}^{ns} L_{i,j} \Delta\beta_i = -L_{n+1,j} \beta_{n+1} + \sum_{i=n+2}^{ns} (L_{i-1,j} - L_{i,j}) \beta_i - \frac{1}{2} L_{ns,j} \quad (16)$$

将式(15)、(16)代入(11)、(12)式，进而代回式(10)，可得

$$E_j = \exp \left[-\alpha \ln \left| 1 \mp e^{-(\tau_{ab} - \tau_{aj})} \right| + \sum_{i=1}^n K_{i,j} \beta_i - \sum_{i=n+1}^{ns} K_{i,j} \beta_i + \frac{1}{2} K_F \right] \quad (17)$$

其中

$$K_{1,j} = -L_{1,j} \quad (18a)$$

$$K_{n+1,j} = L'_{n+1,j} - L_{n+1,j} \quad (18b)$$

$$K_{i,j} = L_{i-1,j} - L_{i,j} \quad \begin{matrix} i=2, 3, \dots, n, n+2, n+3, \dots, ns \\ j=1, 2, \dots, ns \end{matrix} \quad (18c)$$

$$K_F = L_n - L_{ns} \quad (18d)$$

注意到利用不同单元插值函数式(2)、(4)、(6)、(7)、(8),式(13)、(14)可进一步转化为下述计算表达式

$$\begin{aligned} L_{i,j} &= \int_0^1 \ln |1 \mp S_{i,j} e^{-\epsilon \Delta \tau_{ab}}| d\xi, \quad i=2, 3, \dots, n-1 \\ L_{i,j} &= \int_0^1 \ln |1 \pm S_{i,j} e^{-\epsilon \Delta \tau_{ab}}| d\xi, \quad i=n+2, n+3, \dots, ns-1 \\ L_{1,j} &= \int_0^1 \ln |1 \mp S_{1,j} e^{-\epsilon \Delta \tau_{ab}}| [(2-B_1) - 2(1-B_1)\xi] d\xi \\ L_{n,j} &= \int_0^1 \ln |1 \mp S_{n,j} \xi| [(2+B_n) - 2(1+B_n)\xi] d\xi \\ L_{ns,j} &= \int_0^1 \ln |1 \pm S_{ns,j} \xi| [(2+B_{ns}) - 2(1+B_{ns})\xi] d\xi \\ L'_{n,j} &= 2 \int_0^1 \ln |1 \pm S_{n+1,j} \xi| \xi d\xi \end{aligned}$$

这里

$$S_{i,j} = e^{-(\tau_{ab} - \tau_{xi})}, \quad j=1, 2, \dots, ns$$

显然,上述 $L_{i,j}$ 等积分表达式均具有奇异性,欲顺利实现数值计算,需进行特殊处理。

3 自由面位置求解方法

3.1 τ_{ab} 的迭代计算

待定参数 τ_{ab} 的求解和以往应用 $S-C$ 变换时确定待定常数的方法相同,即 τ_{ab} 应根据物理平面上堰的几何形状迭代计算。如图 1(a)所示,薄壁堰 BC 平直,其倾角为常数,将 $\beta = -\alpha$ 代入到式(9)可得

$$\left. \frac{dZ}{d\tau} \right|_j = \frac{1+P}{\pi} E_j e^{\alpha x} \quad (19)$$

在 $(\tau_{ab}, 0)$ 内对式(19)积分,并取其虚部,可得对应于任一 τ_{ab} 的堰高为

$$P_{\#} = -\frac{1+P}{\pi} \sin(\alpha\pi) \int_0^{\tau_{ab}} E d\tau \quad (20)$$

为了计算方便,令 $\tau = \xi \tau_{ab}$, 则 $d\tau = \tau_{ab} d\xi$, 代入式(20)有

$$P_{\#} = -\frac{1+P}{\pi} \tau_{ab} \sin(\alpha\pi) \int_0^1 E_f dx \quad (21)$$

$$\text{其中 } E_f = \exp \left[-\alpha \ln |1 - e^{(1-\xi)\tau_{ab}}| + \sum_{i=1}^n K_{i,x} \beta_i - \sum_{i=n+1}^{ns} K_{i,x} \beta_i + \frac{1}{2} K_F \right] \quad (22)$$

