

# 不同材料界面共圆弧裂纹的反平面问题

刘又文 蒋持平

(中南工业大学) (中国科学院力学研究所)

## 提 要

本文首次将不同弹性材料界面共圆弧裂纹的反平面问题, 化为解析函数边值问题, 获得了一般解答, 由此求出了几种典型情况的精确解, 算出了应力强度因子。当两种材料相同时, 本文结果与文(5)完全吻合。

## 一、问题的提法

继文[1], [2]后, 本文研究在反平面剪切下, 不同弹性材料的圆形界面上有多条圆弧裂纹的问题。据作者所知, 该问题至今尚无理论解答。随着材料科学研究的日益深入和复合材料技术的迅速发展, 这个问题获得了更加重要的理论分析与工程实用意义。

本文讨论如下问题:

如图1所示, 设剪切模量为 $\mu_1$ 的介质 I 占有半径为 $R$ 的圆内区域 $S^+$ ; 剪切模量为 $\mu_2$ 的介质 II 占有圆外区域 $S^-$ 。设在两种材料的交界面上:

(1) 沿 $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$ 互相连接, 且应力和位移保持连续

$$\tau_{rz_1}^+(t) = \tau_{rz_2}^-(t) \quad t \in L \quad (1.1)$$

$$W_1^+(t) = W_2^-(t) \quad t \in L \quad (1.2)$$

(2) 沿 $L' = L'_1 + L'_2 + \dots + L'_n$ 互相裂开, 且无面力作用

$$\tau_{rz_1}^+(t) = 0 \quad \tau_{rz_2}^-(t) = 0 \quad t \in L' \quad (1.3)$$

下标1和2分别表示对应于介质 I 和 II 的量。 $W$ 表示反平面位移;  $\tau_{rz}$ 和 $\tau_{\theta z}$ 表示极坐标中的剪应力分量。

设无穷远处加载条件为

$$\tau_{rz_2} \Big|_{\theta=\beta} = P \quad \tau_{\theta z_2} \Big|_{\theta=\beta} = 0 \quad (1.4)$$

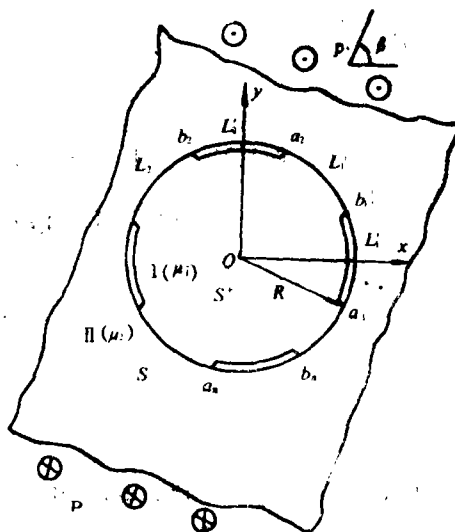


图 1

本文将收到日期1989年2月20日

## 二、解析函数边值问题

反平面剪切问题的弹性平衡方程为

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

其通解可设为

$$W = \operatorname{Re} f(z) \quad (2.2)$$

式中  $f(z) = u + iv$  为一个定义在所论域内的解析函数, “ $\operatorname{Re}$ ” 表示函数的实部。在  $S^+$  内设

$$W_1 = \operatorname{Re} f_1(z) \quad (2.3)$$

则有

$$\tau_{r_1} - i\tau_{\theta_1} = \mu_1 e^{i\theta} f_1'(z) \quad z \in S^+ \quad (2.4)$$

由推广的 Schwarz 延拓原理, 将  $f_1'(z)$  越过  $L'$  延拓到圆外域  $S^-$  内:

$$f_1'(z) = -\frac{R^2}{z^2} \overline{f_1'\left(\frac{R^2}{z}\right)} \quad z \in S^- \quad (2.5)$$

在  $S^-$  内设

$$W_2 = \operatorname{Re} f_2'(z) \quad (2.6)$$

有

$$\tau_{r_2} - i\tau_{\theta_2} = \mu_2 e^{i\theta} f_2'(z) \quad z \in S^- \quad (2.7)$$

