第23卷 第4期　　力学学报　　Vol. 23, No. 4
1991年7月　　ACTA MECHANICA SINICA　　July, 1991

表面张力液柱中粘性引起的模分裂[1)]

朱如曾
（中国科学院力学研究所）

提要　本文证明粘性会使得表面张力所维持的无限长液柱运动模发生分裂(或称分叉)，结果是每个轴对称模一次分裂为无穷个。这种现象类似于原生物理学中的 Zeemen 和 Stark 效应。无粘条件下的不稳定模分裂后还出现可数无穷个负势能的稳定模，这是关于连续系统模稳定性的 Hare 和 Chandrasekhar 势能判据的一个反例，并解释其物理意义。

关键词　粘性，连续系统，模分裂，能量原理

1. 引言

在连续系统中，平衡态附近小运动模及其在各种条件下的变化或分裂的研究，对于稳定性分析，稳定性控制以及连续系统的不变流形的研究都有重大意义[1-4]。本文指出，在无限长的，由表面张力维持的液柱中，粘性将引起每个模分裂为可数无穷多个模；并且无粘时的不稳定模分裂出可数无穷个稳定模和一个不稳定模，但它们的势能 Σ 却都是负的，从而成为关于连续系统模稳定性的 Hare 和 Chandrarsekhar 势能判据(模稳定的充分必要条件是 $\Sigma > 0$)[5,6] 的一个反例。另一个类似的反例曾由文[7]给出。单支一次分叉为可数无穷支的现象以及出现违反势能判据的分支，这是连续系统才具有的，不同于有限自由度力学系统的特性。此外，粘性引起连续系统模分裂与原子物理学中外场引起微观力学系统波动方程定态解分裂的 Zeeman 和 Stark 效应颇为相象，只是前者是无穷分裂，后者是有限分裂；人们对后者有充分的了解，而对前者则了解较少。

2. 模分叉的求解

考虑均匀无限长，不可压，具有粘性和表面张力的液柱，其半径、密度、运动粘性系数、表面张力系数和平衡压力分别为 R、ρ、ν、T 和 T/R。在柱坐标下考虑，对称轴取为 z 轴。考虑表面半径的轴对称扰动 ($m = 0$)

$$r_s = R + \varepsilon_0 e^{ikz+\sigma t} \tag{1}$$

此处 ε_0 为小常数。各物理量对平衡态的小偏离遵从如下方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u} = -\nabla\frac{\delta p}{\rho} + \nu\nabla^2\boldsymbol{u},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{2}$$

和边界条件

$$\boldsymbol{u}|_{r=0},\ \delta p|_{r=0}\ 有限 \tag{3}$$

---

1) 国家自然科学基金资助项目。

本文于1990年4月12日收到第一稿，于1990年10月29日收到修改稿。

$$\frac{\partial r_s}{\partial t} = u_r\big|_{r=R},\ \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\Big|_{r=R} = 0 \tag{4}$$

$$\left(\delta p - 2\nu\rho\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)\Big|_{r=R} = -\frac{T}{R^2}(1-x^2)\varepsilon_0 e^{ikz+\sigma t} \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{u}(u_r,u_z)$ 为流体的速度扰动，δp 是压力扰动，

$$x = kR \tag{6}$$

从上述方程和边界条件可解出[6]

$$u_r = \frac{-\nu\varepsilon_0(k^2+\kappa^2)}{I_1(x)}\left[\frac{2x^2I_1(x)I_1(\kappa r)}{(x^2+y^2)I_1(y)} - I_1(kr)\right]e^{ikz+\sigma t} \tag{7}$$

$$u_z = \frac{\nu\varepsilon_0(k^2+\kappa^2)}{iI_1(x)}\left[\frac{2xyI_1(x)I_0(\kappa r)}{(x^2+y^2)I_1(y)} - I_0(kr)\right]e^{ikz+\sigma t} \tag{8}$$

和特征方程

$$2x^2(x^2+y^2)\frac{I_1'(x)}{I_0(x)}\left[1 - \frac{2xy}{x^2+y^2}\cdot\frac{I_1(x)I_1'(y)}{I_1(y)I_1'(x)}\right]$$

$$-(x^4-y^4) = \frac{TR}{\rho\nu^2}\cdot\frac{xI_1(x)}{I_0(x)}(1-x^2) \tag{9}$$

此处

$$\sigma = \nu(y^2-x^2)/R^2,\ y = \kappa R \tag{10}$$

$I_0(x)$ 和 $I_1(x)$ 分别为零级和一级虚容量 Bessel 函数，$K_0(x)$ 为零级虚容量汉克尔函数。

我们知道，在无粘情况下 ($\nu=0$)，模由 (k,m) 或 (x,m) 表示[6]，并且当

$$0 < x < 1 \tag{11}$$

时，模 $(x,0)$ 不稳定，当 $x>1$ 时，模 $(x,0)$ 稳定。

现在先把注意力限制在条件(11)下。此时，对指定的 x，当 $y=x$ 时，(9)式左边为零；当 $y\to\infty$，(9)式左边趋向∞，所以方程(9)至少有一对实数根 $\pm y_0$，并满足 $y_0^2 > x^2$，从而(10)式给出 $\sigma_0 > 0$，所以(7)和(8)式给出的模 $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r})$ 指数发散。此外，方程(9)还具有可数无穷对共轭纯虚根。为了证明此点，令$y=i\beta$，于是(9)式化为如下形式

