

# 含圆形弹性夹杂的反平面问题

刘又文

蒋持平

(中南工业大学应用数学力学系)

(中国科学院力学研究所)

## 摘 要

运用复变函数技术<sup>[1]</sup>,求出了无限弹性平面含不同弹性材料的圆形夹杂,在反平面剪切和反平面集中力作用下,应力和位移场的封闭形式解,并由此得出相应的界面应力公式.

**关键词:** 弹性夹杂; 反平面问题; 集中力; 界面应力.

文 [2] 研究了在无限弹性平面中嵌入不同材料圆形夹杂的平面问题,本文研究上述复合体承受各种反平面载荷下的弹性响应问题.随着材料科学和复合材料技术的迅速进展,这个问题获得更加重要的理论与实用价值.

## 1 基本公式推导

设剪切模量为  $\mu_1$  的介质 I 占有半径为  $R$  的圆内区域  $S^+$ ; 剪切模量为  $\mu_2$  的介质 II 占有圆外区域  $S^-$ ; 设在两种材料的交界面上,应力和位移保持连续:

$$\tau_{r\theta}^+(t) = \tau_{r\theta}^-(t) \quad t \in |z| = R \quad (1.1)$$

$$W_1^+(t) = W_2^-(t) \quad t \in |z| = R \quad (1.2)$$

下标 1 和 2 分别表示对应于介质 I 和 II 的量,  $W$  表示反平面位移;  $\tau_{r\theta}$  和  $\tau_{\theta z}$  表示极坐标中的剪应力分量.

反平面问题的弹性平衡方程为

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad (1.3)$$

其通解可设为:

$$W = \operatorname{Re} f(z) \quad (1.4)$$

式中:  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  为一个定义在所论域内的解析函数,“Re”表示取函数的实部.

1990年2月13日收到初稿

在直角坐标中的应力可表示为

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial W}{\partial x} \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial W}{\partial y} \tag{1.5}$$

将(1.4)代入(1.5)式,得:

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \mu f'(z) \tag{1.6}$$

经坐标变换得:

$$\tau_{rz} - i\tau_{\theta z} = \mu e^{i\theta} f'(z) \tag{1.7}$$

设  $f'(z)$  在  $S^+$  (或  $S^-$ ) 内有定义, 由反射原理<sup>[3]</sup>可在  $S^-$  (或  $S^+$ ) 内定义函数

$$f'(z) = -\frac{R^2}{z^2} \bar{f}'\left(\frac{R^2}{z}\right) \tag{1.8}$$

式中“—”表示复数共轭. 用  $R^2/\bar{z}$  代  $z$  便得

$$f'(z) = -\frac{R^2}{z^2} \bar{f}'^*\left(\frac{R^2}{z}\right) \tag{1.9}$$

下面分别研究无穷远处受反平面剪切; 圆外, 圆内受反平面集中力作用下的弹性解答.

## 2 无穷远处受反平面剪切

如图 1 所示, 设上述弹性平面, 在无穷远处的受载条件为:

$$\tau_{rz2} |_{\theta=\beta} = P, \quad \tau_{\theta z2} |_{\theta=\beta} = 0 \tag{2.1}$$

式中  $P$  为实常数.

在  $S^+$  内设

$$W_1 = \text{Re} f_1(z) \tag{2.2}$$

则有:

$$\tau_{rz1} - i\tau_{\theta z1} = \mu_1 e^{i\theta} f_1'(z) \tag{2.3}$$

$f_1'(z)$  在  $S^+$  内全纯, 且在  $z=0$  的邻域有:

$$f_1'(z) = D_0 + O(z) \tag{2.4}$$

式中  $D_0$  为待定复常数. 参见(1.8)式, 推广到  $S^-$  内的  $f_1^*(z)$  全纯, 且对充分大的  $|z|$  有:

$$f_1^*(z) = -R^2 \bar{D}_0 \frac{1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \tag{2.5}$$

在  $S^-$  内设:

$$W_2 = \text{Re} f_2(z) \tag{2.6}$$

则有:

