

# 双自由面重力流的数值保角变换方法 (I) 数学模型

杨志峰

(北京大学力学系, 北京 100871)

陈国谦

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘 要** 本文导出了泄流平面与带状域平面的边界微分-积分方程, 进而建立了薄壁堰双自由面重力流的一种数学模型, 提出了应用该模型的两种求解方式和一些有益建议。

**关键词** 水力学, 动边界, 重力势流, 保角变换, 数学模型。

## 1 引 言

具有自由表面的重力流动是水利水电工程中主要流动形态之一, 坝顶溢流、闸孔出流、重力自由射流等都可归结为对这类问题的求解, 其特点为:

- (1) 必须考虑重力作用, 使势流理论求解更为困难;
- (2) 自由表面边界解前未知, 为待定可动边界, 且必须满足伯努里非线性条件。

国内外许多计算流体工作者都计算过自由面重力势流问题, 大多都是采用有限单元法求解只含有单一自由表面的重力坝溢流流动, 并以直接“试探”的方式调整自由表面位置使其逐渐满足于伯努里非线性条件<sup>[1]-[8]</sup>。有一些工作研究了挑射水流问题<sup>[10][12]</sup>。

薄壁堰是水利工程中三种主要堰型之一, 对其过顶溢流的研究不仅有其自身的理论价值, 而且也可作为重力坝坝型的优化设计提供理论、参考依据。薄壁堰泄流问题有其自身的流动特点, 由于重力的作用, 水流过堰后明显弯曲、形成一水舌泄向下游, 如图 1 所示。水舌上、下两自由表面接近平行, 其间无任何固壁相接, 自由面多, 自由度大。对于这样一种较为复杂的流动, 如果仍采用上述已有方法, 自由表面位置同样应用直接“试探”调整其结点坐标的方法求解, 必然会使在求解单自由面流动就遇有一定困难的方法更为困难。Han 和 Chow<sup>[8]</sup>曾应用速度图法计算了薄壁堰流动, 但这种方法在速矢平面上需确定速度、角度及其一、二阶导数的边界条件和全区域离散求解。

保角变换方法一直是求解势流流动的有力工具, 其特点是仅在边界上求解, 无需外部边界条件。Smith 和 Lim<sup>[9]</sup>应用这种方法求解了表面波, 温贤云和吴持恭<sup>[10]</sup>计算了闸孔出流及溢流堰流动, 两者都是通过某种变换将求解域变换到上半平面, 再根据 Riemann-Hilbert

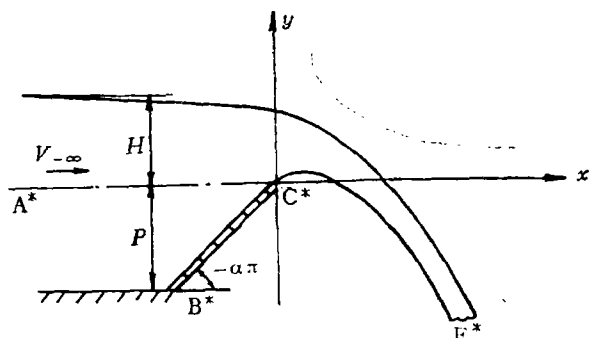


图 1 薄壁堰泄流流动

本文于 1991 年 1 月 29 日收到。

边值问题推导出相应的积分关系式。Smith 和 Lim 在变换平面上求解, 而温 和 吴 则 转 换 回 物 理 平 面 上 求 解。上述方法有一共同点, 即均在有限域内离散求解, 这样必然对来、出流边界位置要求较高。本文为了使变换平面物理意义较明确和便于计算, 基于许瓦兹-克利斯托夫(S-C)和无限条带两基本变换, 将求解变换到带状平面, 两自由边界对应于两平行直线。为了便于在计算机上数值实现和节省计算量, 本文重新定义了边界角度取值方式和对变换式进行了实虚分解。作者在所导出的两平面边界微分-积分方程的基础上, 建立了薄壁堰泄流流动的一种数学模型。该模型可直接应用于无限区域, 且只需在边界上求解。最后, 作者设计了应用本模型的两种求解方式, 并对其进行了分析和比较。

## 2 边界微分-积分方程

本文从大家熟悉的, 可将多边形区域②映射到上半平面③的 S-C 变换<sup>[1]</sup>入手, 其表达式为:

$$\frac{dZ}{d\zeta} = f(\zeta) = M \prod_{i=1}^n (\zeta - a_i)^{\alpha_i} \quad (1)$$