从式(22)可看出,式(21)积分式在 $\xi=1$ 处出现奇点,其奇异积分的计算可采用积分主值取代该点的积分值的方法^[2]进行。

应该注意,上述计算只能保证所得堰的倾角与实际一致,由于 τ_{ab} 为任意给定,故并不能保证 $P_{\#}$ 与实际堰高相同。 τ_{ab} 可采用下述线性关系式迭代确定

$$\tau_{ab}^{(k+1)} = \frac{P}{P_{\#}} \tau_{ab}^{(k)} \quad (23)$$

3.2 δy_A 的计算

δy_A 表示上边界第一个有限结点与上游无穷远点对应的自由水面高度差,它的计算实质上为

上游无穷元内的奇异积分问题。由式(9)推得

$$\delta y_A = \frac{1+P}{\pi} \int_{-\infty}^{\tau_{A_2}} E \sin(-\beta\pi) d\tau \quad (24)$$

做变量替换(参阅图3) $\tau = \tau_{A_2} + \ln \xi$, 则 $d\tau = \frac{1}{\xi} d\xi$; 再者, 该单元内 β 满足式(6), 即 $\beta = \beta_{n+1} \xi^2$, 一般 β_{n+1} 很小, 可取 $\sin(\beta\pi) = \pi\beta_{n+1} \xi^2$ 。这样, 式(24)可变为

$$\delta y_A = -(1+P)\beta_{n+1} \int_0^1 E_f \xi d\xi \quad (25)$$

式(25)即可按一般的数值求积方法进行计算。

3.3 δx_F 、 δy_F 的计算

δx_F 、 δy_F 表示两自由水面下游最后的有限结点 F_2 、 F_1 (如图1示) 两点坐标差, 其计算方法与 δy_A 的类同, 但其为两无穷奇异积分之差。据式(9), 并注意利用图4中单元局部坐标参数关系式做变量替换, 经整理不难推得

$$\delta x_F = \frac{1+P}{\pi} \int_0^1 [E_{\uparrow f} \cos(\beta_{\uparrow} \pi) - E_{\downarrow f} \cos(\beta_{\downarrow} \pi)] \frac{1}{\xi} d\xi \quad (26a)$$

$$\delta y_F = \frac{1+P}{\pi} \int_0^1 [E_{\uparrow f} \sin(\beta_{\uparrow} \pi) - E_{\downarrow f} \sin(\beta_{\downarrow} \pi)] \frac{1}{\xi} d\xi \quad (26b)$$

这里下标“上”或“下”分别表示对应于上边界或下边界之值。式(26)的计算可采分段数值求积的方法进行, 本文不再详述。

3.4 自由边界结点坐标的计算

据式(9), 在任一 j 单元内对其求积有

$$\Delta Z_j = \frac{1+P}{\pi} \int_{\tau_{a_j}}^{\tau_{a_{j+1}}} E e^{-i\beta\pi} d\tau \quad j=1, 2, \dots, n-1, n+1, n+2, \dots, ns-1$$

对上式应用梯形求积公式, 并分取其实、虚部可得

$$\Delta x_j = \frac{\Delta \tau_j}{2} \cdot \frac{1+P}{\pi} [E_j \cos(\beta_j \pi) + E_{j+1} \cos(\beta_{j+1} \pi)] \quad (27a)$$

$$\Delta y_j = -\frac{\Delta \tau_j}{2} \cdot \frac{1+P}{\pi} [E_j \sin(\beta_j \pi) + E_{j+1} \sin(\beta_{j+1} \pi)] \quad (27b)$$

式中 $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ 。

根据②、⑦两平面间的对应关系, 可由式(27)逐点推求各结点的坐标值。

(a) 下自由面。自上游至下游逐点推求

$$x_1 = y_1 = 0 \quad (28a)$$

$$x_{j+1} = x_j + \Delta x_j \quad (28b)$$

$$y_{j+1} = y_j + \Delta y_j, \quad j=1, 2, \dots, n-1 \quad (28c)$$

(b) 上自由面。纵坐标 y_j 的计算仍采用自上游至下游逐点求解的方法进行

$$y_{n+1} = 1 + \delta y_A \quad (29a)$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad j=n+1, n+2, \dots, ns-1 \quad (29b)$$

