

求解三维欧拉流的隐 - 显式格式/ 及改进的三维 LU 算法*

王 保 国 卞 荫 贵

(中国科学院力学研究所, 北京, 100080)

摘 要 本文提出两种快速求解欧拉方程组的方法: 一种是将三维离散成多个二维问题求解的隐 - 显式格式即对每个二维问题采用高分辨率的 LU 隐式杂交格式求解, 而另一维采用显式扫描迭代; 另一种是将 Jameson 的 LU 算法作了改进, 使之变为耗散型格式。典型算例表明, 两种格式数值计算稳定, 收敛速度较快, 捕捉的激波分辨率较高。

关键词 高分辨率格式 LU 分解 三维流动

一、基本方程

积分形式的 N-S 方程组可表为:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \tilde{W} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \quad (1)$$

$$\vec{E} \equiv \begin{bmatrix} \rho \vec{V} \\ \rho \vec{V} \vec{V} - \Pi \\ e \vec{V} - \vec{V} \cdot \Pi - \lambda \nabla T \end{bmatrix} \quad \tilde{W} \equiv \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \vec{V} \\ e \end{bmatrix} \quad (1a)$$

这里 Π 为应力张量; ρ, e, \vec{V}, T 和 λ 分别为密度, 总内能, 速度, 温度和热传导系数。借助于张量分析, 则无粘流 (1) 式退化为如下微分形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \sqrt{g} \rho \\ \sqrt{g} \rho u \\ \sqrt{g} \rho v \\ \sqrt{g} \rho w \\ \sqrt{g} e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^j} \begin{bmatrix} \sqrt{g} \rho u^j \\ \sqrt{g} (\rho u u^j + g^{ij} \tilde{y}^{1j} p) \\ \sqrt{g} (\rho u u^j + g^{ij} \tilde{y}^{2j} p) \\ \sqrt{g} (\rho w u^j + g^{ij} \tilde{y}^{3j} p) \\ \sqrt{g} (e + p) u^j \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^j} S^j = 0 \quad (2)$$

$$S^j \equiv [0, 0, 0, 0, \lambda \sqrt{g} g^{ij} \partial T / \partial x^j]^T \quad (2a)$$

$$\tilde{y}^{ij} \equiv \partial y^i / \partial x^j \quad (2b)$$

其中 y^1, y^2, y^3 与 x^1, x^2, x^3 分别为直角与贴体曲线坐标系; u, v, w 分别为 \vec{V} 在直角坐标系下的分速度; u^j 为 \vec{V} 在 (x^1, x^2, x^3) 系下的逆变分速度; (2) 式又可简记为

$$\partial \mathbf{W} / \partial t + \partial \mathbf{F} / \partial x^1 + \partial \mathbf{G} / \partial x^2 + \partial \mathbf{H} / \partial x^3 - \partial \mathbf{S}^j / \partial x^j = 0 \quad (3)$$

式中 $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ 为无粘通量, 其相应通量的 Jacobian 阵分别为 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 。

二、隐 - 显式格式

为便于说明该算法的主要过程, 本节略去了 (3) 式中的最后一项, 并且以内流叶栅通道为例, 选取 x^3 沿叶高 (或翼展) 方向, 则类似于文献 [1] 中 (8) 式的推导其算子方程为:

$$LU \Delta \mathbf{W}^n = \mathbf{Q}^n \quad (4)$$

1991 年 12 月 29 日收到来稿。

* 国家自然科学基金及国家博士后基金资助项目。

$$L \equiv I + \alpha \Delta t (\delta_x^- A_1 + \delta_x^- B_1)^n \quad (4a)$$

$$U \equiv I + \alpha \Delta t (\delta_x^+ A_2 + \delta_x^+ B_2)^n \quad (4b)$$

$$Q^n \equiv -\Delta t (\delta_{x_1} F + \delta_{x_2} G + \delta_{x_3} H)^n \quad (4c)$$

$$\Delta W^n \equiv W^{n+1} - W^n \quad (4d)$$

虽然这里 A_1, A_2, B_1, B_2 在定义形式上与文献[1]相似, 但这里都是 5×5 的矩阵, 而文献[1]为 4×4 的。另外, 需着重说明式(4c)中 $\delta_{x_3} H$ 的处理, 其表达式为

$$\delta_{x_3} H = \begin{cases} (H_{i,j,k+1} - H_{i,j,k-1}^{n+1})/2 & \text{(由下往上推进)} \\ (H_{i,j,k+1} - H_{i,j,k-1}^{n+1})/2 & \text{(由上往下推进)} \end{cases} \quad (5)$$

这种来回扫描迭代, 有助于流场的收敛。对式(4c)中 $\delta_{x_1} F$ 与 $\delta_{x_2} G$ 项, 则只要将其中的 F 与 G 换成 Harten 的相应数值通量 \tilde{F} 与 \tilde{G} , 然后作差商。