其中  $M$  为待定复常数,  $n$  是多边形的内角数,  $a_i$  表示③平面实轴上的待定实常数,  $\pi\alpha_i$  则定义为多边形的补角(下文所涉及角度提法, 均指其相对值, 即  $\alpha_i$ ), 顺时针取正。

对于图 1 所示求解区域, 由于其边界  $\Gamma$  由直、曲线复合而成, 因此不能直接应用(1)式。本文首先改变(1)式形式如下:

$$\frac{dZ}{d\zeta} = M \exp \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln(\zeta - a_i) \right] \quad (2)$$

设想将任意形状边界划分为大量的直线段单元, 则与(2)式中  $\alpha_i$  相对应的实际上就是两直线段的角度差相对值, 如图 2(a)所示, 不妨表示为  $\Delta\beta_i$ 。应用(2)式, 则有

$$\frac{dZ}{d\zeta} = M \exp \left[ \sum_{i=1}^n \ln(\zeta - a_i) \Delta\beta_i \right] \quad (3)$$

对(3)式取极限  $\Delta\zeta \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 可得

$$\frac{dZ}{d\zeta} = M \exp \left[ \oint_{\Gamma} \ln(\zeta - a) d\beta \right] \quad (4)$$

显然, (4)式为(1)式或(2)式的一种推广形式, 是可将由任意形状边界包围的区域映射到上半平面的 S-C 变换, 而变换(1)式或(2)式仅是该式的一种特例。例如, 假设在  $B$  点存在一角点, 则  $\beta$  在该处为一阶梯函数, 在  $B$  处对  $\ln(\zeta - a)$  积分得:

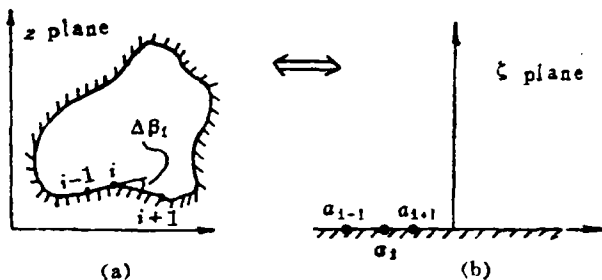


图 2 连续曲线的变换

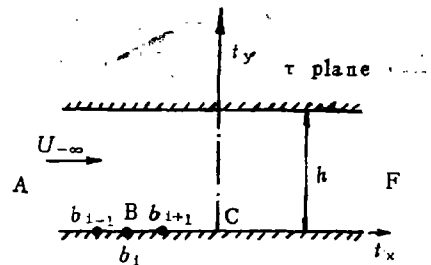


图 3 无限条带变换平面

$$\int_{\alpha_b^-}^{\alpha_b^+} \ln(\zeta - a) d\beta = \alpha_b \ln(\zeta - a_b) \quad (5)$$

这里  $\alpha_b$  为  $\beta$  在  $\alpha = \alpha_b$  处的步长, 即  $\alpha_b = \beta_b^+ - \beta_b^-$ 。  $\beta$  是依赖于区域边界几何形状 的变量, 如果整个边界均由直线组成, 则除了在两直线交点处  $\beta$  为一阶梯函数外,  $d\beta = 0$ 。根据(5)式, 此时, (4)式即可简化为(2)式。

本文所研究的泄流问题具有上、下两自由边界, 且为无限区域。为了使变换平面物理意义更为明确, 我们再引入无限条带区域变换:

$$\zeta = -e^{-\frac{\pi}{h}\tau} \quad (6)$$

这里  $h$  为条带的宽度。式(6)保角地将如图 3 所示带状平面①映射到如图 2(b)所示形式的上半平面②。根据式(4)、式(6), ①平面到如图 2(a)所示③平面的保角变换关系应为:

$$\frac{dZ}{d\tau} = f(\tau) = \frac{dZ}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\tau} = M \cdot \frac{\pi}{h} e^{-\frac{\pi}{h}\tau} \cdot \exp\left[\int_r \ln(-e^{-\frac{\pi}{h}\tau} + e^{-\frac{\pi}{h}b}) d\beta\right] \quad (7)$$

式中  $b$  为①平面上、下两平行边界上的连续实变量。我们可以应用式(7)建立条带区域和任意形状边界包围区域的一一对应关系。为了便于数学处理及以后的数值计算, 本文改变 S-C 变换中对角度的传统取值方式, 给出如下定义。