横坐标 x_i 的计算则依据下自由面位置, 自下游至上游逐点推求

$$x_{ns} = x_n + \delta x_F \quad (30a)$$

$$x_j = x_{j+1} - \Delta x_j \quad j=ns-1, ns-2, \dots, n+1 \quad (30b)$$

从以上论述可知, 在⑦平面自由面对应边界上共计划分了 ns 个有限结点(不包括无穷远点),

但 $\beta_1 = -\alpha$ 为已知量(且 $Z_1 = 0$), 故只有 $ns-1$ 个 β 值需求解确定; 另外再加上未知量 τ_{ab} , 共计有 ns 个直接迭代参数。在建立数学模型过程中, 利用了上游无穷远点与堰顶顶点的能量守恒关系, 导出了计算 $V_{-\infty}$ 的关系式(1d), 不难看出 $V_{-\infty}$ 是一依赖于上述 ns 个参数的变量。根据边界条件式(1b), 除第一结点外, 其它任一结点在泄流平面的对应点均应满足伯努力非线性条件,

$$\text{即} \quad v_i^2 + y_i = \text{const}, \quad i = 2, 3, \dots, ns \quad (31)$$

由此可得 $ns-1$ 个方程, 另外还有确定 τ_{ab} 的式(23), 共有 ns 个方程, 恰好构成了一封闭的非线性方程组, 可以迭代求解。

4 计算过程

应用本文方法, 计算过程可归结如下:

(1) 给定初值 $\beta_i^0 (i=2, 3, \dots, ns)$, τ_{ab}^0 。显然, 在上边界, β_i 变化区间为 $[0, \frac{1}{2}]$, 下边界为 $[-\alpha, \frac{1}{2}]$ 。

(2) 据式(18), 计算 $K_{i,j}$ 和 K_F 。

(3) 据式(21)和式(23), 迭代求解在给定 β_i^0 下的 τ_{ab} 新值 τ_{ab}^1 。

(4) 应用式(17)计算 E_j 值, 并由式(1d)、式(1c)分别计算 $V_{-\infty}$ 和 V_j 。

(5) 据式(25)、式(26)计算 δy_A , δx_F , 进而应用式(27)~(30)求解自由面结点坐标值 x_i, y_i 。

(6) 据自由面应满足的边界条件式(31), 迭代求解 β_j 新值 β_j^1 。本文采用了最速下降法^[3]。

(7) 返至 3 重复计算, 直至收敛。

(8) 计算过堰流量 $Q = V_{-\infty}(1+P)$ 。

5 计算实例

为了验证作者所建立的数学模型^[1]及本文数值离散方法的合理性和可靠性, 本文对 $P=1$, $\alpha=1/4$ 情况下的薄壁堰泄流流动进行了实际计算, 得到了如下结果。

5.1 自由面位置

图 5 给出了计算所得自由面位置及其与实测值^[4]的比较, 可见两者吻合很好。对于本流动问题, 下自由面顶点 a_0 位置是一个很重要的控制参数, 本文对其计算结果与实验结果也非常接近: $(x_{a_0}, y_{a_0})_{\text{计}} = (0.215, 0.041)$, $(x_{a_0}, y_{a_0})_{\text{实}} = (0.221, 0.042)$ ^[4] 其相对误差为 (2.7%, 2.4%); 完全可以满足工程精度要求。

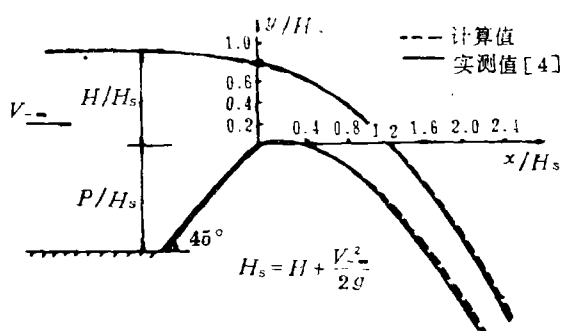


图 5 自由面位置计算结果

5.2 过堰流量

对于该算例, 计算所得 $V_{-\infty} = 0.250$, 因此其过堰流量 $Q_{\#} = V_{-\infty}(1+P) = 0.500$ 。前人亦分析和统计出了一些比较成熟的并被广泛应用的半经验半理论流量计算公式, 如对于倾斜薄壁堰流动, 可由 ВИИТ 公式加倾斜修正来计算^[6], 无量纲化后其表达式为

$$Q = K \left(0.402 + 0.054 \frac{1}{P} \right) \quad (32)$$

(适用条件: $H \geq 0.1\text{m}$, $P \geq \frac{1}{2}$)

