

对流扩散方程的迎风变换及 相应有限差分方法

陈国谦 高智

(中国科学院力学研究所)

摘要 本文提出所谓迎风变换,将对流扩散方程分解为对流迎风函数和扩散方程,并构造相应的有限差分格式。对流迎风函数以简明的指数解析形式反映对流扩散现象的迎风效应,原则上消除了源于不对称对流算子的困难,能够便利对流扩散方程的数值求解。有限差分格式具有二阶精度和无条件稳定性,算例表明其准确性、收敛速度及对边界层效应的适应能力均明显优于中心差分格式和迎风差分格式。

关键词 流体力学,对流扩散方程,迎风变换,迎风效应,差分格式

流动现象中动量、热量和质量等基本参量的行为均遵循对流扩散方程。对流扩散方程数值求解的一个基本困难,即是源于不对称对流算子的所谓迎风效应^[1]。在有限差分方法中,我们一般以中心差分或迎风差分来处理对流项。中心差分格式虽具有二阶精度,却只有在甚小的网格特征参数下才能稳定。迎风差分格式具有无条件稳定性,却只有一阶精度。欲求既准确又稳定的格式,须深入分析对流扩散方程,有效地把握对流运动的内在特性。

一、对流扩散方程的迎风变换

作为对流扩散方程的物理背景,热传递现象^[2]最为简单直观。设想一均匀介质中发生的热传导过程,若参考系固结于介质,则所见温度的变化遵循纯粹的扩散方程。若参考系相对于介质有运动,所见温度的变化遵循对流扩散方程,其中较扩散方程多出的一阶对流项即是所谓空间导数^[3]。更一般的情形是流场中热量的传递。我们熟知,通常的能量方程是对流扩散型的。这是因为,我们通常所采取的 Euler 坐标系相对流体微团有运动。若我们追踪流体微团,按照 Lagrange 的观点,温度的变化亦复归扩散方程所制约。所以从某种意义上说,扩散是内在本质性的,不依参照系而存在;而对流是外在非本质的,其强弱甚或有无均与参照系有关。而正是这一外在非本质的因素,造成了以往流动现象数值分析的一个基本困难。兹探求一合适的观点,较清晰地看待对流扩散现象。

对于对流扩散方程

$$C \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + 2A \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2B \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + S \quad (1.1)$$

本文于 1990 年 3 月 3 日收到,1990 年 8 月 15 日收到修改稿。

(其中源项 S 、对流系数 A 、 B 和 C 皆可随时空而变化), 令

$$\phi(x, y, \tau) = \psi(x, y, \tau)\theta(x, y, \tau) \quad (1.2)$$

可得

$$\begin{aligned} & C \left(\psi \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \theta \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right) + 2A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \theta + \psi \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + 2B \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \theta + \psi \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \\ & - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \theta + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \psi \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \theta + 2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \psi \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + S \end{aligned} \quad (1.3)$$

要消除关于 θ 的不对称算子, 须令

$$A\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad B\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (1.4)$$

从而

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + A^2 \right) \psi \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial B}{\partial y} + B^2 \right) \psi$$

方程(1.3)简化为扩散方程

$$\begin{aligned} & C \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\theta}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right) + \left[\left(A^2 - \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \left(B^2 - \frac{\partial B}{\partial y} \right) \right] \theta \\ & - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{S}{\psi} \end{aligned} \quad (1.5)$$

我们称方程(1.5)为对流扩散方程(1.1)的等价扩散方程, θ 为对流扩散量 ϕ 的等价扩散量, 而方程(1.4)所定义的 ψ 为对流迎风函数。由于在方程(1.5)中, 对流系数 A 、 B 处于完全同等的地位、与对流有关的只是一个不具方向性的扩散汇, 等价方程中不存在任何迎风效应。对流算子所引起的迎风效应, 就完全体现在对流迎风函数 ψ 中。