定义: 任意形状边界某点的角度  $\beta$ , 是指该点切线与水平线所构成的锐角, 顺时针取正, 反之为负。

在上述对角度的定义下, 将式(7)应用于图 1 所示泄流物理平面, 得(详细推导见附录):

$$\frac{dZ}{d\tau} = M \cdot \frac{\pi}{h} E e^{-i\beta\pi} \quad (8)$$

其中,

$$E = \exp\left[-\alpha \ln\left|1 - e^{-\frac{\pi}{h}(\tau_{ab}-\tau)}\right| + \int_{-\alpha}^{\frac{1}{2}} \ln\left|1 - e^{-\frac{\pi}{h}(b-\tau)}\right| d\beta^1 - \int_0^{1/2} \ln\left|1 - e^{-\frac{\pi}{h}(b-\tau)}\right| d\beta^2\right] \quad (8a)$$

这里  $\alpha$  为薄壁堰倾斜角度值,  $\tau_{ab}$  是泄流平面  $B$  点在①平面上的对应点,  $\beta^1$ 、 $\beta^2$  分别为下、上自由面上的角度。(8)式可认为是①平面与泄流平面的变换关系式, 该式将泄流平面映射到带状区域, 堰顶对应于①平面坐标原点, 无穷远点与无穷远点相互对应, 并且(8)式把泄流平面边界变换为①平面两平行直线, 两平面上的流动非常相似。(8)式实质上是两映射区域边界上的微分-积分方程, 是本文建立数学模型的基础。

### 3 数学模型的建立

对图 1 所示倾斜薄壁堰泄流问题, 其基于势流理论的数学提法可述如下:

$$W = F(Z) \quad Z \in D \quad (9a)$$

$$I_m(W) = \text{const. } 1 \quad Z \in \partial D - \partial D_{+\infty} \quad (9b)$$

$$\frac{dW}{dZ} = V_{-\infty} \quad Z \in \partial D_{-\infty} \quad (9c)$$

$$\frac{dW}{dZ} \cdot \frac{d\bar{W}}{d\bar{Z}} / 2g + I_m(Z) = \text{const. } 2 \quad Z \in \text{自由面} \quad (9d)$$

这里  $W$  表示复位势,  $F(Z)$  为一解析复函数,  $I_m(W)$  表示  $W$  的虚部,  $\bar{W}$  为  $W$  共轭复变量,  $V_{-\infty}$  是上游无穷远处均匀来流流速,  $\text{const.1}$ 、 $\text{const.2}$  为两实常数;  $D$  表示求解域,  $\partial D$  为其边界。

由于待求解问题区域边界的不规则性或不确定性, 在物理平面上直接寻求复位势  $F(Z)$  是不可能的。式(8)将其区域变换成  $\textcircled{\tau}$  平面上规则带状域, 无穷远处来流对应无穷远处来流 ( $V_{-\infty} \leftrightarrow u_{-\infty}$ ), 两平面上流动很类似。但带状域对无穷远处均匀来流问题的复位势是已知的, 可表示为:

$$W^*(\tau) = u_{-\infty} \tau \quad (10)$$

式中,  $u_{-\infty}$  就是  $\textcircled{\tau}$  平面上游无穷远处来流速度, 其流量应与物理平面来流流量相同。因此只要变换式(8)已知, 则复势  $W(Z)$  即可被确定, 这样就求解复位势  $W$  的问题转化为对(8)式的求解。不幸的是, 自由表面为曲线, 其位置事先未知, 即  $\beta$  分布未知或对任一预先给定自由面,  $b$  未知。因此变换式(8)无法由一已知解析式精确给出, 而必须和确定自由面位置等一同求解。

由式(8a),  $\tau$  (或  $Z$ )  $\rightarrow -\infty$  时,  $E$  表达式中指数趋于零, 或  $E \rightarrow 1$ 。因此, 通过式(8)和式(10)可得

$$V_{-\infty} = \frac{dW}{dZ} \Big|_{-\infty} = \frac{dW}{d\tau} \Big/ \frac{dZ}{d\tau} \Big|_{-\infty} = u_{-\infty} / \left( M \cdot \frac{\pi}{h} \right)$$

