

三维湍流流动的涡量-向量势法数值模拟¹⁾

梁 栋 李 有 章

(北京科技大学)

卫 景 彬

(中国科学院力学研究所)

摘要 本文采用涡量-向量势法,结合常规的 $k-\varepsilon$ 双方程湍流模型,并运用重新推导的固体壁面涡量边值计算法,对扁平射流煤粉燃烧器内的冷态三维流场进行了数值模拟。计算结果与实验数据相吻合。本文工作证明,用涡量-向量势法求解三维湍流问题是可行的,该法具有不应忽视的优越性,值得进一步开发。

关键词 湍流流动,向量势,三维,计算流体力学

一、前 言

目前数值模拟三维流场时,原型变量法受到广泛应用。早在本世纪 60 年代即被提出的涡量-向量势法^[2]则未得到充分开发,在本文之前尚未见到用此法求解湍流问题的先例。据本文工作可见,该法有着不应忽视的优越性,其所具有的毋需压力和速度校正,易于收敛等优点在前人文献中早被述及^[2,3,7]。由于湍流流动的多样性和复杂性,这是一种很值得开发的计算方法,文献[1]推出了有化学反应湍流两相流气相流场的涡量输运方程,并对向量势和标量势重新作了定义,使运用涡量-向量势法求解相应复杂湍流问题成为可能。

前人运用涡量-向量势法计算层流曾试用诸如边界条件取定法、计算方法等^[2,4,5],用于复杂湍流计算则显得不合适,有必要对其作出改进或更新。本文推出了一种新的固体表面涡量边值计算法,并提出了确定向量势边界条件时所应满足的一些条件。

本文采用涡量-向量势法数值模拟了扁平射流煤粉燃烧器内冷态三维流场,计算结果与实验结果相符,证明了涡量-向量势法数值模拟三维湍流流动的可行性,并发现了该法的一些重要优点。

二、物理模型及计算区域

本文数值模拟的是扁平射流煤粉燃烧器内的冷态流场。这种燃烧器是中国科学院力学研究所的专利发明,对它的研究亦为尝试涡量-向量势法提供了一个很好的机会。该燃烧器示意图如图 1 所示。

本文于 1989 年 11 月 24 日收到,1990 年 5 月 4 日收到修改稿。

1) 国家自然科学基金会资助项目。

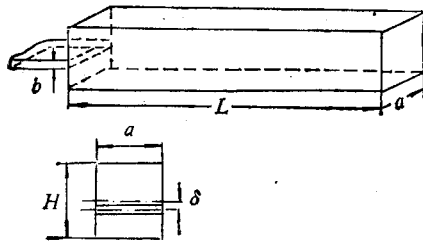


图1 扁平射流煤粉燃烧器示意图

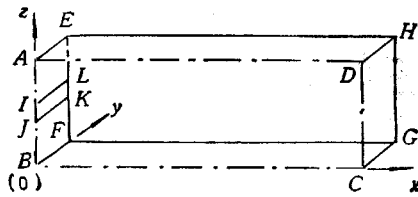


图2 计算区域及坐标系

由于其对称性,本文只计算其一半,计算区域如图2所示,图2中亦标出了区域边界上各点标号及计算所用直角坐标系。

三、控制偏微分方程组

1. 涡量输运方程

文献[1]对结合 $k-\varepsilon$ 双方程湍流模型的涡量输运方程作了重新推导,详细过程此处不再赘述。本文所求解的是无反应均质流,涡量输运方程写成分量式为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (G_x \omega_x) + \frac{\partial}{\partial y} (G_y \omega_x) + \frac{\partial}{\partial z} (G_z \omega_x) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{eff} \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \right) - \omega_x \frac{\partial G_x}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial G_x}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial G_x}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (G_x \omega_y) + \frac{\partial}{\partial y} (G_y \omega_y) + \frac{\partial}{\partial z} (G_z \omega_y) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{eff} \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) - \omega_x \frac{\partial G_y}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial G_y}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial G_y}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (G_x \omega_z) + \frac{\partial}{\partial y} (G_y \omega_z) + \frac{\partial}{\partial z} (G_z \omega_z) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{eff} \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) - \omega_x \frac{\partial G_z}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial G_z}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial G_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