$$F(x,\beta) = \left\{2x^2(x^2-\beta^2)\frac{I_1'(x)}{I_0(x)}\left[1 - \frac{2x\beta I_1(x)}{(x^2-\beta^2)J_1(\beta)}\cdot\frac{J_1'(\beta)}{I_1'(x)}\right]\right.$$

$$\left.-x^4+\beta^4\right\}\frac{I_0(x)}{xI_1(x)}(1-x^2)^{-1} = \frac{TR}{\rho\nu^2} \tag{12}$$

其中 $J_1(\beta)$ 为一阶 Bessel 函数。$J_1(\beta)$ 在实轴上有无穷多对零点，记为

$$\pm\alpha_l,\ l = 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

其中 $\alpha_0 = 0$，其余 α_l 均大于零。对 $l \neq 0$，当 $\beta\to\alpha_l\pm 0$ 时，$F(x,\beta)\to\mp\infty$，故方程(12)在 α_l 与 α_{l+1} ($l\neq 0$) 之间至少有一个实根，所以方程(9)有可数无穷对纯虚根 $\pm y_n$

$$\pm y_n = \pm i\beta_n,\ n = 1, 2, \cdots\cdots \tag{13}$$

故(10)式给出 $\sigma_n(n \neq 0) < 0$，(7) 式和(8)式连同 $\kappa = \kappa_n = y_n/R$ 给出可数无穷个指数衰减的不同的速度分布函数 $u_1, u_2, \cdots\cdots$，按模的定义，它们代表不同的运动模式。由于 $\sigma_n < 0$，故它们是稳定模式。由上可见，粘性情况下的模由三个量子数 (x, m, n) 表示。

其次讨论 $x > 1$ 的情况。仍令 $y = i\beta$。于是仍有方程(12)。现在由于

$$1 - x^2 < 0$$

所以对 $l \neq 0$，当 $\beta \to \alpha_l \pm 0$ 时，$F(x,\beta) \to \pm\infty$。因此方程(9)仍有无穷对纯虚根，由(13)式表示。于是仍得可数无穷多个指数衰减模，故模仍由三个量子数 (x, m, n) 表示。

由上可见，把 ν 当作控制参量，则在 ν 的零值处和 ν 增加的方向上，系统每支模式均一次分叉为可数无穷支。这与原子物理学中外场引起原子系统 Schrödinger 方程本征态分裂的 Zeeman 和 Stark 效应相类似，但后者是有限分裂，而本文则是无穷分裂；不过人们对后者的规律已有充分了解，而对前者则了解较少。

3. 各模的能量与稳定性

取平衡态的势能为零。势能由表面形状决定，与液体有无粘性无关。因此文[6]中第 522 页在无粘条件下求得的势能公式可照搬。于是模 $(x, 0, n)$ 在单位长度上具有的位能 Σ 为

$$\Sigma = \frac{\pi}{2} T(x^2 - 1) \frac{\varepsilon_0^2}{R} e^{2\sigma_n t}$$

当(11)式成立时，$\Sigma < 0$。可是上文已证明，此时除 $n = 0$ 外，模 $(x, 0, n)$ 都稳定。所以这些模就是 Hare 和 Chardrasekhar 模稳定性判据中条件必要性的反例。

4. 物理解释

每个无粘不稳定模包括互逆的两种运动方式，其空间位移分布成比例，其中一种发散，另一种收敛。粘性使发散方式的位移分布发生畸变，而使收敛方式的位移分布分裂为可数无穷个运动方式。所有分裂和畸变了的方式，其位移分布都各不成比例，从而形成可数无穷个稳定模和一个不稳定模。

参　考　文　献

[1] Hussaini, M. Y. & Zang, T. A., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 19(1987), 339.
[2] Bezdenezhnykh, N. A. et al., *Fluid Mech. Sov. Res.*, 15(1986), 11.
[3] Stakgold, I., SIAM Rev., 13(1971), 289.
[4] Lighthill, M. J., Wave in Fluid, Chambridge University Press (1978).
[5] Hare, A., *Phil. Mag.*, 48(1959), 1305.
[6] Chandrasekhar, S., Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford University Press (1961).
[7] Zhu Ruzeng, *Phys. Fluids A*, 1(1989), 954.

VISCOSITY-INDUCED MODE BIFURCATIONS IN AN INFINITE CAPILLARY LIQUID CYLINDER

Zhu Ruzeng

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences*)

Abstract This paper points out that viscosity can induce mode splitting (or called bifurcation) of the type of one-to-infinity in an infinite capillary liquid cylinder. This phenomenon is similar to the Zeeman and Stark effects in atomic physics, although of different importance. After splitting there occur stable modes with negative potential energy, which are opposite to Hare and Chandrasekhar's energy principle.

Key words viscosity, continuous system, bifurcation, energy principle