因此

$$M = \frac{h}{\pi} \frac{u_{-\infty}}{V_{-\infty}} \quad (11)$$

又  $\textcircled{\tau}$ 、 $\textcircled{Z}$  两平面来流流量应对应相等, 由此可得

$$\frac{u_{-\infty}}{V_{-\infty}} = \frac{H+P}{h} \quad (12)$$

这里  $P$  为堰高,  $H$  为来流堰顶水深, 如图1所示。将(11)、(12)两式代入到式(8), 得到

$$\frac{dZ}{d\tau} = \frac{H+P}{h} E e^{-i\theta\pi} \quad (13)$$

在上述角度定义下, 利用式(12)和式(13), 在自由水面边界上应有

$$V e^{i\theta\pi} = V_x - iV_y = \frac{dW}{dZ} = \frac{dW}{d\tau} \Big/ \frac{dZ}{d\tau} = V_{-\infty} e^{i\theta\pi} / E$$

解之,

$$V = V_{-\infty} / E \quad (14)$$

这里  $V$  为自由面上任一点流速,  $V_x$ ,  $V_y$  为其分量。式(14)给出了对  $V$  的数学描述, 是一个非常重要的关系式。

根据无穷远处  $A^*$  点和堰顶  $C^*$  点的能量守恒关系(伯努里方程), 注意到(14)式成立, 可推得确定  $V_{-\infty}$  的数学关系式

$$V_{-\infty} = \frac{E_c}{\sqrt{1-E_c^2}} \sqrt{2gH} \quad (15)$$

其中  $E_c$  表示堰顶  $C^*$  点在  $\textcircled{\tau}$  平面上对应点  $C$  (原点) 处之  $E$  值, 由式(8b)计算。

至此, 我们可将薄壁堰泄流问题的数学提法总结如下:

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\tau} &= \frac{H+P}{h} E e^{-i\theta\pi} & Z \in \partial D \\ \frac{V^2}{2g} + I_m(Z) &= \text{const.} & Z \in \text{自由面} \\ V &= V_{-\infty} / E & Z \in \text{自由面} \\ V_{-\infty} &= E_c / \sqrt{1-E_c^2} \end{aligned} \quad (16)$$

这就是本文所要建立的求解薄壁堰双自由面重力泄流流动的数学模型, 其中 $E$ 仍由式(8b)描述。由于①平面区域边界为两流线, 且该下、上两边界对应于泄流平面②上由渠底、堰壁及下自由面组成的边界和上自由面边界, 因此式(9)中出现的流线条件, 即式(9b):  $I_m(W) = \text{const. } 1, Z \in \partial D - \partial D_{\infty}$  在所建立的数学模型(16)式中自然满足。待定自由面位置一旦被确定,  $\beta$ 分布或 $b$ 值(对应于自由面各点)即可被求出, 内部场值则可由(10)式及变换关系(13)式解析确定。

#### 4 分析与讨论

本文从复变函数中两基本变换出发, 将薄壁堰泄流复杂区域变化到规则的带状域, 并将在泄流平面上求解复位势问题转化为两平面域边界上的微分-积分方程问题, 以此为基础, 建立了薄壁堰双自由面重力流的一种数学模型。确定自由边界位置和上述方程的求解必须同时进行, 增加了求解难度, 但自由边界的“任意、可动性”也可为这一问题增添求解方式。在下文作者提供的两种求解过程中可认识到这一点。

应用本文提出的数学模型, 有在物理平面上或在变换平面上两种求解方式:

(1) 在泄流物理平面上求解。这种方式求解思想和前人发展的有限单元法<sup>[1]-[6]</sup>等相同, 确定两平面边界上的一一对应关系也是基于传统保角变换方法; 即首先假设自由水面位置,  $\beta$ 亦已知, 据此迭代求解域边界各点对应于变换平面①上的 $b$ (包括 $\tau_{\infty}$ )值, 进而求解各对应点流速; 返回物理平面, 据伯努里非线性条件调整自由面位置; 重复上述计算, 直至收敛。

(2) 在变换平面上求解。由于物理平面②自由面是可动或待定的, 使得在变换平面①上求解成为可能。在该平面上求解, 可按一种②平面上自由边界对应于①平面上边界固定( $b$ 已知), ②平面上固壁角点 $B$ 在①平面上对应点可动( $\tau_{\infty}$ 待定)的“交错”方式进行, 其基本思想简述如下:

(a) ②平面上, 堰的高度及倾角均为已知量, 故堰底角点 $B$ 所对应的待定常数 $\tau_{\infty}$ 确定应按以往方法进行, 即依据堰壁几何形状( $P, \alpha$ )迭代调整求解。

