

积分单元法及后台阶绕流计算*

庄峰青 姚德良

(中国科学院力学研究所)

摘 要

本文主要介绍解不可压纳维尔—斯托克斯方程的新方法:积分单元法,并用该方法计算了后台阶绕流问题.结果表明,积分单元法是计算后台阶绕流的一种较好的方法.

关键词:积分单元法;后台阶绕流;迎风插值;计算流体力学

1 引 言

常用的解纳维尔—斯托克斯方程的数值方法是有限差分法和有限元素法.在生态系统分析中采用单元分析(Compartment Analyses^[2])来模拟进化过程,该过程由没有空间导数的微分方程所描述.有限差分法比较简单,有限元素法适用于处理复杂的曲线边界和自然边界条件.单元分析中单元的形状和大小是任意的,因此不仅在离散区域上而且在更精确地代表复杂几何形体上都有很大的灵活性.

1981年美国的G. T. Yeh提出了积分单元法^[1],该方法是研究地下水和多孔介质传热问题时常用的积分有限差分方法的推广,而且集中了有限差分法、有限元素法和单元分析这三种方法的优点.在积分有限差分法中仅仅用了散度定理,而积分单元法用了向量的三个积分定理.其原因在于不可压纳维尔—斯托克斯方程不能仅用某些量的散度来表示,但可用因变量的梯度、散度和旋度来表示.

积分单元法的基本步骤是:(一)把所研究的区域离散成许多单元,(二)对每一单元运用向量的三个积分定理,把体积分变为面积分,(三)利用简单的插值法以因变量在单元上的值来表示界面上的值,从而使问题可以求解.将这些步骤用于不可压纳维尔—斯托克斯方程可得到求解压力场和速度场的有条件稳定和收敛的计算方法.

* 国家自然科学基金资助项目
本文收到日期 1989. 12. 27

2 积分单元法

2.1 区域离散化

把所研究的区域分为形状大小均任意的许多子区域, 一个子区域叫做一个单元. 单元的质心定义为代表此单元的节点. 具有公共界面的两个单元称为相邻单元. 相邻单元所对应的两节点之间的连线叫做节点连线. 节点连线的特征由其两端的端点、节点间的界面、界面的单位法向量的方向余弦以及两节点各自到界面的距离来表达. 而单元的特征由其体积以及代表它的节点的序号来表示. 有了这些定义以后就能进行区域的离散化. 如图 1 所示的区域分为五个单元(节点): ①—⑤, 其间有六条内节点连线(界面): 1—6. 为处理问题方便起见, 可设想边界由七个边界单元(节点): ⑥—⑫组成, 因而有七条边界单元节点与内节点之间的节点连线: 7—13. 边界单元节点到边界的距离为零, 即边界单元节点刚好位于边界上, 而边界单元的体积为零.

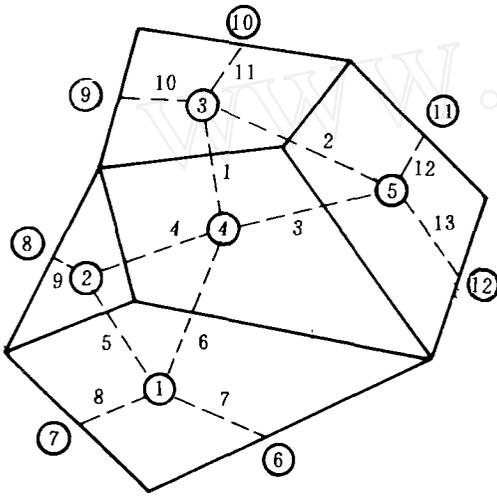


图 1

2.2 积分表达式

积分单元法的关键在于把微分方程写成某些量的梯度、散度和旋度的组合, 然后应用下述三个向量积分定理, 把任一物理量在此单元上的体积分化为在此单元界面上的面积分. 这三个定理为:

$$\int_V \nabla F dV = \int_S \vec{n} F dS \quad (1)$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{U} dV = \int_S \vec{n} \cdot \vec{U} dS \quad (2)$$