注意到, 依 ψ 的定义式(1.4), ψ 的解析性要求对流系数间具有关系

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad (1.4')$$

可见从分析上说, 并非对任意对流系数分布皆存在普遍有效的对流迎风函数。然而, 这一因素并不给差分离散处理带来实质性的限制, 因为差分格式是建立在局部离散子域上的, 并不直接涉及整体上的关系。对于对流扩散方程的五点式差分处理, 如图 1 所示, 离散点 $C(i\Delta x, j\Delta y)$ 上的方程所涉及的, 只有对流系数 A 在 x 方向网格线 ew 上的分布 $A(x, j\Delta y)$ 、以及 B 在 y 方向网格线 ns 上的分布 $B(i\Delta x, y)$ 。除此之外的对流系数性态是无关的, 是差分离散所不能反映出来的, 作任何假设都是无妨的。因此, 在只涉及到局部离散子域内部网格线段的差分处理范围内, 对于任意对流系数分布, 我们均可依式(1.4)写出简明的对流迎风函数表达式

$$\psi = \exp \left[\int (A dx + B dy) \right] \quad (1.4'')$$

而不至引起任何问题。

为直观了解对流扩散量 ϕ 与等价扩散量 θ 的行为差别, 试考虑如下的定常对流扩散方程

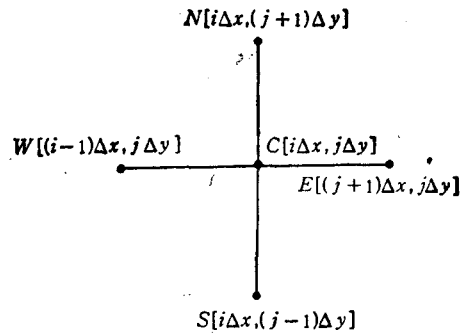


图1 离散网格线段

$$\frac{U}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{V}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (1.6)$$

并附以边界条件

$$\left. \begin{aligned} \phi &= 0 & r &\rightarrow \infty \\ -K \frac{\partial \phi}{\partial r} &= \frac{q}{4\pi r^2} & r &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。依照坐标系置换,不难推断,这在物理上可以对应于一个热源吹过半无限介质表面的导热问题。恒定热源向介质均匀放热,在与热源同步的参照系上所观察到的介质导热过程是定常的。方程(1.6)、(1.7)中 U 、 V 为介质相对于热源的运动速度分量、 α 为介质的导温系数、 K 为介质导热系数、 q 为热源放热强度,而介质表面的 z 值为零。

常系数对流扩散方程(1.6)具有整体有效的对流迎风函数,可确定为

$$\phi = \exp\left(\frac{U}{2\alpha} x + \frac{V}{2\alpha} y\right) \quad (1.8)$$

而等价扩散方程为

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \left[\left(\frac{U}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{V}{2\alpha}\right)^2\right] \theta \quad (1.9)$$

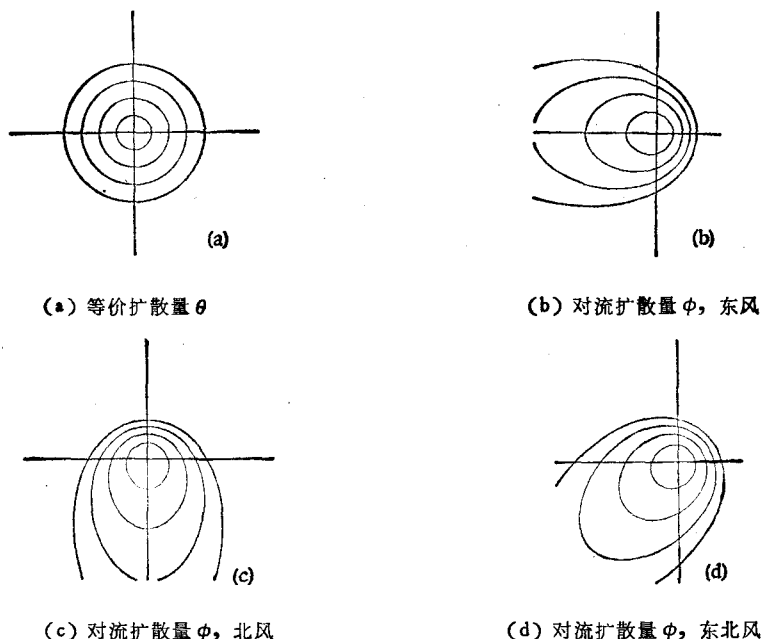
结合边界条件,得 θ 的解式

$$\theta = \frac{q}{4\pi Kr} \exp\left[-\sqrt{\left(\frac{U}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{V}{2\alpha}\right)^2} r\right] \quad (1.10)$$