(b) 对于②平面可动边界(自由面), 将其在①平面上对应的边界固定,  $b$ 亦已知(例如, 在该边界上等间距离散划分, 各结点 $b_i$ 固定), 通过假设 $\beta$ 分布, 确定边界上的微分-积分方程或一一对应关系, 由此计算自由面位置和相应的流速分布(对于给定的 $\beta$ ), 调整 $\beta$ 分布直至满足伯努里非线性条件。

上述两种求解方式的共同点在于均是通过自由面上满足伯努里非线性条件迭代求解; 不同之处在于前者比较直接明了, 但后者却具有更强的吸引力, 其表现在:

(1) 在变换平面上求解, 网格划分比较方便, ①平面区域边为两平行直线, 在其上划分网格显然比直接在②平面区域曲线边界上划分网格方便和精确;

(2) 便于初值给定。在①平面上求解, 通过调整 $\beta$ 间接地修正自由面位置, 而 $\beta$ 变化范围一定: 在上自由面,  $\beta = 0 \sim \frac{1}{2}$ ; 下自由面,  $\beta = -\alpha \sim \frac{1}{2}$ 。因此, 对 $\beta$ 迭代初值的假设比直接猜测自由面形状要方便、合理, 误差也应小些;

(3) 计算量较小。在变换平面上求解, 自由边界在这一平面对应边界上的 $b$ 分布已知, 这可避免在②平面上求解方式必须依据预先给定的自由面形状, 计算相对应 $b$ 的迭代过程, 而其余计算量基本相同。

鉴于上述原因, 作者建议采用第二种求解方式, 即应用该数学模型时, 优先考虑在变换平面上求解。

有关进一步分析,应用该模型数值离散和计算方法及数值验证等,作者将在本研究工作的第II部分——“数值方法”一文<sup>[13]</sup>中发表。

本文得到宋成浙教授的大力支持和指导,谨表谢意!

### 附录:式(8)的推导过程

据平面间点与点的对应关系,尤其是堰底拐点B(对应⊙平面 $\tau_{ob}$ )和下游无穷远点F(对应⊙平面 $+\infty$ 或上半平面原点)处有角度突变;上游无穷远点A在上半平面被指定为无穷远点,因此在S-C变换中包含该点的因子将不再出现,由式(7)

$$\frac{dZ}{d\tau} = M \cdot \frac{\pi}{h} e^{-\frac{\pi}{h}\tau} \exp \left[ -\alpha \ln(-e^{-\frac{\pi}{h}\tau} + e^{-\frac{\pi}{h}\tau_{ob}}) + \int_{-a}^{1/2} \ln(-e^{-\frac{\pi}{h}\tau} + e^{-\frac{\pi}{h}b}) d\beta^1 - \ln(-e^{-\frac{\pi}{h}\tau} + 0) - \int_0^{1/2} \ln(-e^{-\frac{\pi}{h}\tau} + e^{-\frac{\pi}{h}b}) d\beta^2 \right] \quad (a)$$

利用  $\ln(-e^{-\frac{\pi}{h}\tau}) = -\frac{\pi}{h}\tau + i\pi$ , (a)式为

$$\frac{dZ}{d\tau} = M \cdot \frac{\pi}{h} \exp \left[ -\alpha \ln(-e^{-\frac{\pi}{h}\tau} + e^{-\frac{\pi}{h}\tau_{ob}}) + \int_{-a}^{1/2} \ln(-e^{-\frac{\pi}{h}\tau} + e^{-\frac{\pi}{h}b}) d\beta^1 - \int_0^{1/2} \ln(-e^{-\frac{\pi}{h}\tau} + e^{-\frac{\pi}{h}b}) d\beta^2 \right] \quad (b)$$

据对数复函数性质:  $\ln Z = \ln|Z| + i\text{ARG}(Z)$ , 由式(b), 对下自由面边界任一点  $Z_j$  (⊙平面对应 $\tau_j$ ), 其角度为 $\beta_j$ , 应有下式存在