其中, G_x 、 G_y 和 G_z 为质量速度的分量, ω_x 、 ω_y 和 ω_z 为涡量分量, μ_{eff} 为湍流有效粘度系数。

应说明的是,由于时均涡量输运方程的封闭问题尚待进一步研究,在方程(1)~(3)的得出过程中脉动涡量输运普朗特数^[4]全被取为1,亦即流场被假定是各向同性的。

2. 向量势方程

本文向量势 ϕ 按下式定义

$$\rho \mathbf{V} = \nabla \times \phi \quad (4)$$

其中, \mathbf{V} 为速度矢, ρ 为气体密度。

对于均质流体 ($\rho = \text{const}$), 可以规定

$$\nabla \cdot \phi = 0 \quad (5)$$

由方程(4)、(5)和涡量 Ω 定义式

$$\Omega = \nabla \times V \quad (6)$$

可得本文所用向量势方程为

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 \phi = -\Omega \quad (\rho = \text{const}) \quad (7)$$

方程(7)的分量式可写为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi_x}{\partial z} \right) = -\omega_x \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi_y}{\partial z} \right) = -\omega_y \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \right) = -\omega_z \quad (10)$$

3. 湍流模型

本文采用 k - ε 双方程湍流模型。湍动能 k 及其耗散率 ε 的方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (G_x k) + \frac{\partial}{\partial y} (G_y k) + \frac{\partial}{\partial z} (G_z k) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) - (P_k - \rho \varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (G_x \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial y} (G_y \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial z} (G_z \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) - \frac{\varepsilon}{k} (c_1 P_k - c_2 \rho \varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

其中, P_k 为湍动能产生率,

$$\begin{aligned} P_k = \mu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

取

$$\mu_t = c_\mu \rho k^2 / \varepsilon \quad (14)$$

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t \quad (15)$$

其中, μ 和 μ_t 分别为分子粘度系数和湍流涡旋粘度系数。

本文取 $c_\mu = 0.09$; $c_1 = 1.44$; $c_2 = 1.92$; $\sigma_k = 1.0$; $\sigma_\varepsilon = 1.30$ 。

4. 控制偏微分方程的通用形式

本文所用各控制偏微分方程,即方程(1)~(3)和方程(8)~(12)可用如下通式表示:

$$\begin{aligned} a_\phi \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\phi \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} - \frac{\partial \phi_y}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\phi \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\phi \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right] \right\} \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(b_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(b_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(b_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S_\phi = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

其中, ϕ 为通用变量符号,系(函)数 a_ϕ 、 b_ϕ 和 S_ϕ 请参看前列各方程,此处不再列出。

四、边界条件

1. 向量势边界条件

对于一般工程设备内的流动问题,向量势 ψ 的边界条件是不易确定的。前人为此作了不少努力^[2,3,4,7],但尚未找到一种理论上合理又适合于数值计算的通用性定法。笔者认为, ψ 边值取法并不唯一,不必寻求通用性取法,这么做反而增加涡量-向量势法的复杂程度。而应因问题制宜,只要所定 ψ 边界条件满足一定条件就行。在不引入标量势的情况下,取定的 ψ 边界条件必须同时满足如下四个条件:

- (1) ψ 边界条件必须按质量守恒定律定出。
- (2) 对固体壁面无渗透流的情形,以 t_1 和 t_2 表示壁面切向,应保证壁面上

$$\frac{\partial \psi_{t_1}}{\partial x_{t_2}} = \frac{\partial \psi_{t_2}}{\partial x_{t_1}} \quad (17)$$

- (3) 作出 $\nabla \cdot \psi = 0$ 的规定后,边界上这个条件也必须得到满足。
- (4) ψ 各分量值在各边界面上及边界面交界处必须连续。

据此,并作出进出口处气流分速 V_x 均匀分布, $V_y = V_z = 0$ 的假设,本文采用如表 1 所示的向量势边界条件。表中,各边界面标号如图 2 所示; $G_{x,in}$ 为进口气流平均 x 向质量分速; z 和 z_0 分别为进口内一点和进口底边 JK 的 z 向坐标。