同理, 将  $f_2'(z)$  开拓到  $S^+$  内

$$f_2'(z) = -\frac{R^2}{z^2} \overline{f_2'\left(\frac{R^2}{z}\right)} \quad z \in S^+ \quad (2.8)$$

式中 “ $\overline{\phantom{x}}$ ” 表示复数共轭。

在  $S^+$  内, 应力无奇点, 故  $f_1'(z)$  在  $S^+$  内全纯, 在  $z=0$  的邻域

$$f_1'(z) = D_0 + O(z) \quad (2.9)$$

式中  $D_0$  为待定复常数。

由 (2.5) 及 (2.9) 式, 在无穷远点邻域

$$f_1'(z) = -R^2 \overline{D_0} \frac{1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \quad (2.10)$$

将 (1.4) 代入 (2.7) 式, 得

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mu_2 e^{i\theta} f_2'(z) = P \quad (2.11)$$

参阅文[3]的分析方法, 并考虑到本问题中, 圆孔周边上的应力主矢为零, 故在无穷远点邻域

$$f_2'(z) = \frac{Pe^{-i\theta}}{\mu_2} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (2.12)$$

由(2.8)及(2.12)式, 在 $z \neq 0$ 的邻域

$$f_2'(z) = -\frac{PR^2 e^{i\theta}}{\mu_2} \frac{1}{z^2} + O(1) \quad (2.13)$$

将(2.4), (2.7)代入(1.1)式, 并考虑到(1.3)及(2.5)、(2.8)、(2.13)式, 有

$$\left[ \mu_1 f_1'(t) + \mu_2 f_2'(t) \right]^+ = \left[ \mu_1 f_1'(t) + \mu_2 f_2'(t) \right]^-, \quad t \in L + L' \quad (2.14)$$

由推广的Liouville定理, 并考虑到(2.9)、(2.10)、(2.12)及(2.13)式, 在全平面 $z$ 上有

$$\mu_1 f_1'(z) + \mu_2 f_2'(z) = -PR^2 e^{i\theta} \frac{1}{z^2} + Pe^{-i\theta} \quad (2.15)$$

考虑位移连续条件, 将(2.3), (2.6)代入(1.2)式后, 再两边对 $\theta$ 微分, 并注意到(2.5), (2.8)及(2.15)式得

$$f_1'^+(t) + f_1'^-(t) = \frac{\Gamma}{i^2} - \frac{\bar{\Gamma}}{R^2}, \quad t \in L \quad (2.16)$$

式中  $\Gamma = -\frac{2PR^2 e^{i\theta}}{\mu_1 + \mu_2}$

由文[3]可知, (2.16)的积分形式解为

$$f_1'(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma/t^2 - \bar{\Gamma}/R^2}{X_0^+(t)(t-z)} dt + X_0(z) \cdot P_n(z) \quad (2.17)$$

其中

$$X_0(z) = \prod_{j=1}^n (z-a_j)^{-\frac{1}{2}} (z-b_j)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.18)$$

且 $X_0(z)$ 是沿 $L$ 割开平面上的一单值分支, 满足

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [z^n \cdot X_0(z)] = 1 \quad (2.19)$$

$$P_n(z) = C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} + \dots + C_n \quad (2.20)$$

参阅文[2], 计算出(2.17)中的柯西型积分后, 得

$$f_1'(z) = X_0(z) \left[ P_n(z) - \frac{1}{2} G_0(z) - \frac{1}{2} G_\infty(z) \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma}{z^2} - \frac{\bar{\Gamma}}{R^2} \right) \quad (2.21)$$

式中 $G_0(z)$ 和 $G_\infty(z)$ 分别为函数 $\frac{\Gamma/z^2 - \bar{\Gamma}/R^2}{X_0(z)}$ 在0点和 $\infty$ 远点的奇性主部。

