第 14 卷 第 4 期 1991 年 10 月 应用数学学报 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Vol. 14, No. 4 Oct., 1991

砖石类结构平衡状态的存在性定理

茹 重 庆

(中国科学院力学研究所，北京)

AN EXISTENCE THEOREM ON THE EQUILIBRIUM OF MASONRY-LIKE STRUCTURES

Ru Chong-qing

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In this paper, in place of the so-called "safe load assumption", we propose a less restricted assumption on the upper boundedness of the change of total area (for two-dimensional cases), and prove an existence theorem of the equilibrium of masonry-like structures for more general cases.

§1. 引 言

砖石类 (masonry-like) 材料，是指一类受压时呈弹性但几乎不抗拉的材料，其应力张量 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ 为半负定，与应变张量 $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x})$ 的关系为[1,2]:

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 为弹性矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}$ 为半正定张量且有

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\Lambda}=0 \tag{2}$$

设区域 Ω 内给定体力分布 $\boldsymbol{f}$，全部边界上给定载荷 $\boldsymbol{F}$，则平衡条件为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{f}=0,\qquad \Omega\ 内, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{F},\qquad \partial\Omega\ 上, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为边界外法向矢量.

由[1,2]可知，此边值问题可等价于下述泛函的极小问题

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{u})=\int_\Omega E(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}))-\int_\Omega \boldsymbol{f}\boldsymbol{u}-\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\boldsymbol{u}, \tag{5}$$

这里 $E(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}))$ 为砖石类材料内所积蓄的弹性应变能. [1,2]在 $BD(\Omega)$ 函数空间(即有

本文 1988 年 7 月 5 日收到，1989 年 8 月 18 日收到修改稿.

界变形函数空间)内讨论（5）的极小问题，其中E在Ω上的积分在BD空间的定义见[1,2]. $\boldsymbol{u}$为位移矢量.

最近，[1,2]研究了此类结构平衡状态的存在性．为使（5）在BD空间满足关键的强制性（coersiveness）条件，它们主要需要所谓"安全载荷假定"如下：存在满足（3），（4）式的应力场$\boldsymbol{H}$和某严格正数$\alpha>0$，使得$(\boldsymbol{H}+\alpha \boldsymbol{I})$为半负定的，这里$\boldsymbol{I}$为单位阵．容易明白，这并非解存在的必要条件．这个较强的假设构成了[1,2]最重要的局限，因而引人注目.

本文将突破这个主要限制而提出一个较弱且物理含义很明确的假设来代替它，然后在类似于[1,2]中其它补充条件的情形下证明存在性定理.

§2. 基 本 假 设

为简单计，和[1]相同，本文只考虑二维情形．首先，类似于[1,2]，设下述其它补充条件成立.

1）对给定的Ω及$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{F})$，存在半负定的相容(即满足（3），（4）式)应力场$\boldsymbol{S}$. 显然，事实上此乃解存在的必要条件，故设其成立是自然的.

2）泛函（5）在BD空间是弱下半连续的．为此，[1,2]曾给出充分条件如下：

定理 0 设Ω是允许的 Lipschitz 区域[1,2]，若存在一个在边界邻域有界的相容且半负定应力场，则（5）在$BD(\Omega)$是弱下半连续的.

本文与[1,2]的主要不同在于，替代它们的"安全载荷假定"，我们将采用下述更弱的基本假设.

基本假设 对给定的Ω和$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{F})$，存在正数$c_1$，使得对任意充分小的正数$\alpha>0$，若对应于载荷$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{F}-\alpha \boldsymbol{n})$的解$\boldsymbol{u}$存在，则必有

$$\int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))<c_1, \tag{6}$$

其中c_1不依赖于α.

利用[1,2]中关于强制性条件的定理很容易推断出，若"安全载荷假定"成立，则（6）式必然成立，但其逆不真，具体论证从略．这也就是说本文基本假定（6）比"安全载荷假定"更容易被满足.

另外，（6）式左边是区域Ω的面积(对三维情形为体积)改变量，物理含义简单明确.

现在，我们定义另一个正数c_2如下:

c_2的定义:对给定的Ω和$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{F})$，总可找到正数$c_2$，使得对任何$\beta_1$和$\beta_2$，$0<\beta_1<1$，$0<\beta_2<1$，若对应于载荷$(\beta_1\boldsymbol{f}, \beta_1\boldsymbol{F}-\beta_2\boldsymbol{n})$的解存在，则必满足

$$\int_\Omega E(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))<c_2. \tag{7}$$

这样的有限正数c_2的存在性证明此略.

