

表2 粗糙区界限判别参数不同取值时

Karman 公式的精度

$Re \cdot \frac{K_s}{D}$	按本文式(9)计算的近似值 $\Delta\lambda_R/\lambda_T$	($Re = 1 \times 10^4 \sim 1 \times 10^8$) 精确值 $\Delta\lambda_R^*/\lambda_T$	备注
2000	0.008	0.008~0.008	公式原有精度
1600	0.010	0.010~0.010	Moody 界限
1000	0.016	0.015~0.016	
500	0.033	0.029~0.031	Альтушль 界限
400	0.041	0.035~0.038	工程许可精度
300	0.054	0.045~0.049	

从工程实用观点出发, 并与光滑区界限精度一致, 本文建议, 粗糙区范围: $Re \cdot K_s/D \geq 400$, Karman 粗糙律的相对偏差精确值

$$\frac{\Delta\lambda_R^*}{\lambda_T} = \frac{\lambda_T - \lambda_R}{\lambda_T} \leq 0.038.$$

由图4可见: 对于参数为 $Re \cdot K_s/D$ 的两种粗糙区界限, 基本上符合前述不变精度和合理精度两个原则。而在 Rouse 界限所确定的各分区点上, Karman 公式的精度随 Re 变化较大。而且, Rouse 界限精度偏高, 过于限制了 Karman 公式的适用范围。

5. 结论

对于工业管路, 沿用粗糙雷诺数 $Re_* =$

$u_* K_s/\nu$ 或 K_s/δ 为湍流两个区域的界限 判别参数是不恰当的, 光滑区界限判别参数也不能套用 $Re \cdot K_s/D$, 它们都不是相应分区界限处湍流阻力规律转变的控制因素。

由图5可见, 本文划分的湍流区域为
光滑区: $\lambda_s \cdot Re \cdot K_s/D \leq 1/4 (D/K_s \geq 640)$
粗糙区: $Re \cdot K_s/D \geq 400$
在保证足够的工程计算精度前提下, 适当扩大了 Prandtl 光滑律与 Karman 粗糙律的适用范围。

承哈尔滨建工学院水力学教研室沈仲棠先生热心提供许多宝贵资料, 谨此致谢。

参 考 文 献

- [1] Lewis F. Moody, *Transactions of the A.S.M.E.* 66, 8(1944).
- [2] 周谟仁主编, 流体力学·泵与风机, 建筑工业出版社(1979), 107.
- [3] Смыслов, В. В., Гидравлика и Аэродинамика Виша Школа (1979) 173с.
- [4] Colebrook C. F. and White C. M., *Proc. Roy. Soc. (A)* Vol. 161(1937) pp. 367—381.

(本文于1990年1月2日收到修改稿)

积分单元法计算双柱绕流¹⁾

庄峰青 姚德良

(中国科学院力学研究所)

提要 本文利用解不可压纳维尔-斯托克斯方程的积分单元法计算了双柱绕流的流场。结果表明, 积分单元法是计算柱群绕流的一种方法。

关键词 积分单元法, 双柱绕流, 计算流体力学, 不可压缩流

关于单柱体绕流计算的文章发表的已有很多^[1,2]。在实际工程问题中, 例如柱柱式海洋石油平台的受力计算, 需要进行多柱体即柱群的绕流计算。本文所进行的双柱绕流计算就是柱

群绕流计算工作的第一步。

1. 积分单元法

1.1 区域离散化

先把所研究的区域分为形状大小均任意的许多子区域, 一个子区域叫做一个单元。单元的质心定义为代表此单元的节点。具有公共界面的两个单元称为相邻单元。相邻单元所对应的两节点之间的连线叫做节点连线。节点连线

1) 国家自然科学基金资助项目。

的特征由其两端的端点、节点间的界面,界面的单位法向量的方向余弦以及两节点各自到界面的距离来表达,而单元的特征由其体积以及代表它的节点的序号来表示,有了这些定义以后就能进行区域的离散化。