不难证明,除出口截面处外,本文 ψ 边值满足前述四项条件,出口处的不足可能造成一定误差。

表 1 向量势边界条件

边界面	边界面的标号	ψ 的边界条件		
		ψ_x	ψ_y	ψ_z
进 口	IJKL	$\partial \psi_x / \partial x = 0$	$G_{x,in} \left[\frac{b}{2} - (z - z_0) \right]$	0
端 壁	AILE	$\partial \psi_x / \partial x = 0$	$-G_{x,in} \cdot b/2$	0
	BFKJ	$\partial \psi_x / \partial x = 0$	$G_{x,in} \cdot b/2$	0
侧 壁	EFGH	0	$\partial \psi_y / \partial y = 0$	0
底 壁	BCGF	0	$G_{x,in} \cdot b/2$	$\partial \psi_z / \partial z = 0$
顶 壁	ADHE	0	$-G_{x,in} \cdot b/2$	$\partial \psi_z / \partial z = 0$
对称面	ABCD	0	$\partial \psi_y / \partial y = 0$	0
出 口	DCGH	$\partial \psi_x / \partial x = 0$	$\partial \psi_y / \partial x = 0$	$\partial \psi_z / \partial x = 0$

2. 固体壁面上涡量边界条件

前人用涡量-势函数(包括向量势和标量势)法求解三维流动问题时,固体壁面处涡量

边界条件皆由速度分量直接定出^[2,4,5,7]。此法物理意义明确,但失之过于简单,精度不高。对于流型复杂且为湍流的流动,此法似必改进。

参考文献[6]解决二维问题的方法,三维下涡量在固体壁面上的边界条件重新进行了推导,并将结果用于本文。对涡量输运方程和向量势方程的分量式作积分,并用到底面无滑移及其它一些简化假设,最终可得固体壁面上,

$$\omega_n = 0 \quad (18)$$

$$\omega_{t_1,P} = -\frac{3(\phi_{t_1,N} - \phi_{t_1,P})}{\rho(\Delta n)^2} + \frac{3}{\rho \cdot \Delta n} \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x_{t_1}} \right)_P - \frac{\omega_{t_1,N}}{2} \quad (19)$$

其中, n 为壁面法向, t_1 为任一切向, N 和 P 分别表示近壁和壁上节点, Δn 为 N 点和 P 点的法向坐标差。

3. 其它边界条件

本文取

$$\text{进口处} \quad \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0 \quad (20)$$

$$k = 0.03 V_{t, in}^2 \quad (21)$$

$$\varepsilon = 0.50 k^{3/2} / b \quad (22)$$

$$\text{对称面上} \quad \omega_x = \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = \omega_z = \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0 \quad (23)$$

$$\text{出口截面上} \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = \frac{\partial \omega_y}{\partial x} = \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0 \quad (24)$$

近壁节点上的 k 和 ε 值用壁函数法求取。

按式(24)确定出口条件简单易行,并已得出较合理结果,但此法是不严格的,笔者正在探讨更优方法。

五、数值方法

本文采用有限差分法。涡量-向量势法不须采用交错网格,这也是其简便之处。本文采用控制容积法将微分方程离散化,差分方程系数由乘方差分格式确定,对源项作线性化处理。最终的离散化方程形式如下:

$$C_P \phi_P = C_E \phi_E + C_W \phi_W + C_N \phi_N + C_S \phi_S + C_F \phi_F + C_B \phi_B + D \quad (25)$$