$$\tau_{rz2} - i\tau_{\theta z2} = \mu_2 e^{i\theta} f_2'(z) \tag{2.7}$$

注意到  $f_2'(z)$  在无穷远点的奇性主部, 可知

$$f_2'(z) = \frac{Pe^{-i\beta}}{\mu_2} + f_{20}'(z) \tag{2.8}$$

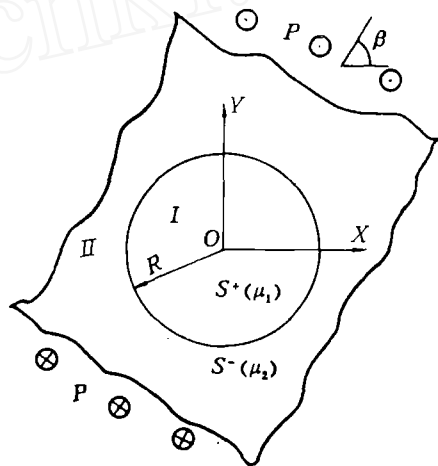


图 1 圆形夹杂平面反平面剪切

Fig. 1 Circular inclusion plane under anti-plane shear

式中  $f'_{20}(z)$  在  $S^-$  内全纯, 且对充分大的  $|z|$

$$f'_{20}(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (2.9)$$

参看(1.8)式, 推广到  $S^+$  内的  $f'_2(z)$  为

$$f'_2(z) = -\frac{PR^2e^{i\beta}}{\mu_2} \cdot \frac{1}{z^2} + f'_{20}(z) \quad (2.10)$$

式中  $f'_{20}(z)$  在  $S^+$  内全纯, 且在  $z=0$  的邻域

$$f'_{20}(z) = O(1) \quad (2.11)$$

将(2.3)和(2.7)代入(1.1)式, 并考虑到(1.8), (2.5), (2.10)式, 有

$$[\mu_1 f_1(t) + \mu_2 f'_2(t)]^+ = [\mu_1 f_1^*(t) + \mu_2 f'_2(t)]^- \quad t \in |z| = R \quad (2.12)$$

再将(2.8), (2.10)代入(2.12)式, 得

$$[\mu_1 f'_1(t) + \mu_2 f'_{20}(t)]^+ - [\mu_1 f_1^*(t) + \mu_2 f'_{20}(t)]^- = \frac{PR^2e^{i\beta}}{t^2} + Pe^{-i\beta} \quad (2.13)$$

将(2.2), (2.6)代入(1.2)式, 两边对  $\theta$  微分后, 再将(2.8), (2.10)式代入, 得

$$[f'_1(t) - f'_{20}(t)]^+ - [f'_{20}(t) - f_1^*(t)]^- = -\frac{PR^2e^{i\beta}}{\mu_2} \frac{1}{t^2} + \frac{Pe^{-i\beta}}{\mu_2} \quad (2.14)$$

根据 Plemelj 公式<sup>[1]</sup>, 由(2.13)和(2.14)两式得

$$\begin{aligned} \mu_1 f'_1(z) + \mu_2 f'_{20}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{Pe^{-i\beta} + PR^2e^{i\beta}/t^2}{t-z} dt + C_1 \quad z \in S^+ \\ &= Pe^{-i\beta} + C_1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 f_1^*(z) + \mu_2 f'_{20}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{Pe^{-i\beta} + PR^2e^{i\beta}/t^2}{t-z} dt + C_1 \quad z \in S^- \\ &= -PR^2e^{i\beta}/z^2 + C_1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} f'_1(z) - f'_{20}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{Pe^{-i\beta}/\mu_2 - PR^2e^{i\beta}/\mu_2 t^2}{t-z} dt + C_2 \quad z \in S^+ \\ &= \frac{Pe^{-i\beta}}{\mu_2} + C_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} f'_{20}(z) - f_1^*(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{Pe^{-i\beta}/\mu_2 - PR^2e^{i\beta}/\mu_2 t^2}{t-z} dt + C_2 \quad z \in S^- \\ &= PR^2e^{i\beta}/\mu_2 z^2 + C_2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

将(2.5), (2.9)代入(2.16)和(2.18)两式, 便得

$$C_1 = 0 \quad C_2 = 0 \quad (2.19)$$

联立(2.15)和(2.17), 并注意到(2.19)式, 得

$$f'_1(z) = \frac{2Pe^{-i\beta}}{\mu_1 + \mu_2} \quad (2.20)$$

联立(2.16)和(2.18), 求得  $f'_{20}(z)$  后, 代入(2.8)式得

$$f'_2(z) = \frac{Pe^{-i\beta}}{\mu_2} + \frac{(\mu_1 - \mu_2) PR^2e^{i\beta}}{\mu_2 (\mu_1 + \mu_2)} \cdot \frac{1}{z^2} \quad (2.21)$$