而对流迎风函数 ϕ 与等价扩散量相组合,给出对流扩散量 ϕ

$$\begin{aligned} \phi &= \phi\theta \\ &= \frac{q}{4\pi Kr} \exp\left[\frac{U}{2\alpha} x + \frac{V}{2\alpha} y - \sqrt{\left(\frac{U}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{V}{2\alpha}\right)^2} r\right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

图2示出等价扩散量 θ 和对流扩散量在介质表面上的等值分布形状,其中(a)表对称的等价扩散量 θ 。当介质相对于热源自东往西运动时(吹东风, $\frac{U}{2\alpha} = -5$, $\frac{V}{2\alpha} = 0$),得(b)所示对流扩散场 ϕ , 对称的 θ 分布被自东向西吹散;当介质相对于热源自北往南运动时(吹北风, $\frac{U}{2\alpha} = 0$, $\frac{V}{2\alpha} = -5$),得(c)所示 ϕ 分布, θ 被自北往南吹散;当介质相对热

图 2 等价扩散量 θ 和对流扩散量 ϕ 的等值分布

源自正东北往正西南运动时(吹东北风, $\frac{U}{2\alpha} = -\sqrt{5}/2$, $\frac{V}{2\alpha} = -\sqrt{5}/2$), 得(d)所示 ϕ 分布, θ 被自东北往西南吹散。 θ 的分布简单对称, 而被对流迎风函数 ϕ 作用(吹风)后成 ϕ , 变得复杂化了。

直观印象表明, 把握等价扩散量 θ 比把握对流扩散量来得容易。下文要依此启迪, 构造对流扩散方程的有限差分格式。

二、迎风变换下对流扩散方程的差分格式

依照迎风变换, 二维定常对流扩散方程

$$2A \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2B \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + S \quad (2.1)$$

分解为扩散方程

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \left[\left(A^2 - \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \left(B^2 - \frac{\partial B}{\partial y} \right) \right] \theta - \frac{S}{\phi} \quad (2.2)$$

和对流迎风函数

$$\phi = \exp \left[\int (A dx + B dy) \right] \quad (2.3)$$

对扩散方程(2.2)施以简单的中心差分, 得到关于等价扩散量 θ 的五点差分格式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} (\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}) + \frac{1}{k^2} (\theta_{i,j+1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j-1}) \\ & - \left[\left(A_{i,j}^2 - \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2h} \right) + \left(B_{i,j}^2 - \frac{B_{i,j+1} - B_{i,j-1}}{2k} \right) \right] \theta_{i,j} - \frac{S_{i,j}}{\phi_{i,j}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中 h, k 分别为 x, y 方向网格尺度。在子域 $(i-1, i+1)\Delta x \times (j-1, j+1)\Delta y$ 内, 对流迎风函数可积分确定为

$$\phi = \exp(A_{i,j}x + B_{i,j}y) \quad (2.5)$$

从而各点的对流扩散量成为

$$\left. \begin{aligned} \phi_{i,j} &= \phi_{i,j} \theta_{i,j} \\ \phi_{i-1,j} &= e^{-A_{i,j}h} \phi_{i,j} \theta_{i-1,j} \\ \phi_{i+1,j} &= e^{A_{i,j}h} \phi_{i,j} \theta_{i+1,j} \\ \phi_{i,j-1} &= e^{-B_{i,j}k} \phi_{i,j} \theta_{i,j-1} \\ \phi_{i,j+1} &= e^{B_{i,j}k} \phi_{i,j} \theta_{i,j+1} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