计算采用逐点亚松弛迭代法。

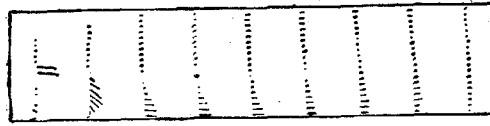
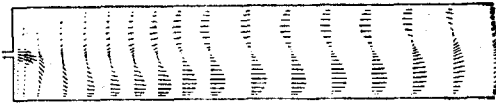
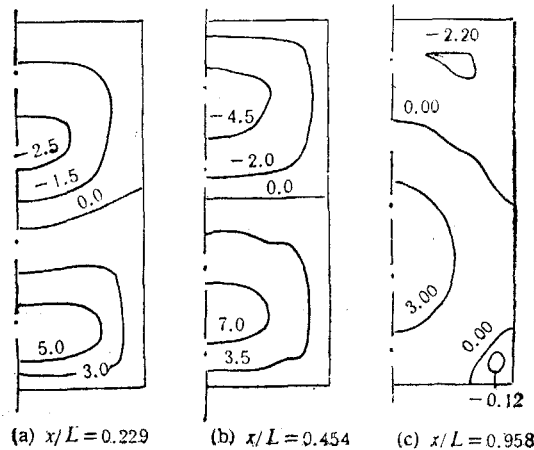
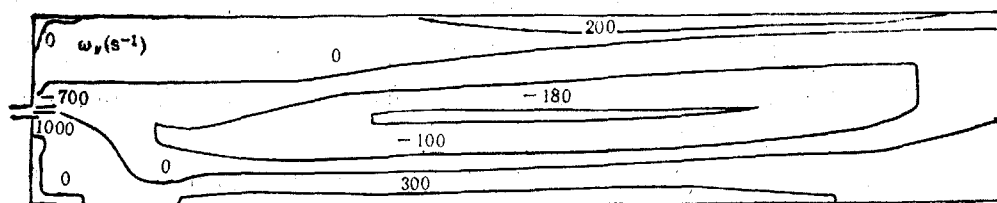
六、计算结果和讨论

用前述数学模型,数值模拟了四种工况下扁平射流煤粉燃烧器内冷态流场,在此只介绍其中之一的计算结果。参见图 1,该工况下燃烧器几何参数为: $\delta = 0$, $b = 10\text{mm}$, $L = 1000\text{mm}$, $a = 132\text{mm}$, $H = 196\text{mm}$ 。进口平均气流速度为 14m/s 。

计算采用非均匀网格,节点数为 $40 \times 10 \times 25$,占用计算机内存 458KB ,迭代 250 余次, CPU 时间在 M-150 计算机上约为 350 分钟。

图 3 为燃烧室纵对称面上合速度测量值,部分计算结果如图 4~图 7 所示。

本文所计算燃烧器上下对称 ($\delta = 0$),但流场并不对称,射流发生了偏转。这可能是

图3 速度测量结果, $y = 0$ 图4 速度计算结果, $y = 0$ 图5 v_x (m/s) 计算结果图6 ω_y 计算结果, $y = 0$

由于实际工件、初始环境和外界扰动等不可能完全对称,因而射流卷吸造成的上、下低压区亦不对称的结果。对于随机脉动的湍流来说,类似射流发生偏转似属必然。采用本文算法可以得出这种实际结果,但必须在计算开始前赋以较为合理的初始涡量场,即设想一射流偏转后燃烧器内速度分布趋势,粗算出部分节点上涡量分量值(主要是 ω_y),并以此为初值。

图3和图4比例尺不一致。对比两者可以看出,它们在定量上有一定差异,但定性上很相符。图4示出,扁平射流进入燃烧室后迅速偏转,卷吸其下部气体,在燃烧室端部形成一回流区。该回流区的计算长度比实测值约小30%,这个较大的误差可能是将 $k-\epsilon$ 湍

流模型用于这样一个复杂流动问题的不足造成的。偏转射流卷吸其上部气体造成大型上部回流区(我们称之为主回流区)。计算结果中主回流区比实验所测略小,其中最大回流速度略大。顺便提一下,计算结果还表明,湍动能 k 的最大值在整个燃烧室内几乎都位于主回流区与正向流区交界面附近,说明此处热、质交换很强烈。显然主回流区对煤粉的稳定燃烧非常有利。

图 5 示出计算所得速度分量 V_x 在三个不同位置横截面上的分布。由图 5 可以看出,在燃烧室前段,主回流区在近对称面处比在近侧壁处要大;在燃烧室中段,其大小沿燃烧室宽度方向基本不变;到了后段,越近侧壁主回流区越大,且反流速度最大值已不再位于对称面上。这种变化显然是侧壁作用的结果。

由图 4 还可看出,射流偏转后贴向底壁。底壁附近正向流区刚性较强,这可使扁平射流煤粉燃烧器具有较好的防止积灰和结渣的性能。但从图 5(c) 可以看出,在出口附近,燃烧器底部角部出现了回流区,该回流区的存在后被实验证实。在此位置出现回流区似属少见,它可能是角部摩擦阻力、射流恢复等因素综合作用的结果。显然其对防止结焦不利。本文之后的实验工作表明,当燃烧室高度与长度之比大于 $1/5$ 时,这个回流区消失。