在 $f_1'(z)$ 的表达式(2.21)中, 仍有 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 共 $n$ 个常数需要确定。将(2.21)代入(2.15)得 $f_2'(\theta)$ , 再将 $f_2'(z)$ 在 $\infty$ 远邻域展开后与(2.12)式比较 $\frac{1}{z}$ 项的系数, 可得一个

代数方程, 余下 $n-1$ 个代数方程由位移连续条件导出:

$$\int_{L_j} X_0(t) \left[ P_n(t) - \frac{1}{2}G_0(t) - \frac{1}{2}G_\infty(t) \right] dt = 0, (j=2,3,\dots,n) \quad (2.22)$$

这样, 整个弹性场完全确定。

### 三、几个典型精确解

例1: 一条界面圆弧裂纹, 单边受反平面剪切

如图2所示, 设圆形界面上有条裂纹 $\widehat{ab}$ , 不失一般性, 建立图示坐标系, 使 $a = Re^{-i\alpha}$ ,  $b = Re^{i\alpha}$ , 考虑到 $n=1$ , (2.21)式中

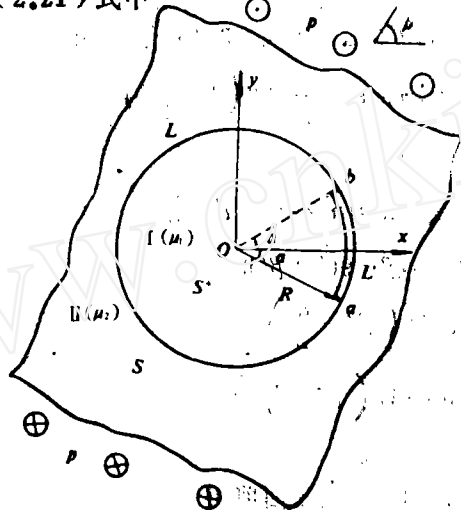


图2

$$P_n(z) = C_1 \quad (3.1)$$

$$X_0(z) = (z-a)^{-\frac{1}{2}}(z-b)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

$$G_0(z) = \frac{\Gamma R}{z^2} - \frac{\Gamma R}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \frac{1}{z} \quad (3.3)$$

$$G_\infty(z) = -\frac{\bar{\Gamma}}{R^2}z + \frac{\bar{\Gamma}(a+b)}{2R^2} \quad (3.4)$$

故有

$$f_1'(z) = \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \left[ C_1 - \frac{\Gamma R}{2z^2} + \frac{\Gamma R}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \frac{1}{z} + \frac{\bar{\Gamma}}{2R^2}z - \frac{\bar{\Gamma}(a+b)}{4R^2} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma}{z^2} - \frac{\bar{\Gamma}}{R^2} \right) \quad (3.5)$$

由(2.15)式得

$$f_2'(z) = -\frac{\mu_1}{\mu_2} f_1'(z) - \frac{PR^2 e^{i\beta}}{\mu_2} + \frac{Pe^{-i\beta}}{\mu_2} \quad (3.6)$$

经比较系数:  $C_1 = 0$  (3.7)

参阅文[4], 先作如下坐标变换

$$z = \omega(z) = ie^{i\alpha} \left( Z - iR - \frac{R}{2} \sin 2\alpha \right) \quad (3.8)$$

这样, 在  $Z$  平面  $X$  轴与裂纹相切于端点  $b_1$  ( $z$  平面上  $b$  的对应点), 且  $b_1 = \frac{1}{2}R \sin 2\alpha$ 。应力场在  $b_1$  点邻域的奇性主项可写为

$$\mu_1 e^{i\theta} f_1'[\omega(Z)] = \frac{K_{3b}}{\sqrt{2\pi}} (Z - b_1)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

所以, 在裂纹尖端  $z = b$  处

$$K_{3b} = \sqrt{2\pi} \lim_{Z \rightarrow b_1} \left[ \sqrt{Z - b_1} \mu_1 e^{i\theta} f_1'[\omega(Z)] \right] \quad (3.10)$$