以 $\theta_{i,j} = \phi_{i,j}/\phi_{i,j}$ 代入(2.4), 得到关于对流扩散量 ϕ 的差分方程

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} (e^{-A_{i,j}h} \phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + e^{A_{i,j}h} \phi_{i-1,j}) \\ & + \frac{1}{k^2} (e^{-B_{i,j}k} \phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + e^{B_{i,j}k} \phi_{i,j-1}) \\ & = \left[\left(A_{i,j}^2 - \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2h} \right) + \left(B_{i,j}^2 - \frac{B_{i,j+1} - B_{i,j-1}}{2k} \right) \right] \phi_{i,j} - S_{i,j} \end{aligned} \quad (2.7)$$

以脚注 c, e, w, n, s 分别表示 $(i, j), (i+1, j), (i-1, j), (i, j+1), (i, j-1)$, 可将上式写成如下形式

$$a_c \phi_c = a_e \phi_e + a_w \phi_w + a_n \phi_n + a_s \phi_s + s_c \quad (2.8)$$

其中各关联系数为

$$a_c = \left[\left(A_c^2 - \frac{A_e - A_w}{2h} \right) + \left(B_c^2 - \frac{B_n - B_s}{2k} \right) \right] + 2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) \quad (2.9)$$

$$a_e = \frac{1}{h^2} e^{-A_c h} \quad a_w = \frac{1}{h^2} e^{A_c h} \quad (2.10)$$

$$a_n = \frac{1}{k^2} e^{-B_c k} \quad a_s = \frac{1}{k^2} e^{B_c k}$$

显然, 当对流系数为正时, a_w 大于 a_e , a_s 大于 a_n , 上游的贡献大于下游的贡献。当对流系数增至某一程度时, 下游贡献相对可忽略不计。此所谓迎风效应使然。此外, 对流扩散方程不存在源项 s 时有特解 $\phi = \text{const}$, 要求准确的差分格式具有系数关联式(脚注 nb 表相邻网格点)

$$\begin{aligned} a_c &= \sum a_{nb} \\ &= a_e + a_w + a_n + a_s \end{aligned} \quad (2.11)$$

而差分方程(2.7)在 $A_{i,j}h$ 和 $B_{i,j}k$ 较大时偏离这一条件较远, 所以为对离散所带来的偏差有所纠正, 我们以准确关系(2.11)取代(2.9), 中心点系数改为

$$a_c = 2 \left[\frac{1}{h^2} \cosh(A_c h) + \frac{1}{k^2} \cosh(B_c k) \right] \quad (2.11')$$

注意到指数函数的 Taylor 展开式, 可以推得差分方程(2.8)的等价微分方程为

$$2A \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2B \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + S$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(-\frac{1}{3!} A^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2!2!} A^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{3!} A \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right) h^2 \\
& + 2 \left(-\frac{1}{5!} A^5 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{4!2!} A^4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{3!3!} A^3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{1}{2!4!} A^2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right. \\
& - \left. \frac{1}{5!} A \frac{\partial^5 \phi}{\partial x^5} + \frac{1}{6!} \frac{\partial^6 \phi}{\partial x^6} \right) h^4 + 2 \left(-\frac{1}{3!} B^3 \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2!2!} B^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right. \\
& - \left. \frac{1}{3!} B \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right) k^2 + 2 \left(-\frac{1}{5!} B^5 \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{4!2!} B^4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right. \\
& - \left. \frac{1}{3!3!} B^3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + \frac{1}{2!4!} B^2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - \frac{1}{5!} B \frac{\partial^5 \phi}{\partial y^5} + \frac{1}{6!} \frac{\partial^6 \phi}{\partial y^6} \right) k^4 + O(h^6, k^6)
\end{aligned}$$

可见差分方程具有二阶相容性。

系数关联式(2.11)保证一般内点上中心点系数等于相邻点系数之和。在与第一类边界(给定 ϕ 值)相邻的内点上,中心点系数大于相邻点系数之和,且对流扩散方程的适定性要求至少在一个点上给定第一类边界条件。于是,离散方程组满足 Scarborough 准则^[4]:

$$\left. \begin{aligned} \sum |a_{nb}| & \leq 1 \quad \text{对所有的方程} \\ |a_c| & < 1 \quad \text{对其中至少一个方程} \end{aligned} \right\}$$