$$\int_V \nabla \times \vec{U} dV = \int_S \vec{n} \times \vec{U} dS \quad (3)$$

其中 F 和 \vec{U} 分别为标量函数和向量函数, dV 是单元中的体积元素, dS 是单元界面上的面积元素, 而 \vec{n} 是单元界面的外法线单位向量. 上面三个式子中的右边部分可近似表示为:

$$\int_S \vec{n} F dS \approx \sum_{j \in N_i} \vec{n}_{ij} F_{ij} S_{ij} \quad (4)$$

$$\int_s \vec{n} \cdot \vec{U} dS \approx \sum_{j \in N_i} \vec{n}_{ij} \cdot \vec{U}_{ij} S_{ij} \quad (5)$$

$$\int_s \vec{n} \times \vec{U} dS \approx \sum_{j \in N_i} \vec{n}_{ij} \times \vec{U}_{ij} S_{ij} \quad (6)$$

其下标 ij 表示该量是在单元 i 和单元 j 的界面上赋值, 而 N_i 是所有与单元 i 相邻的单元所构成的集合. 应该强调一下, 式(4)–(6)中的求和是对包围单元 i 的所有界面进行的.

从式(1)–(6)可知, F 和 \vec{U} 的守恒性是很自然的结果. 此外, 运用式(1)–(3)三个积分定理于空间导数可使单元节点上的求 n 阶导数的近似值问题化为求界面上的 $(n-1)$ 阶导数的近似值问题.

2.3 界面值的插值法

方程(4)–(6)中有界面值, 因此为使方程可以求解, 必须提出用单元节点值来表示界面值的插值方法. 积分单元法成败的关键在于能否选用适当的插值方法, 因为插值方法与数值解的稳定性密切相关. 插值方法很多, 最简单的是线性插值.

$$F_{ij} = (d_i F_j + d_j F_i) / (d_i + d_j) \quad (7)$$

其中 F_i 、 F_j 分别为 F 在单元 i 和 j 的节点上的值, d_i 和 d_j 分别为自节点 i 和 j 到界面 ij 的垂直距离, 以后我们令 $d_{ij} = d_i + d_j$.

如果动量方程中对流项是主项, 则线性插值可能导致不稳定的解, 因此对流项要采用迎风插值法:

$$(\vec{n}_{ij} \cdot \vec{U}_{ij}) \vec{U}_{ij} = (\vec{n}_{ij} \cdot \vec{U}_{ij}) \vec{U}_i, \quad (\vec{n}_{ij} \cdot \vec{U}_{ij}) > 0 \quad (8)$$

$$(\vec{n}_{ij} \cdot \vec{U}_{ij}) \vec{U}_{ij} = (\vec{n}_{ij} \cdot \vec{U}_{ij}) \vec{U}_j, \quad (\vec{n}_{ij} \cdot \vec{U}_{ij}) < 0 \quad (9)$$

3 积分单元法解不可压纳维尔—斯托克斯方程

为了应用积分单元法, 把不可压纳维尔—斯托克斯方程写成如下形式:

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\nabla \Phi - \vec{A} + \vec{E} \quad (11)$$

其中

$$\Phi = p/\rho + gz \quad (12)$$

$$\vec{A} = \nabla \cdot (\vec{U}\vec{U}) \quad (13)$$

或

$$\vec{A} = \nabla (U^2/2) - \vec{U} \times \vec{\omega} \quad (14)$$

$$\vec{E} = \nu \nabla^2 \vec{U} \quad (15)$$

$$\text{或} \quad \vec{E} = -\nu \nabla \times \vec{\omega} \quad (16)$$

其中

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{U} \quad (17)$$

$$\text{定义速度散度为} \quad D = \nabla \cdot \vec{U} \quad (18)$$

上面式中, p 为压力, \vec{U} 为速度向量, ν 为运动粘性, ρ 为流体密度, g 为重力加速度, t 为时间, Z 为垂直坐标, Φ 为总位势(等于压力势与重力势之和), \vec{A} 为对流加速度, \vec{E} 为粘性力, $\vec{\omega}$ 为速度的旋度, D 为速度的散度. 上面七个方程包含七个未知数 $p, \vec{U}, \Phi, \vec{A}, \vec{E}, \vec{\omega}$ 和 D .