$$\begin{aligned} \left. \frac{dZ}{d\tau} \right|_j &= M \cdot \frac{\pi}{h} \cdot \exp \left[ -\alpha \ln|-e^{-\frac{\pi}{h}\tau_j} + e^{-\frac{\pi}{h}\tau_{ob}}| + \int_{-a}^{\beta_j} \ln|-e^{-\frac{\pi}{h}\tau_j} + e^{-\frac{\pi}{h}b}| d\beta^1 + \int_{\beta_j}^{1/2} (\ln|-e^{-\frac{\pi}{h}\tau_j} + e^{-\frac{\pi}{h}b}| + i\pi) d\beta^1 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{1/2} (\ln|-e^{-\frac{\pi}{h}\tau_j} + e^{-\frac{\pi}{h}b}| + i\pi) d\beta^2 \right] \\ &= M \cdot \frac{\pi}{h} \exp \left[ -\alpha \ln|-e^{-\frac{\pi}{h}\tau_j} + e^{-\frac{\pi}{h}\tau_{ob}}| + \int_{-a}^{1/2} \ln|-e^{-\frac{\pi}{h}\tau_j} + e^{-\frac{\pi}{h}b}| d\beta^1 - \int_0^{1/2} \ln|-e^{-\frac{\pi}{h}\tau_j} + e^{-\frac{\pi}{h}b}| d\beta^2 \right] \cdot e^{-i\beta_j\pi} \quad (c) \end{aligned}$$

将  $\ln|-e^{-\frac{\pi}{h}\tau_j} + e^{-\frac{\pi}{h}b}| = \ln|-e^{-\frac{\pi}{h}\tau_j}| + \ln|1 - e^{-\frac{\pi}{h}(b-\tau_j)}|$  代入(c)式得

$$\left. \frac{dZ}{d\tau} \right|_j = M \cdot \frac{\pi}{h} E_j e^{-i\beta_j\pi} \quad (d)$$

$$\begin{aligned} E_j &= \exp \left[ -\alpha \ln|1 - e^{-\frac{\pi}{h}(\tau_{ob} - \tau_j)}| + \int_{-a}^{1/2} \ln|1 - e^{-\frac{\pi}{h}(b - \tau_j)}| d\beta^1 - \int_0^{1/2} \ln|1 - e^{-\frac{\pi}{h}(b - \tau_j)}| d\beta^2 \right] \quad (d') \end{aligned}$$

因为  $Z_j$  在下自由面任意选取, 故在整个下自由面上有正文中式(8)成立。同样可推得, 式(8)在上自由面上依然成立。

## 参 考 文 献

- 1 许协庆. 自由面重力流的一种有限元解法. 水利学报, 1980; (1).
- 2 丁道扬. 一种数值解过坝水流方法. 力学学报, 1985; 17(4).
- 3 郑邦民. 溢流体形数值模拟. 中国科学, A辑, 1985; 3.
- 4 Ikegawa M, Washizu K. Finite Element Method applied to Analysis of Flow over a Spillway Crest. Int. J. Num. Meth. in Eng., 1973; (6):179-189.
- 5 Fine W D Lian, Varoglu Erol. Variational Formulation of Free Surface Gravity Flow Including Gated Flow using Adaptive Finite Elements, in: Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow, Edited by Taylor M. 1981; 165-190.
- 6 Li W et al. Finite Analytical Solution of the Flow over Spillways. J. of Engng. Mech., ASCE, 1989; 115(12).
- 7 Grank J. Free and Moving Boundary Problem. Oxford: Clarendon Press, 1984.
- 8 Han T Y, Chow W L. The Study of Sluice Gate and Sharp-crested Weir through Hodograph Transformation. J. of Appl. Mech., ASME, 1981; 48 (2): 229-238.
- 9 Smith A C, Lim T H. The Steady Water Wave: A Numerical Solution of using the Riemann-Hilbert Method. Inter. J. of Engng. Sci., 1980; 18 (1).
- 10 温贤云, 吴持恭. 自由面重力流的边界积分方程——反演法. 中国科学(A辑), 1987; (2):211-224.
- 11 Wood L C. The Theory of Subsonic Plane Flow. Cambridge at University Press, 1961.
- 12 许协庆, 张庄, 周雪漪. 厂房顶挑流的有限元计算. 水力发电学报, 1983; (1).
- 13 杨志峰, 陈国谦. 双自由面重力流的数值保角变换方法(II)数值方法. 水动力学研究与进展, 1992; 7(2).

## The Numerical Method of Conformal Mappings for the Gravity Flow Involving Double-free Surfaces (I) Mathematical Model

*Yang Zhi-feng*

(Peking University, Beijing 100871)

*Chen Guo-qian*

(Academia Sinica, Beijing 100080)

**Abstract** A nonlinear differential-integral equation is derived in this paper, which can map directly from the physical discharge plane to the infinite strip plane. Based on the equation, a mathematical model is presented for the double-free surfaces flow over sharp-crested weir which is strongly influenced by gravitation. Two numerical procedures are put forward and some useful suggestions are also given for using the model.

**Key words** hydraulics, moving boundary, potential flow, conformal transformation, mathematical model.