1.2 积分表达式

积分单元法的关键在于把微分方程写成某些量的梯度、散度和旋度的组合,然后应用下述三个向量积分定理,把任一物理量在此单元上的体积分化为在此单元界面上的面积分。这三个定理为:

$$\int_V \nabla F dv = \int_S n F ds \quad (1.1)$$

$$\int_V \nabla \cdot U dv = \int_S n \cdot U ds \quad (1.2)$$

$$\int_V \nabla \times U dv = \int_S n \times U ds \quad (1.3)$$

其中 F 和 U 分别为标量函数和向量函数, dv 是单元中的体积元素, ds 是单元界面上的面积元素,而 n 是单元界面的外法线单位向量。上面三个式子中的右边部分可近似表示为:

$$\int_S n F ds \approx \sum_{j \in N_i} n_{ij} F_{ij} s_{ij} \quad (1.4)$$

$$\int_S n \cdot U ds \approx \sum_{j \in N_i} n_{ij} U_{ij} s_{ij} \quad (1.5)$$

$$\int_S n \times U ds \approx \sum_{j \in N_i} n_{ij} \times U_{ij} s_{ij} \quad (1.6)$$

其中下标 ij 表示该量是在单元 i 和单元 j 的界面上赋值,而 N_i 是所有与单元 i 相邻的单元所构成的集合。应该强调一下,(1.4)–(1.6)中的求和是对包围单元 i 的所有界面进行的。

从(1.1)–(1.6)式可知, F 和 U 的守恒性是很自然的结果。此外,运用(1.1)–(1.3)三个积分定理于空间导数可使单元节点上的求 n 阶导数的近似值问题化为求界面上的 $(n-1)$ 阶导数的近似值问题。

1.3 界面值的插值法

方程(1.4)–(1.6)中有界面值,因此为使方程可以求解,必须提出用单元节点值来表示界面值的插值方法。积分单元法成败的关键在于能否选用适当的插值方法,因为插值方法与数

值解的稳定性密切相关。插值方法很多,最简单的是线性插值:

$$F_{ij} = (d_i F_j + d_j F_i) / (d_i + d_j) \quad (1.7)$$

其中 F_i, F_j 分别为 F 在单元 i 和 j 的节点上的值, d_i 和 d_j 分别为自节点 i 和 j 到界面 ij 的垂直距离,以后我们令 $d_{ij} = d_i + d_j$ 。

如果动量方程中对流项是主项,则线性插值可能导致不稳定的解,因此对流项要采用迎风插值法:

$$(n_{ij} \cdot U_{ij}) U_{ij} = (n_{ij} \cdot U_{ii}) U_i, \quad \text{当 } (n_{ij} \cdot U_{ij}) > 0 \text{ 时} \quad (1.8)$$

$$(n_{ij} \cdot U_{ij}) U_{ij} = (n_{ij} \cdot U_{jj}) U_j, \quad \text{当 } (n_{ij} \cdot U_{ij}) < 0 \text{ 时} \quad (1.9)$$

2. 基本方程及边界条件

我们计算二维双方柱绕流问题。计算区域为长 150cm, 宽 110cm 的矩形区域 $ABCD$ (见图 1), 左边为入口, 右边为出口, 上下为固壁。该区域中有两个方柱, 截面均为边长 10cm 的正方形, 左面的方柱离入口 40cm, 离上固壁 40cm, 右面的方柱离入口 70cm, 离下固壁 40cm。

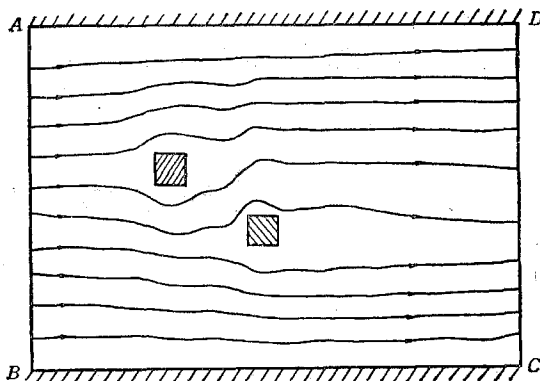


图 1 双柱绕流流线图

粘性不可压流体运动满足纳维尔-斯托克斯方程:

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla \phi - A + E \quad (2.2)$$