图 6 示出涡量分量 ω , 在对称面上分布的计算结果。在显示流场结构方面,图 4 实际上是图 6 的翻版,但图 6 更明晰,可以示出流场的一些细微之处,例如其左上角零值 ω , 线表明该处有一小正流区。类似正流区是很常见的,它可被认为是主回流区的回流区,并已被实验测出。能算出这个小正流区,显然可以说明涡量-向量势法的精度是很高的。

图 7 示出向量势分量 ψ_x 和 ψ_z 在同一截面上的分布。由向量势的定义式方程(4)可知,由图 7(a) 和 (b) 即可推算出图 5(a)。由于向量势边值系据质量守恒定律定出,图 7(a) 亦可示出该截面上流量的分布。

七、结 论

1. 本文工作表明,采用涡量-向量势法,结合常规的 $k-\epsilon$ 双方程湍流模型,数值模拟复杂的三维湍流流动是可行的。
2. 涡量-向量势法具有很高的精度,可以避免压力和速度修正的麻烦,计算过程稳定,较易收敛,对于浮力流、回流、分离流等涡旋特征较场流动的研究比之仅藉速度更可深入问题实质,有着不应忽视的优越性。
3. 本文所推导的固体壁面处涡量边界条件是可行的,与前人所用相比可加速收敛,有一定优越性。
4. 涡量-向量势法在边界条件、运用于有化学反应多相流、与高精度湍流模型和差分

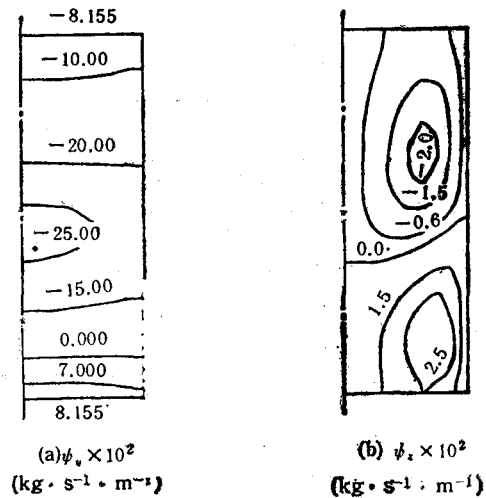


图 7 向量势分量计算值, $z/L = 0.229$

格式结合等方面尚需探讨和尝试。总之,涡量-向量势法是一种值得亦有待于进一步尝试和发展的方法。

参 考 文 献

- [1] Li, Y. Z. *Heat Transfer Science and Technology* 1988, Hemisphere Pub. Co. (1989), 254—259.
- [2] Aziz K., and Hellums, J. D., *Phy. Fluids*, **10**, 2(1967), 314—324.
- [3] Richardson S. M., and Cornish, A. R. H., *J. Fluid Mech.*, **82**, 2(1977), 309—319.
- [4] 尾添紘之,平光雅司,日本机械学会论文集(B编),**52**,478(1986),2418—2424.
- [5] 卞荫贵,赵烈,于欣,空气动力学学报,**6**,1(1988),10—18.
- [6] Gosman, A. D., etc., *Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows*, Academic Press, London and New York (1969).
- [7] Roache, P. J., *计算流体力学*,科学出版社(1983).

MATHEMATICAL MODELLING OF 3-DIMENSIONAL TURBULENT FLOW BY VORTICITY-VECTOR POTENTIAL METHOD

Liang Dong and Li Youzhang

(Beijing University of Science and Technology)

Wei Jingbin

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract The vorticity-vector potential method and k - ε two-equation turbulence model are applied for numerical simulation of the 3-dimensional isothermal flowfield in a flat jet combustor. A new equation to calculate the values of vorticity components on solid surfaces is introduced. Conditions which should be satisfied in order to define boundary conditions of vector potential are discussed. The computed results agree with the experimental measurements on the whole. It is shown that the vorticity-vector potential method is a capable one possessing many merits for numerical simulation of 3-dimensional turbulent flow.

Key words turbulent flow, 3-dimension, vector potential, computational fluid dynamics