现在把积分单元法用于上述方程, 为避免联立求解总位势 Φ 和速度 \vec{U} , 采用分裂法, 因此由 $n\Delta t$ 时的 $\vec{U}^{(n)}, p^{(n)}$ 求 $(n+1)\Delta t$ 时的 $\vec{U}^{(n+1)}, p^{(n+1)}$ 的步骤如下:

1) 对(18)式应用向量积分定理(2)及(5), 整理后得:

$$D_i^{(n)} V_i = \sum_{j \in N_i} (\vec{n}_{ij} \cdot \vec{U}_{ij}^{(n)}) S_{ij} \quad (19)$$

由上式求 $n\Delta t$ 时的散度场 $D_i^{(n)}$.

2) 同样可得到:

$$\vec{A}_i^{(n)} V_i = \sum_{j \in N_i} (\vec{n}_{ij} \cdot \vec{U}_{ij}^{(n)}) \vec{U}_{ij}^{(n)} S_{ij} \quad (20)$$

或

$$\vec{A}_i^{(n)} V_i = \sum_{j \in N_i} (n_{ij} U_{ij}^{2(n)} / 2) S_{ij} - \vec{U}_i^{(n)} \times \vec{\omega}_i^{(n)} V_i \quad (21)$$

$$\vec{E}_i^{(n)} V_i = \nu \sum_{j \in N_i} (\vec{U}_{ij}^{(n)} - \vec{U}_i^{(n)}) S_{ij} / d_{ij} \quad (22)$$

或

$$\vec{E}_i^{(n)} V_i = -\nu \sum_{j \in N_i} (\vec{n}_{ij} \times \vec{\omega}_{ij}^{(n)}) S_{ij} \quad (23)$$

$$\vec{\omega}_i^{(n)} V_i = \sum_{j \in N_i} (\vec{n}_{ij} \times \vec{U}_{ij}^{(n)}) S_{ij} \quad (24)$$

由上面式子求 $n\Delta t$ 时的对流加速度场 $\vec{A}_i^{(n)}$, 粘性力场 $\vec{E}_i^{(n)}$ 和涡量场 $\vec{\omega}_i^{(n)}$.

3) 由

$$\sum_{j \in N_i} (\Phi_j^{(n+1)} - \Phi_i^{(n+1)}) S_{ij} / d_{ij} = D_i^{(n)} V_i / \Delta t - \sum_{j \in N_i} (\vec{n}_{ij} \cdot \vec{A}_{ij}) S_{ij} + \sum_{j \in N_i} (\vec{n}_{ij} \cdot \vec{E}_{ij}) S_{ij} \quad (25)$$

求 $(n+1)\Delta t$ 时的总位势场 $\Phi_i^{(n+1)}$.

4) 由

$$\vec{U}_i^{(n+1)} = \vec{U}_i^{(n)} - \Delta t \vec{A}_i - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{j \in N_i} \vec{n}_{ij} \Phi_{ij}^{(n+1)} S_{ij} + \Delta t \vec{E}_i \quad (26)$$

求 $(n+1)\Delta t$ 时的速度场 $\vec{U}^{(n+1)}$.

5) 由

$$\Phi^{(n+1)} = p^{(n+1)}/\rho + gz \quad (27)$$

求 $(n+1)\Delta t$ 时的 $p^{(n+1)}$.

如果对流项用(20)式表示,则稳定性条件为

$$\Delta t \leq \frac{2\Delta s^2}{4\nu + U\Delta s} \quad \text{和} \quad \Delta t \leq \frac{2\nu}{U^2} + \frac{\Delta s}{U} \quad (28)$$

及

$$\Delta s \leq \frac{U + (U^2 + 8\nu G_U)^2}{2G_U} \quad (29)$$

其中 Δt 是最小特征单元尺寸(单元尺寸由单元体积除以界面面积而得), U 为平均最大速度, G_U 为平均最大速度梯度. 上面两式中的 $U\Delta s$ 、 $\frac{\Delta s}{U}$ 和 U^2 是由于对流项用迎风插值所引起的; 如果采用线性插值, 这些项就等于零. 因此如对流项用(20)表示时, 迎风插值很重要; 如不用迎风插值, 在 ν 很小时, 为满足稳定性条件, 时间步长和单元尺寸要取得非常小.