其中

$$\phi = p/\rho + gz \quad (2.3)$$

$$A = \nabla \cdot (UU) = (U \cdot \nabla)U \quad (2.4)$$

$$\mathbf{E} = \nu \nabla^2 \mathbf{U} \quad (2.5)$$

另外定义涡量为

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{U} \quad (2.6)$$

定义速度散度为

$$D = \nabla \cdot \mathbf{U} \quad (2.7)$$

上面式子中, p 为压力, \mathbf{U} 为速度向量, ν 为运动粘性, ρ 为流体密度, g 为重力加速度, t 为时间, x 为垂直坐标, ϕ 为总位势 (等于压力势与重力势之和), \mathbf{A} 为对流加速度, \mathbf{E} 为粘性力。

边界条件为:

在入口 AB 上

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

在上下固壁面 AD 和 BC 及柱面上

$$\left. \begin{aligned} u &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

在出口 DC 上

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

3. 积分单元法计算方法

将第二节所述的积分单元法步骤用于上一节中各方程则可得到下列计算方法。

设已知 $n\Delta t$ 时的 $\mathbf{U}^{(n)}$, $p^{(n)}$, 求 $(n+1)\Delta t$ 时的 $\mathbf{U}^{(n+1)}$, $p^{(n+1)}$ 的步骤如下:

(1) 对(3.7)式应用向量积分定理(2.2)及(1.5)得

$$D_i^{(n)} v_i = \sum_{j \in N_i} (\mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{U}_{ij}^{(n)}) s_{ij} \quad (3.1)$$

由上式求 $n\Delta t$ 时的散度场 $D_i^{(n)}$ 。

(2) 对(2.4)式应用向量积分定理(1.2)及(1.5)整理后得

$$\mathbf{A}_i^{(n)} v_i = \sum_{j \in N_i} (\mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{U}_{ij}^{(n)}) \mathbf{U}_{ij}^{(n)} s_{ij} \quad (3.2)$$

同理可得:

$$\mathbf{E}_i^{(n)} v_i = \nu \sum_{j \in N_i} (\mathbf{U}_j^{(n)} - \mathbf{U}_i^{(n)}) s_{ij} / d_{ij} \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i^{(n)} v_i = \sum_{j \in N_i} (\mathbf{n}_{ij} \times \mathbf{U}_{ij}^{(n)}) s_{ij} \quad (3.4)$$

由上面三式求 $n\Delta t$ 时的对流加速度场 $\mathbf{A}_i^{(n)}$, 粘性力场 $\mathbf{E}_i^{(n)}$ 和涡量场 $\boldsymbol{\omega}_i^{(n)}$ 。

(3) 由

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in N_i} (\phi_i^{(n+1)} - \phi_i^{(n)}) s_{ij} / d_{ij} \\ &= D_i^{(n)} v_i / \Delta t - \sum_{j \in N_i} (\mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{A}_{ij}) s_{ij} \\ &+ \sum_{j \in N_i} (\mathbf{n}_{ij} \mathbf{E}_{ij}) s_{ij} \end{aligned} \quad (3.5)$$

求 $(n+1)\Delta t$ 时的总位势 $\phi_i^{(n+1)}$ 。

(4) 由

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{(n+1)} &= \mathbf{U}_i^{(n)} - \mathbf{A}_i \Delta t \\ &- \frac{\Delta t}{\nu} \sum_{j \in N_i} \mathbf{n}_{ij} \phi_{ij}^{(n+1)} s_{ij} + \mathbf{E}_i \Delta t \end{aligned} \quad (3.6)$$

求 $(n+1)\Delta t$ 时的速度场 $\mathbf{U}_i^{(n+1)}$ 。

(5) 由

$$\phi^{(n+1)} = p^{(n+1)} / \rho + gz \quad (3.7)$$

求 $(n+1)\Delta t$ 时的 $p^{(n+1)}$ 。

积分单元法的边界条件为:

(1) 法向速度已知的边界 (AB)

$$\left. \begin{aligned} u_B &= u_0 \\ v_B &= 0 \\ \phi_B &= \phi_I + 2\nu [u_0 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_I)] / d_{IB} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