将 (3.8) 代入 (3.5) 式, 再将 (3.5) 代入 (3.10) 式, 并经整理得

$$K_{3b} = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} P \sqrt{\pi R \sin \alpha} \cos \left( \beta - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (3.11)$$

同理, 求得裂纹  $a$  端的应力强度因子

$$K_{3a} = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} P \sqrt{\pi R \sin \alpha} \cos \left( \beta + \frac{\alpha}{2} \right) \quad (3.12)$$

当两种材料相同,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ , 且  $\beta = 90^\circ + \beta'$  时,

$$K_{3b} = P \sqrt{\pi R \sin \alpha} \sin \left( \beta' - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (3.13)$$

$$K_{3a} = P \sqrt{\pi R \sin \alpha} \sin \left( \beta' + \frac{\alpha}{2} \right) \quad (3.14)$$

显然, 这与文[5]中的结果完全一致。

例2: 一条界面圆弧裂纹, 周边受反平面剪切

如图3所示情形, 我们可利用上述例1 单边受剪切的结果求解。在 (3.11) 式中, 分别令  $\beta = 90^\circ$ ,  $\beta = 180^\circ$ , 再把所得二者叠加, 便得

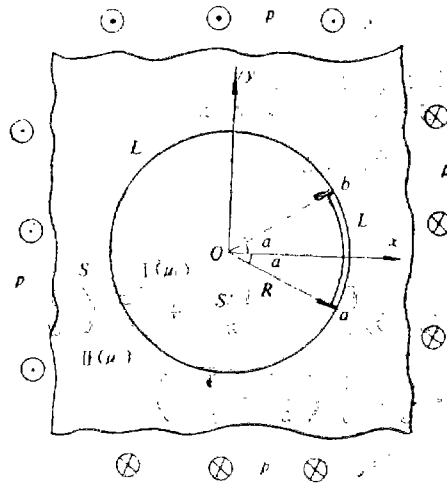


图 3

$$K_{3b} = \frac{2\sqrt{2\mu_1}}{\mu_1 + \mu_2} P \sqrt{\pi R \sin \alpha} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (3.15)$$

同理，由(3.12)式求得

$$K_{3a} = \frac{2\sqrt{2\mu_1}}{\mu_1 + \mu_2} P \sqrt{\pi R \sin \alpha} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \quad (3.16)$$

当两种材料相同， $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ，由(3.15)，(3.16)两式可得与文[5]完全一致的结果。

例3：一条直线界面裂纹，单边受反平面剪切

如图4所示，设两种材料的直线界面上含一条有限长裂纹，在无穷远处单向作用反平面均布剪应力，方向如图。此结果我们可以直接由例1的极限情形获得：经(3.8)式变换后，在Z平面上，图2变为图5所示，再令 $R \rightarrow \infty$ ， $\alpha \rightarrow 0$ ，但保持 $R \sin \alpha = l$ ，图5变为图4情形。经上述变换和极限过程，由(3.11)，(3.12)两式分别得到裂纹尖端a, b处的应力强度因子