三、改进的三维 LU 格式

当三个方向全隐式时, LU 格式为:

$$LU \Delta W^n = Q^n \quad (6)$$

$$L \equiv I + \alpha \Delta t (\delta_{x_1}^- A_1 + \delta_{x_2}^- B_1 + \delta_{x_3} C_1)^n \quad (6a)$$

$$U \equiv I + \alpha \Delta t (\delta_{x_1}^+ A_2 + \delta_{x_2}^+ B_2 + \delta_{x_3} C_2)^n \quad (6b)$$

$$Q^n \equiv -\Delta t (\delta_{x_1} F + \delta_{x_2} G + \delta_{x_3} H)^n \quad (6c)$$

本文通过对 Q 项的适当处理使格式变为耗散型。 Q 项由下式计算:

$$Q^n = -\Delta t (F_{i+1/2,j,k} - F_{i-1/2,j,k} + G_{i,j+1/2,k} - G_{i,j-1/2,k} + H_{i,j,k+1/2} - H_{i,j,k-1/2})^n \quad (7)$$

式中 $\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H}$ 为 Harten 数值通量, 其表达式形式上类似于文献[2]中的(5)式。

四、典型算例及主要结论

算例选取了有全场测量结果的直叶片通道; 叶片截面为 NACA-0018 叶型, 叶展 100mm, 弦长为 140mm, 进气攻角为零度。流场采用双焦点激光测速仪进行无接触测量, 详细测量及数据处理见文献[3] 的第 108 至 119 页。另外, 在下文中为便于叙述将第二节与第三节的格式分别称作格式 1 与格式 2;

首先用格式 1 计算了进口马赫数为 0.35 工况的三维流场。经 190 个时间步的扫描迭代, 流场收敛, 图 1

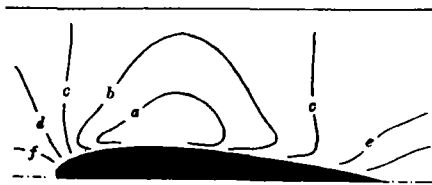


图 1 $M_1=0.35$ 时全场等马赫线

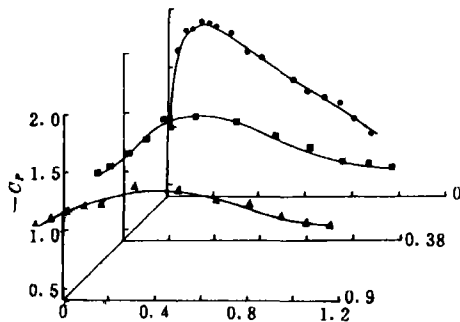
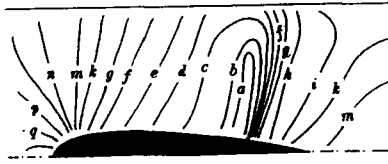
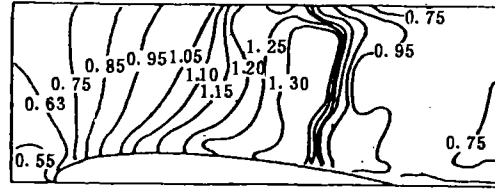


图 2 计算的压力系数与试验值比较

给出沿叶截面积全场等马赫线分布; 图 2 给出部分测点上压力系数与本文计算的比较 (图中实线为计算值), 看来两者比较接近。

用格式 2 计算了进口马赫数为 0.6 工况的三维流场, 计算网格为 H 型, 经 340 个时间步推进, 流场收敛, 图 3 和图 4 分别给出计算和测量的全场等马赫线, 看来两者形状大体相近。计算与测量的激波前最高马赫数分别为 1.37 和 1.35; 捕捉的槽道激波与测量相比略为偏向上游方向, 但激波形状两者还较相似; 用格式 1 计算本例, 需推进 400 个时间步。两个格式在计算中激波附近都没发现大的数值振荡现象。

图 3 $M_1=0.6$ 时全场等马赫线 (计算)图 4 $M_1=0.6$ 时全场测量结果

参 考 文 献

- [1] 王保国, 卞荫贵, 《中苏双边首届流体复杂运动学术讨论会文集》(英文), 1991 (北京).
 [2] 王保国, 卞荫贵, 计算流体力学的理论、方法和应用, 科学出版社, 1992 (北京), 39-42.
 [3] 王保国, 跨音速叶栅流动数值计算的新方法, 中科院博士学位论文, 1990 年 1 月.

AN EFFICIENT IMPLICIT - EXPLICIT SCHEME AND AN IMPROVED LU SCHEME FOR 3D EULER SOLVER

Wang Baoguo and Bian Yingui

Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080, China

ABSTRACT This paper presents two schemes for solving three-dimensional Euler equations. These schemes are: (1) an efficient implicit-explicit scheme. It is used to treat the spanwise derivatives explicitly and the other spatial derivatives implicitly. (2) an improved LU scheme for 3D flow. The two schemes are presented based on Jameson & Turkel's LU decompositions and Harten's TVD concept. Numerical results indicate that these schemes are efficient and can generate good shock resolution for solving steady-state problem.

KEY WORDS high resolution difference scheme, LU decomposition, 3D flow.