其中下标 B 表示边界值、下标 I 表示在单元 I 上的值, d_{IB} 是从节点 I 到边界的垂直距离。

(2) 固体无滑移壁面 (AD, BC 及方柱壁面)

$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ v_B &= 0 \\ \phi_B &= \phi_I + 2\nu \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_I / d_{IB} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

(3) 连续边界 (DC)

$$\left. \begin{aligned} u_B &= u_I \\ v_B &= v_I \\ \phi_B &= g^x_B \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

4. 计算实例和讨论

将图 1 所示的计算区域分为 16×11 个方块, 得到 174 个流体单元, 2 个方柱单元。假设运动粘性 $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ 和重力 $g = 0$, $t < 0$ 时流体处于静止状态, $t = 0$ 时入口处流体突

然加速到 1cm/s 的速度, 以后就保持此入口速度, 取 $\Delta t = 1.5s$, 经 200 步计算,

$$|U^{(n+1)} - U^{(n)}| < 10^{-3}$$

时, 就认为流体运动已达定常状态, 相应的流线图见图 1. 计算对流项时用迎风插值法, 故有人工粘性. 计算中每推进一个时间步长, 要解一次 ϕ 的线性代数方程组, 我们用列主元消去法求解.

积分单元法的计算速度比有限差分方法要慢, 但比有限元素方法要快. 积分单元和差分方法中的网格的含义相似, 所以一般讲来积分单元小一些为好, 可增加数值解的精度.

我们还进行了单柱绕流计算, 对两种流场进行对比发现, 与单柱绕流的回流区相比, 双柱

绕流中左面柱子后面的回流区大大缩短, 而右面柱子后面的回流区稍有延长.

参 考 文 献

- [1] Chorin, A.J., Vortex sheet approximation of boundary layers, *J.Comp. Phys.*, 27 (1978), 428—442.
- [2] Smith, P.A. and Stansby, P.K., Impulsively started flow around a circular cylinder by the vortex method, *J.Fluid Mech.*, 194(1988), 45—77.
- [3] Yeh, G.T., Numerical Solution of Navier-Stokes Equations With an Integrated Compartment Method(ICM), *Inter. J. for Numerical Methods in Fluids*, 1, 1981, 207—223.

(本文于 1990 年 2 月 12 日收到)

部分潜入水中椭圆柱体的扭振分析

周 叮

(华 东 工 学 院)

提要 本文研究部分潜入水中椭圆柱体的扭转振动问题. 利用 Mathieu 级数以及三角级数的正交完备性, 导出了柱水耦联体系振型函数和频率方程的精确解析式. 研究还表明, 水体对椭圆柱体振动特性的影响等效于一附着在柱体上的广义分布质量.

关键词 固体-液体相互作用, 耦联振动, 椭圆柱体, 动水压力

1. 引言

随着海洋工程和水利事业的飞速发展, 柱体与水耦联振动的研究越来越引起人们的重视^[1,2]. 对于非圆柱体, 除了柱水的耦联横振外^[3,4], 还存在着柱水的耦联扭振, 而这方面的研究目前仍未见到过. 本文研究部分潜入水中椭圆柱体的扭转振动, 建立椭圆柱坐标系描述水体的运动, 通过求解马休(Mathieu)方程得到水体的速度势, 利用马休级数以及三角级数的正交完备性, 导出部分潜入水中椭圆柱体扭转

振动振型函数的精确解析式, 由椭圆柱体的边界条件决定频率方程.

2. 水体的速度势

水中椭圆柱体如图 1 所示, 柱高 H , 水深

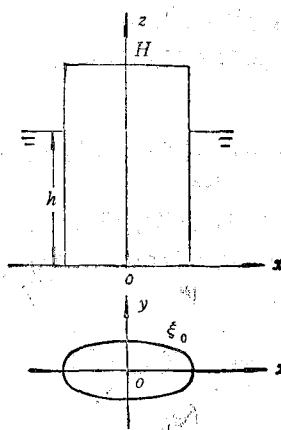


图 1 水中椭圆柱体

$h(h \leq H)$, 椭圆柱体外壁椭圆的长短半轴分别为 a 和 b . 我们用椭圆柱坐标系描述水体的运动.