关于积分单元法的边界条件, 可将方程(11)用于边界单元, 再结合同物理上的边界条件, 就能求出边界处的速度和总位势. 例如, 对无滑移刚性壁面, 可得出:

$$u_B = 0, v_B = 0, w_B = 0 \quad (30)$$

$$\Phi_B = \Phi_I + 2\nu \vec{n} \cdot \vec{U}_I/d_{IB} \quad (31)$$

其中下标 B 表示边界值, 下标 I 表示在单元 I 上的值, 单元 I 有一条边与边界重合, \vec{n} 是边界的单位法向量, 对于流体来说它指向外部, d_{IB} 是从节点 I 到边界的垂直距离. 其他边界情况也可用同样方法导出.

4 后台阶绕流问题

现在我们用积分单元法计算图 2 所示的后台阶绕流问题, 入口速度为 u_0 , 台阶高 L , 不计重力势, 计算区域如图 2. 首先将方程式(10)~(18)无量纲化, 速度和坐标分别用 u_0 和 L 来无量纲化, 无量纲化后的方程几乎与方程式(10)~(18)完全相同, 唯一差别是原方程中的 ν 变为 $1/Re$, 其中 $Re = u_0 L/\nu$.

我们取 100×10 个正方形单元, 单元边长为 0.2, 时间步长 $\Delta t = 0.05$. 边界条件见图 2. $t = 0$ 时内点的 u, v, Φ 均取为零. 物理上相应于初始时刻计算区域中流体处于静止状态, 入口处保持 $u = 1, v = 0$ 的条件. 这样, 把定常绕流问题转化为非定常绕流问题来解, 非定常绕流问题解在 t 很大时的极限为定常绕流解. 计算中每推进一个时间步长, 要解一次 Φ 的线性代数方程, 我们采用松弛法解此方程. 当 $|\vec{U}^{(n+1)} - \vec{U}^{(n)}| < 10^{-3}$ 时就认为已达到定常解. 计算对流项用迎风插值法, 因此有人工粘性.

我们计算了 $Re = 20, 10^3, 10^4$ 这几种情况. 图 3-5 均为流函数图, 其中 $Q = 10\psi$, ψ 为流函数. 图 3-5 所列曲线均为各 Re 数的定常绕流的流函数分布.