提供 Gauss-Seidel 逐点计算法收敛的充分必要条件,从而也保证了差分方程的稳定性。由于我们对离散子域尺度未作任何的限制,这一稳定性是无条件成立的。

三、数值算例及讨论

变系数对流扩散方程

$$\begin{aligned}
2A(1+xy) \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2B(1+xy) \frac{\partial \phi}{\partial y} & = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\
- 4A^2xy \frac{\exp[2A(x-1)]}{1-\exp(-2A)} \frac{1-\exp[2B(y-1)]}{1-\exp(-2B)} & \\
- 4B^2xy \frac{1-\exp[2A(x-1)]}{1-\exp(-2A)} \frac{\exp[2B(y-1)]}{1-\exp(-2B)} & \quad (3.1)
\end{aligned}$$

满足边界条件

$$\left. \begin{aligned} \phi(0, y) & = \frac{1-\exp[2B(y-1)]}{1-\exp(-2B)} \\ \phi(x, 0) & = \frac{1-\exp[2A(x-1)]}{1-\exp(-2A)} \\ \phi(1, y) & = \phi(x, 1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

的分析解为

$$\phi(x, y) = \left\{ \frac{1-\exp[2A(x-1)]}{1-\exp(-2A)} \right\} \left\{ \frac{1-\exp[2B(y-1)]}{1-\exp(-2B)} \right\} \quad (3.3)$$

方程(3.1)的对流系数不满足式(1.4'),可检验等价变换的一般性。解式(3.3)呈指数型, A 、 B 值较大时有显著的边界层效应,可考查格式对边界层的分辨能力。

计算中将区域 $(0, 1) \times (0, 1)$ 划分为 $m \times n = 20 \times 20$ 个均匀网格,网格间距记为

h , 则差分方程

$$a_c \phi_c = a_c \phi_c + a_w \phi_w + a_n \phi_n + a_s \phi_s + S_c \quad (3.4)$$

中诸系数为

$$a_c = \frac{2}{h^2} \{ \cosh[A(1+x_c y_c)] + \cosh[B(1+x_c y_c)] \} \quad (3.5)$$

$$a_c = \frac{1}{h^2} e^{-A(1+x_c y_c)h} \quad a_w = \frac{1}{h^2} e^{A(1+x_c y_c)h} \quad (3.6)$$

$$a_n = \frac{1}{h^2} e^{-B(1+x_c y_c)h} \quad a_s = \frac{1}{h^2} e^{B(1+x_c y_c)h}$$

所得代数方程组以分析解为初值循逐线超松弛法 (SLOR) 迭代求解。超松弛形式为

$$\phi^{[l+1]} = \phi^{[l]} + \lambda(\phi^{[l+1]} - \phi^{[l]})$$

其中超松弛系数取为 1.5, l 表第 l 次迭代。迭代收敛准则取为

$$\left| \frac{\phi^{[l+1]} - \phi^{[l]}}{\phi^{[l+1]}} \right| \leq 10^{-6}$$

全场平均相对误差定义为

$$E_r = \left[\sum_{i,j} \left(\frac{\phi_{ei,j} - \phi_{ai,j}}{\phi_{ai,j}} \right)^2 / (m-1)(n-1) \right]^{1/2} \times 100\%$$

其中 ϕ_e 表计算值, ϕ_a 为分析解。

计算对大小不同的多种对流系数进行, 并将本文格式与常用中心差分 ($Ah = 0.1$ 和 $Ah = 0.5$ 两种情况) 或迎风差分 (其余情况) 计算结果作一一对比。表 1 给出各计算工况的全场平均相对误差及运算迭代次数。可见, 较之中心差分或迎风差分格式, 本文格式的平均误差有量级上的减小, 收敛速度亦大有提高。图 3、图 4 对 Ah 值为 0.5 和 2.0 两种情况下的计算值进行对比, 表明本文格式结果与精确解相当吻合, 尤其对边界层效应有良好适应性, 而中心差分格式或迎风差分格式皆有较大误差, 尤以接近边界处偏离精确值甚远。图中 x 方向以均匀间距取三个截面, 而 ϕ 值以 x 方向 0.25 长度为一个单位。