这里, K ——倾斜修正系数, $\alpha = \frac{1}{4}$ 时, $K = 1.112$ 。将 $P = 1$ 代入式(31), 可得 $Q = 0.507$ 。故 $(Q - Q_{\#})/Q = 1.2\%$, 计算值与分析值相差甚小。

6 讨论与结论

本文通过离散分析和实际计算, 初步得出如下几点结论:

(1) 作者在文献[1]中所建立的薄壁堰双自由面重力流的数学模型是合理的, 本文提供的数值计算方法是有效、可行的, 计算结果亦可靠。

(2) 本方法仅在边界上数值离散和求解, 具有边界元法内存小、速度快等优点; 但与边界元法相比, 本方法对外部边界条件要求较低。边界元法(其它有限区域解法也一样)要求在自由面上同时满足 $\psi = \text{const}_1$, $P = P_0 = \text{const}_2$ 两个边界条件, 而本方法, $\psi = \text{const}$ 条件自动满足; 再者, 本方法通过建立无穷元, 将有限区域与无穷远点有效的联系起来, 使求解更为精确, 区域划分更为灵活。

(3) 应用本方法可避免自由边界上缓-急流过渡区的存在给求解带来的特殊困难。用边界元法求解重力坝溢流问题时曾发现, 在坝顶附近存在一个从缓-急流过渡的所谓“不确定区域”, 该区结点位移对其能量变化反应迟钝, 从而使求解困难^[6]。本方法在变换平面上求解, 并采用角度为迭代参数, 间接调整自由面结点坐标, 计算中未发现上述“不确定区域”。

(4) 本方法可直接计算出流量值, 而一些方法则必须根据所得自由面光滑程度人为判别其流量大小^[7]。

参 考 文 献

- 1 杨志峰, 陈国谦. 双自由面重力流的数值保角变换方法(I)数学模型, 水动力学研究与进展, A辑, 1992; 7(1):59—65.
- 2 Davis R T. Numerical Method for Coordinate Generation Based on a Mapping Technique, in: Computational Method for Turbulent, Transonic, and Viscous Flows, edited by Essers J A. Hemisphere Publishing Corporation, 1983; 1—44.
- 3 冯 康. 数值计算方法, 北京: 国防工业出版社, 1978.
- 4 Boulder Canyon Project Final Reports, Part VI-Hydraulic Investigations, Bulletin 3, Studies of Crests for Overfall Dams. Denver, Colorado, 1948.
- 5 陈肇和. 溢流堰水力计算, 水力计算丛书(I), 1983; 5—11.
- 6 Cheng A HD et al. Boundary Calculation of Sluice and Spillway Flows. ASME, J. of Hydr. Div., 1981; 107, (HY10):1163—1178.
- 7 胡惠良, 过溢流坝的流量和流场的有限元计算. 水利水电科学研究院科学研究论文集, 第13集, 北京: 水利电力出版社, 1983.

The Numerical Method of Conformal Mappings for the Gravity Flow Involving Double-Free Surfaces (II) Numerical Method

Yang Zhi-feng

Chen Guo-qian

(Peking University, Beijing 100871) . (Academia Sinica, Beijing 100080)

Abstract Based on the mathematical model presented by the authors in Ref. [1], a numerical method is developed in this paper, including the design of different interpolating functions and numerical treatment of boundary singular integrations. A practical flow over a sharp-crested weir with sloping angle 45° is numerically simulated by using the present method. The predicted positions of upper and lower free surfaces and discharge rate are quite consistent with the experimental and analytic data respectively.

Key words computational hydraulics, moving boundary, potential flow, conformal transformation, numerical method.