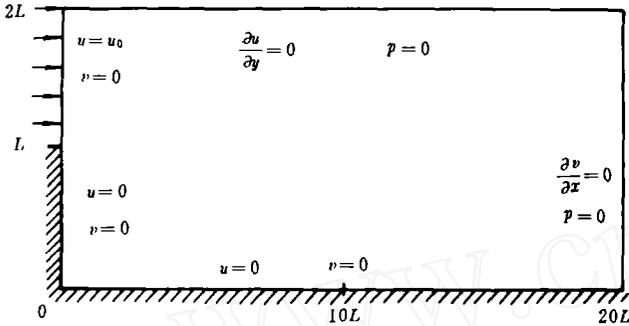


图 2

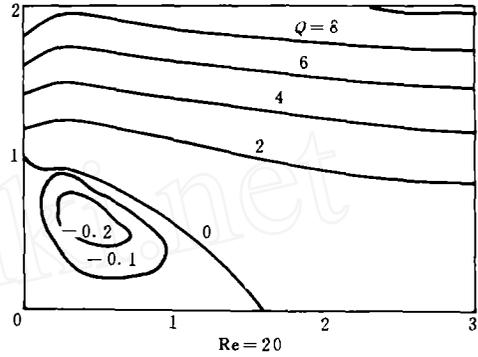


图 3

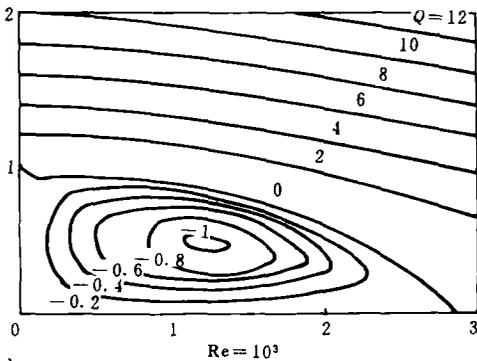


图 4

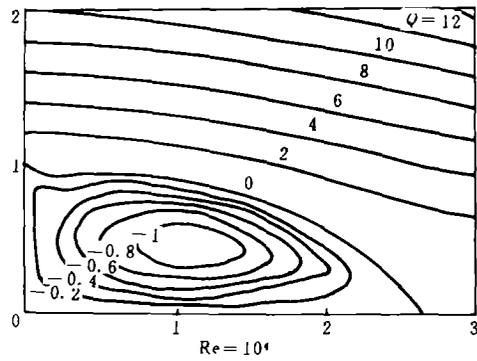


图 5

积分单元法的计算速度比有限差分方法要慢,但比有限元素方法要快.积分单元和差分方法中的网格的含义相似,所以一般讲来积分单元小一些为好,可以增加数值解的精度,但积分单元太小的话,要增加许多工作量,减慢计算速度.插值方法与数值解的稳定性密切相关,所以必须选用适当的插值方法,以保证数值解的稳定性.

参考文献

- [1] G. T. Yeh; Numerical Solution of Navier-Stokes Equations With an Integrated Compartment Method (ICM), Inter. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 1, 207-223(1981).
- [2] J. A. Jacquez; Compartmental Analysis in Biology and Medicine, Elsevier, New York, 1972.

wall shear stress, the last one is the most sensitive indicator to the degree of stenosis. This can be very helpful in clinical applications. The maximum velocity ratio (U_{\max}^S/U_{\max}^P) and the peak wall shear stress ratio (τ_{\max}^S/τ^P), where the superscript "S" denotes stenotic and "P" denotes Poiseuillean, increase with stenosis percent, but are insensitive to Reynolds number. The pressure drop ratio ($\Delta P^S/\Delta P^P$), on the other hand, is affected greatly by the Reynolds number if the degree of stenosis is high, indicating that the pressure drop is mainly due to area expansion for severe stenosis, and due to fluid viscosity for mild stenoses. The flow separation was observed for all models except for the one with 20% stenosis, at $Re = 100-800$. The reverse flow length at downstream of stenosis increases with the stenosis degree, and in an approximate linear form with Reynolds number under the laminar flow. Otherwise the computed reverse flow length will be shorter than the experimental value due to the disturbances of the flow.

Key words: artery stenosis, flow separation, wall shear stress, finite element.

Parameters Estimation for Liquid Sloshing Equivalent Mechanical Models

Xu Yulu

(Beijing Qiangdu yu Huanjing Yanjiusuo)

Abstract

In this paper the experimental techniques for determining the equivalent mechanical model parameters of liquid sloshing in a container are investigated. Through the reduction and analysis for testing system of the container filled with liquid, the expressions of transfer function of the system are derived. The model parameters are obtained using the frequency response functions fit techniques. In the curve fit process the nonlinear effects of liquid sloshing are eliminated using the weight functions. This method is applied to the investigation of the liquid sloshing problem of a satellite propellant tank.

Key words: propellant tanks, liquid sloshing, dynamic models, parameter identification, testing method.

Integrated Compartment Method and Computation of Backward Step Flow

Zhuang Fengqing

Yao Deliang

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

A new algorithm known as Integrated Compartment Method (ICM) is outlined in the present paper for solving Navier-Stokes equations. Backward step flow is numerically studied using ICM. Results show that ICM is a promising method.

Key words: Integrated Compartment Method, backward step flow, upstream interpolation, computational fluid mechanics.