由此, 我们得到界面应力公式为:

$$\begin{aligned} \tau_{rz1} |_{|z|=R} &= \tau_{rz2} |_{|z|=R} = \operatorname{Re} \mu_1 e^{i\theta} f'_1(z) |_{|z|=R} \\ &= \frac{2\mu_1 P}{\mu_1 + \mu_2} \cos(\theta - \beta) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\tau_{\theta 1} = I_m \mu_1 e^{i\theta} f_1'(z) \Big|_{|z|=R} = \frac{2\mu_1 P}{\mu_1 + \mu_2} \sin(\theta - \beta) \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta 2} &= I_m \mu_2 e^{i\theta} f_2'(z) \Big|_{|z|=R} \\ &= P \sin(\theta - \beta) + \frac{P(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)} \sin(\beta - \theta) \end{aligned} \tag{2.24}$$

### 3 圆外作用反平面集中力

如图 2 所示, 上述无限弹性平面, 在  $S^-$  内任意位置  $z_0$  处, 作用反平面集中力  $P$ , 设无穷远处应力和回转为零. 分离  $f_2^-(z)$  在  $z_0$  处的奇性主部<sup>[3]</sup>, 则有

$$f_2^-(z) = \frac{-P}{2\pi\mu_2} \cdot \frac{1}{z - z_0} + f_{20}^-(z) \quad z \in S^- \tag{3.1}$$

式中  $f_{20}^-(z)$  在  $S^-$  内全纯, 且对充分大的  $|z|$

$$f_{20}^-(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right) \tag{3.2}$$

同理, 由 (1. 8) 式, 并注意到奇性主部分析, 有

$$f_2^+(z) = \frac{-P}{2\pi\mu_2} \left( \frac{1}{z - z_0^*} - \frac{1}{z} \right) + f_{20}^+(z) \quad z \in S^+ \tag{3.3}$$

式中  $z_0^* = R^2/\bar{z}_0$ ,  $f_{20}^+(z)$  在  $S^+$  内全纯.

而此时,  $S^+$  内的  $f_1^-(z)$  和由 (1. 8) 式推广到  $S^-$  内的  $f_1^+(z)$  均为全纯函数.

再由交界面上的应力和位移连续条件得

$$[\mu_1 f_1^-(t) + \mu_2 f_{20}^-(t)]^+ - [\mu_1 f_1^+(t) + \mu_2 f_{20}^+(t)]^- = \frac{-P}{2\pi} \left( \frac{1}{t - z_0} - \frac{1}{t - z_0^*} + \frac{1}{t} \right) \quad t \in |z|=R \tag{3.4}$$

$$[f_1^-(t) - f_{20}^-(t)]^+ - [f_{20}^+(t) - f_1^+(t)]^- = \frac{-P}{2\pi\mu_2} \left( \frac{1}{t - z_0^*} + \frac{1}{t - z_0} - \frac{1}{t} \right) \quad t \in |z|=R \tag{3.5}$$

根据 plemeij 公式<sup>[1]</sup>, 由 (3. 4) 和 (3. 5) 式, 经与上述类似的运算过程, 求得

$$f_1^-(z) = \frac{-P}{\pi(\mu_1 + \mu_2)(z - z_0)} \quad z \in S^+ \tag{3.6}$$

$$f_2^-(z) = \frac{-P}{2\pi\mu_2} \cdot \frac{1}{z - z_0} + \frac{P(\mu_1 - \mu_2)}{2\pi\mu_2(\mu_1 + \mu_2)} \left( \frac{1}{z - z_0^*} - \frac{1}{z} \right) \quad z \in S^- \tag{3.7}$$

不妨设  $z_0 = \rho_0 e^{i\alpha_0}$ , 并将 (3. 6), (3. 7) 式代入应力公式, 令  $z = R e^{i\theta}$ , 分离实部和虚部, 便得圆外作用集中力时的界面应力公式:

$$\tau_{rz1} \Big|_{|z|=R} = \tau_{rz2} \Big|_{|z|=R} = \frac{\mu_1 P}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \cdot \frac{\rho_0 \cos(\alpha_0 - \theta) - R}{R^2 - 2R\rho_0 \cos(\alpha_0 - \theta) + \rho_0^2} \tag{3.8}$$

$$\tau_{\theta 1} \Big|_{|z|=R} = \frac{\mu_1 P}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \cdot \frac{\rho_0 \sin(\alpha_0 - \theta) - R}{R^2 - 2R\rho_0 \cos(\alpha_0 - \theta) + \rho_0^2} \tag{3.9}$$

$$\tau_{\theta 2} \Big|_{|z|=R} = \frac{P \sin(\alpha_0 - \theta)}{2\pi} \left[ \frac{\rho_0}{R^2 - 2R\rho_0 \cos(\alpha_0 - \theta) + \rho_0^2} \right]$$