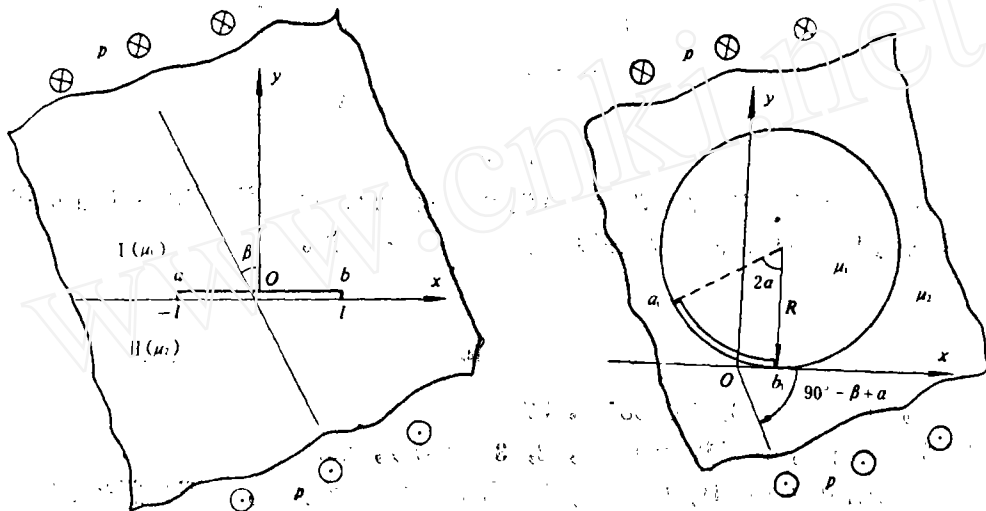


图 4

图 5

$$K_{3a} = K_{3b} = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} P \sqrt{\pi l} \cos \beta \quad (3.17)$$

当两种材料相同， $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ 时，由(3.17)式得

$$K_{3a} = K_{3b} = P \sqrt{\pi l} \cos \beta \quad (3.18)$$

注意到此处均布剪力方向的区别，便知此结果与文[5]中的结果完全一致。

例4：一条直线界面裂纹，周边受反平面剪切

如图6所示情形，我们利用上述例3的结果求解。在(3.17)式中，令 $\beta' = 90^\circ + \beta$ 便得

$$K'_{3a} = K'_{3b} = \frac{-2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} P \sqrt{\pi l} \sin \beta \quad (3.19)$$

再将(3.17)与(3.19)式叠加，便得图6的应力强度因子

$$K_{3a} = K_{3b} = \frac{2\sqrt{2\mu_1}}{\mu_1 + \mu_2} P \sqrt{\pi l} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \quad (3.20)$$

当两种材料相同， $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ 时，由(3.20)式得

$$K_{3a} = K_{3b} = P\sqrt{2\pi l} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \quad (3.21)$$

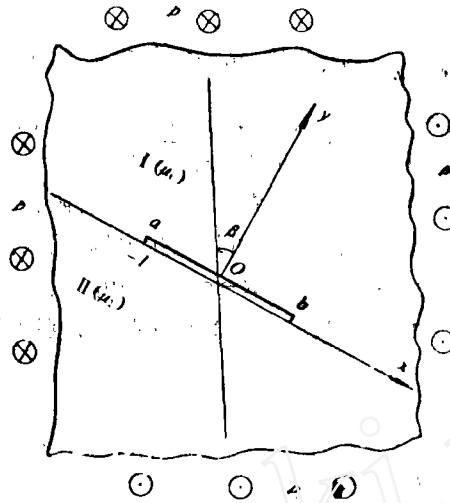


图 6

顺便指出,在上述各例中,若令 $\mu_1 \rightarrow \infty$ 或 $\mu_2 \rightarrow \infty$ ,便可得到刚性核或刚性基础上的相应解答。这些结果容易由简单极限过程直接列出,这里不一一赘述。

## 参 考 文 献

- [1] 刘又文, 上海力学, 8, 1 (1987), 57
- [2] 刘又文 蒋持平, 应用数学和力学, 8, 3 (1987), 267
- [3] Мусхелишвили Н. И., 数学弹性力学的几个基本问题, 科学出版社 (1965)
- [4] C. G. Sih, P. C. Raris and F. Erdogan, J. Appl. Mech 29 (1962), 306
- [5] 中国航空研究院, 应力强度因子手册, 科学出版社 (1981), 194

## ON THE ANTI-PLANE PROBLEM OF CIRCULAR ARC CRACKS BETWEEN BONDED DISSIMILAR MATERIALS

Liu Youwen

(Central South University of Technology)

Jiang Chiping

(Institute of Mechanics, Science Sinica, Beijing)

### Abstract

This paper, for the first time, presents a method of conversion such that the anti-plane problem of circular arc cracks between bonded dissimilar materials may be converted into a boundary value problem analytically. This paper gives out general solutions of this problem, several closed-form solutions for some typical cases and related stress intensity factors. When the two materials are similar, results obtained coincide with those of the Ref. [5].

www.cnki.net