于是，可定义$BD(\Omega)$空间的一个子集G如下：$BD(\Omega)$中所有满足下述约束的元素之集合

$$\int_{\Omega}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))+\int_{\Omega}E(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))\leqslant c=c_1+c_2. \tag{8}$$

本文的基本思想即为，替代全空间 $BD(\Omega)$，我们将在其子集 G 中考虑泛函（5）的极小问题，即寻求 $\boldsymbol{u}_0\in G$，使得

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{u}_0)=\min_{G}\mathscr{E}(\boldsymbol{u}). \tag{9}$$

显然，为完成原问题中解的存在性证明，我们只需证明以下三点，1）设基本假设（6）成立，则极小问题（9）之解在弱意义下满足原定解条件（1—4），即为原问题的广义解；2）在本文假设条件下，（5）在子集 G 内确实满足强制性条件（虽然在 $BD(\Omega)$ 全空间却不然）；3）因此，（9）的极小点确实存在．下面分别给出它们的证明．

§3 主 要 定 理

定理 1 §2 中最末一段的陈述 1）是正确的．

证　首先导出（5）在约束条件（8）下的极小点 $\boldsymbol{u}_0$ 所应满足的必要条件．为此，引进松驰变量 δ^2 和拉格朗日乘子 λ，得到拉氏泛函为：

$$L=\mathscr{E}(\boldsymbol{u})+\lambda\left[\int_{\Omega}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})+\int_{\Omega}E(\boldsymbol{\varepsilon})-c+\delta^2\right]. \tag{10}$$

利用 L 关于 $\boldsymbol{u}$ 的驻值性质可证明 $\boldsymbol{u}_0$ 将满足全部原定解条件（1—4），唯一差别只是原载荷（$\boldsymbol{f},\boldsymbol{F}$）应由以下载荷替代

$$\left(\frac{\boldsymbol{f}}{1+\lambda},\ \frac{\boldsymbol{F}-\lambda\boldsymbol{n}}{1+\lambda}\right). \tag{11}$$

$\boldsymbol{u}_0$ 还应满足其它驻值条件如下：

$$\int_{\Omega}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})+\int_{\Omega}E(\boldsymbol{\varepsilon})\leqslant c, \tag{12}$$

$$\lambda\geqslant 0, \tag{13}$$

$$\lambda\left(\int_{\Omega}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})+\int_{\Omega}E(\boldsymbol{\varepsilon})-c\right)=0. \tag{14}$$

若 λ 不为零，则由（14）式，必有

$$\int_{\Omega}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})+\int_{\Omega}E(\boldsymbol{\varepsilon})=c=c_1+c_2 \tag{15}$$

而对应的载荷为（11）．再注意（1—4）之解乘上正实数仍为载荷乘上该正实数时的解，故容易看出关系式（15）与（6）和（7）式相矛盾．这意味着 λ 只能为零，对应的载荷（11）即原载荷（$\boldsymbol{f},\boldsymbol{F}$），因此 $\boldsymbol{u}_0$ 恰好满足全部原定解条件，即为原问题的解．证毕．

这样，原问题解的存在性问题归为极小问题（9）的极小点存在问题．为研究后一问题，首先证明

定理 2 若半负定的相容应力场 $\boldsymbol{S}$ 存在，则存在不依赖于 $\boldsymbol{u}$ 的两正数 m_1，m_2，使对所有 $\boldsymbol{u}\in G$ 有

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{u})\geqslant m_1\int_{\Omega}|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})|-m_2. \tag{16}$$

证 据[1,2]中的逼近定理，与[1,2]类似，这里仅对 $u \in C^1(\bar{\Omega})$ 在约束条件(8)下证明(16)式即可。

为此，将Ω分成下列三部分

$$\Omega_1:\ \mathrm{tr}(\varepsilon) \geqslant 0 \text{ 且 } \det(\varepsilon) \geqslant 0,$$
$$\Omega_2:\ \mathrm{tr}(\varepsilon) \geqslant 0 \text{ 但 } \det(\varepsilon) < 0,$$
$$\Omega_3:\ \mathrm{tr}(\varepsilon) < 0。$$

另外，注意[1]

$$2\det(\varepsilon) = (\mathrm{tr}\varepsilon)^2 - |\varepsilon|^2$$
$$2|\varepsilon|^2 \geqslant (\mathrm{tr}\varepsilon)^2$$

及约束条件(8)，我们有

$$\int_{\Omega_1} |\varepsilon| \leqslant \int_{\Omega_1} \mathrm{tr}(\varepsilon) \leqslant \int_{\Omega_3} (-\mathrm{tr}\varepsilon) + c \leqslant \int_{\Omega_3} \sqrt{2}\,|\varepsilon| + c. \tag{17}$$