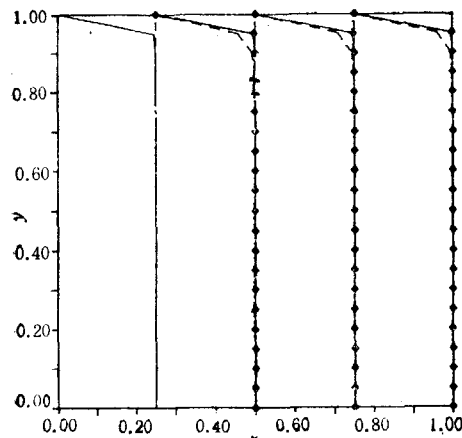


图 3 $A = B$, $Ah = 0.5$ 时准确解 (实线) 与本文格式计算值 (\diamond)、中心差分格式计算值 (接近实线的虚线) 截面分布比较

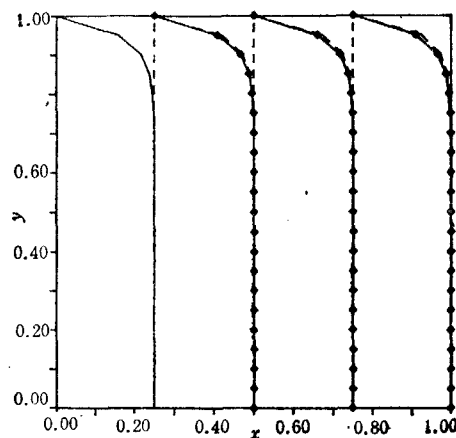


图 4 $A = B$, $Ah = 2.0$ 时准确解 (实线) 与本文格式计算值 (\diamond)、迎风差分格式计算值 (接近实线的虚线) 截面分布比较

表1 不同 Ah 值下全场相对平均误差 (%) 及收敛迭代次数

$(A=B) Ah$		0.1	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	25.0
平均 误差	本文格式	0.0141	0.2968	0.5307	0.2523	0.0012	0.0000	0.0000
	参考格式	0.1302	2.1008	6.3817	4.5809	1.9877	1.0264	0.4198
迭代 次数	本文格式	30	13	13	3	1	1	1
	参考格式	157	30	39	17	13	13	10

参考格式系中心差分格式 ($Ah = 0.1, Ah = 0.5$) 和迎风差分格式 (其余 Ah 值)

迎风变换下对流扩散方程的有限差分格式具有二阶精度和无条件稳定性, 适于边界层效应, 收敛速度快, 且形式极为简便, 正推广应用于粘性流动差分计算。关于 Navier-Stokes 方程的迎风变换及相应差分方法, 将另文专载。

本文工作承北京大学陈耀松先生指点, 谨致谢忱。

参 考 文 献

- [1] Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, (1980).
- [2] Eckert, E. R. G. and R. M. Drake, Jr., Analysis of Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, (1972).
- [3] Lin, C. C. and L. A. Segel, Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences, (1974).
- [4] Scarborough, J. B., Numerical Mathematical Analysis, 4th ed., Johns Hopkins Press, Baltimore, (1958).

A TRANSFORMATION OF THE CONVECTIVE DIFFUSION EQUATION WITH CORRESPONDING FINITE DIFFERENCE METHOD

Chen Guoqian Gao Zhi

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract An analytical transformation with corresponding finite difference method of the convective diffusion equation into a diffusion equation coupled with a so-called upwind convection function is proposed in this paper. Reflecting the upwind effect in convective diffusion phenomena with a brief exponential representation, the upwind convection function reduces in essence the difficulty due to the non-symmetrical convection operator, and thus can bring great convenience to the numerical aspect of the convective diffusion equation. The proposed finite difference scheme is second-order consistent and unconditionally stable, and shows a high accuracy in illustrative computations.

Key words convective diffusion equation, upwind effect, analytical transformation, finite difference scheme