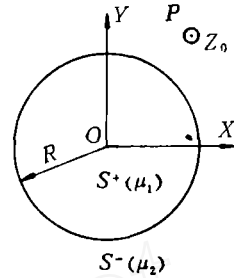


图 2 圆形夹杂外受反平面集中力  
Fig. 2 An antiplane concentrated force is applied outside the circular inclusion

$$-\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{\rho_0^*}{R^2 - 2R\rho_0^* \cos(\alpha_0 - \theta) + \rho_0^{*2}} \quad (3.10)$$

式中:  $\rho_0^* = R^2/\rho_0$

#### 4 圆内作用反平面集中力

如图3所示,上述无限弹性体,在 $S^+$ 内任意位置 $z_0$ ,作用反平面集中力 $P$ ,并设无穷远处应力和回转为零.此时

$$f_1'(z) = \frac{-P}{2\pi\mu_1} \frac{1}{z - z_0} + f_{i0}'(z) \quad z \in S^+ \quad (4.1)$$

式中 $f_{i0}'(z)$ 在 $S^+$ 内全纯.

$f_2'(z)$ 在 $S^-$ 内全纯,且对充分大的 $|z|$

$$f_2'(z) = O\left(\frac{1}{z}\right) \quad (4.2)$$

采用与上述反平面集中力作用在圆外的类似分析方法,经相同的计算步骤,最后得到

$$f_1'(z) = \frac{-P}{2\pi\mu_1} \cdot \frac{1}{z - z_0} + \frac{P(\mu_2 - \mu_1)}{2\pi\mu_1(\mu_1 + \mu_2)} \cdot \frac{1}{z - z_0^*} \quad z \in S^+ \quad (4.3)$$

$$f_2'(z) = \frac{P(\mu_1 - \mu_2)}{2\pi\mu_2(\mu_1 + \mu_2)} \cdot \frac{1}{z} - \frac{P}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \cdot \frac{1}{z - z_0} \quad z \in S^- \quad (4.4)$$

界面应力公式为:

$$\tau_{rz} = \frac{P_0}{2\pi} \left[ \frac{\rho_0 \cos(\alpha_0 - \theta) - R}{R^2 - 2R\rho_0 \cos(\alpha_0 - \theta) + \rho_0^2} + \frac{(\mu_2 - \mu_1)[R - \rho_0^* \cos(\alpha_0 - \theta)]}{(\mu_2 + \mu_2)(R^2 - 2R\rho_0^* \cos(\alpha_0 - \theta) + \rho_0^{*2})} \right] \quad (4.5)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{P \sin(\theta - \alpha_0)}{2\pi} \left[ \frac{\rho_0}{R^2 - 2R\rho_0 \cos(\alpha_0 - \theta) + \rho_0^2} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{\rho_0^*}{R^2 - 2R\rho_0^* \cos(\alpha_0 - \theta) + \rho_0^{*2}} \right] \quad (4.6)$$

$$\tau_{\theta r} = \frac{P\mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \cdot \frac{\rho_0 \sin(\alpha_0 - \theta)}{R^2 - 2R\rho_0 \cos(\alpha_0 - \theta) + \rho_0^2} \quad (4.7)$$

顺便指出,上述诸式中,令 $\mu_1 \rightarrow \infty$ ,便得含刚性核的各种相应解答;令 $\mu_1 \rightarrow 0$ ,可得含圆孔的解答;这里不一赘述.

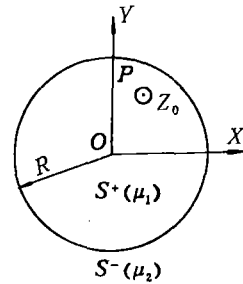


图3 圆形夹杂内受反平面集中力

Fig. 3 An antiplane concentrated force is applied inside circular inclusion

## 参 考 文 献

- 1 Мухомоловичи Н. Н. 数学弹性力学的几个基本问题. 北京: 科学出版社, 1963. 203
- 2 蒋持平. 关于嵌入了不同材料的平面问题. 湖南大学学报, 1986 (3): 83
- 3 Woods L. C. 解析函数论 (现代连续统物理丛书 5). 南京: 江苏科技出版社, 1983. 16

## ANTI-PLANE PROBLEM OF CIRCULAR ELASTIC INCLUSION

*Liu Youwen*

(Department of Applied Mathematics and  
Mechanics Central South University of Technology)

*Jiang Chiping*

(Institute of Mechanics Chinese Academy of Sciences)

## ABSTRACT

Using the complex variable technique, the problem of an infinite elastic plane containing a circular inclusion with a dissimilar elastic modulus under anti-plane concentrated forces or shearing at infinity is dealt with. The closed form solutions of the stress and displacement are obtained and the stresses on the interface are formulated.

**Key words:** elastic inclusion; anti-plane problem; concentrated force; interfacial stress