以下用 N_i 表示一些不依赖于 u 的正常数。于是，对 Ω_2，注意 $E(\varepsilon)$ 的表达式(见[1])，可知 $2(1+E+\mathrm{tr}\varepsilon) \geqslant |\varepsilon|$，继而，设 $|S|$ 平方可积，则有

$$\int_{\Omega_2} E(\varepsilon) \leqslant 2\mathscr{E}_2(u) + N_1$$

这里，因为

$$\mathscr{E}(u) = \int_\Omega (E - S\cdot\varepsilon(u))$$

故记

$$\mathscr{E}_i(u) = \int_{\Omega_i} (E - S\cdot\varepsilon(u)),\ i = 1, 2, 3, \tag{18}$$

于是对 Ω_2 最后可得

$$\int_{\Omega_2} |\varepsilon| \leqslant 4\mathscr{E}_2(u) + 2\int_{\Omega_3} (-\mathrm{tr}\varepsilon) + N_2, \tag{19}$$

对 Ω_3，参见[1]可知

$$\int_{\Omega_3} |\varepsilon| \leqslant N_3\mathscr{E}_3 + N_4, \tag{20}$$

而且 $\mathscr{E}_i$ 皆有与 u 无关的下界，故由(17)，(19)，(20)诸式最终可得(16)式。证毕。

应指出，此证明可推广至三维情形。另外，S 的存在只是简化了定理2的证明，而非该定理的本质条件。由定理2可见，泛函(5)在G中满足强制性条件，这就是本文中引进G子集来替代全空间的基本动机。有了定理2，我们便可能证明(9)的极小点的存在性从而最后完成存在性的全部证明。

定理3 在§2中的假设条件下，边值问题(1—4)的广义解，或等价地，泛函(5)在 $BD(\Omega)$ 空间的极小点存在。

证 据定理1，为此只须证明(9)的极小点存在。

事实上，设极小序列 $u_i \in G$ 使得 $\mathscr{E}(u_i)$ 趋于(5)在G中的下确界，由定理2和 BD 空间的嵌入定理(可参见[1,2])，可知该序列 u_i 必为 $BD(\Omega)$ 空间的有界序列，因此可挑出一弱收敛子序列(仍记为 u_i)，它弱收敛于某个 $u_0 \in BD(\Omega)$，而根据本文假设，

约束式(8)左边作为泛函显然是弱下半连续的(例如，它显然满足本文定理0的条件)，由此可知极限元 u_0 也满足约束条件(8)，亦即 $u_0 \in G$。

再由下半连续假设，易知(5)式确实由 u_0 达到其在 G 中的下确界，即 u_0 为(9)的极小点。证毕。

综上所述，本文在较[1,2]更弱的条件下(主要是用基本假设(6)替代较苛刻的"安全载荷假设")证明了砖石类结构平衡问题解的存在性定理。

§4. 几点注记

1) 容易理解，对砖石类结构位移解不唯一的情形，若用下述更弱的假定

$$\inf_{\{u\}} \int_\Omega \operatorname{tr}(\varepsilon(u)) < c_1. \tag{21}$$

代替(6)，其中 $\{u\}$ 为同一载荷下的解集合，则仍然可证得本文全部结论。

我们认为事实上条件(21)可能几乎也是解存在的必要条件，故本文将(6)式(或(21)式)作为解存在的条件对已有的"安全载荷假设"是一个较大的改进。

众所周知，对弹性材料，当体力 $f=0$ 而且区域较简单时(例如，为星形区域)，条件式(6)在本文假设的其它补充条件保证下甚至可以取 c_1 为零，即面积(或体积)始终将变小。因此，由物理直观，我们可以期望对砖石类材料在一些特殊情形严格证明(6)或(21)式确实成立，以得到更为深刻的存在性定理。

2) 本文结果对三维的情形很容易推广。事实上为此只须对定理2的证明作相应的修改即可。另外，应指出，本文结果也可类似于[4]的思路，由考虑以 $\alpha>0$ 为参数的解序列取极限而得到。但我们认为这里引进子集 G 以保证强制性条件的想法更具有启发性。

致谢：本工作完成于国际力学科学中心(乌迪内，意大利)。该中心的 G. Del Piero 教授引导作者注意到此课题，在此特致谢意。

参考文献

[1] Giaquinta, M. and E. Giusti, Researches on the Equilibrium of Masonry Structures, *Arch. Rati. Mech. Anal.*, 88(4) (1985) 359—392.

[2] Anzellotti, G., *Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non lineaire*, (2) (1985), 261—307.

[3] Del Piero, G. and F. Maceri (editors), Proceeding of the second meeting on unilateral problems in Structural analysis, 1983.

[4] 茹重庆，关于塑性流动理论中解的存在性定理，数学物理学报，(待发表).