

# 最优控制理论在垂直发射舰空导弹 转弯控制中的应用

汤善同\*

陈素贞

(航空航天部二院)

(中国科学院力学研究所)

**摘要:** 本文应用最优控制理论研究了垂直发射舰空导弹转弯控制段的控制规律,并以某低空、超低空、近程舰空导弹为研究背景进行弹道优化设计,通过大量计算结果,分析了燃气舵最大舵偏角与工作时间、反馈回路参数等对垂直发射导弹弹道特性的影响。最后选取一组最优参数对全弹道进行了仿真计算。结果表明:将垂直发射技术应用于对付近程、高速、掠海目标是有效的,可以实现的。

**关键词:** 最优控制理论,共轭梯度,垂直发射技术,程序转弯,掠海飞行。

## 1 前言

垂直发射就是将导弹以垂直方式发射出去,它是目前国内外地空导弹和舰空导弹系统正在大力发展的一种先进发射方式,是针对传统的倾斜发射方式在现代战争条件下暴露出来的弱点而提出来的。

垂直发射武器与倾斜发射相比有其显著的优点:

- (1) 垂直发射装置战斗时不需要对导弹进行再装填和再瞄准,并能几乎同时发射几种导弹,反应时间短,发射效率高,因而可以比较有效地对付多目标的饱和攻击;
- (2) 垂直发射武器系统能消除射击盲区,具有全方位的作战能力;
- (3) 发射装置无需随动跟踪目标,因而体积小,重量轻,设备简单,成本低,维护使用方便;
- (4) 垂直发射装置可以集装箱化,能根据舰艇空间大小,灵活安置发射单元数量,且集装箱式发射装置适应性大,可以兼容多型号发射。

目前国外在舰空导弹系统上采用垂直发射技术已成为发展方向,然而垂直发射技术尚存在以下需要解决的问题:

- (1) 要解决射向控制与转弯程序优化设计问题;
- (2) 要解决程序转弯段的推力矢量控制问题;

本文于1990年12月17日收到

\* 本文第一作者系我校兼职教授

(3) 要解决大攻角气动布局设计及气动系数计算与试验问题,以及由大攻角引起的控制系统解耦问题;

(4) 由于垂直发射,导弹先垂直上升,然后转弯,再对准目标,所以达到同一拦截目标的飞行时间较倾斜发射要长。要解决近距作战问题;

(5) 发射时废气的排除问题。

本文只对上述的某些问题做些探讨,研究低空、超低空、近程舰空导弹垂直发射的飞行弹道及控制,使其满足提出的战术技术指标。文中应用最优控制理论,由共轭梯度法寻找出最优程序转弯的控制规律,并通过大量计算,得出在近距离实现拦击掠海高速目标的可能结论。在此基础上讨论了各种参数对程序转弯的影响。

## 2 最优控制理论在垂直发射转弯控制中的应用

本文在研究导弹垂直发射最优转弯控制问题时,需要应用最优控制理论中的极小值原理,为此设导弹的系统状态方程为

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

系统满足边界条件

$$x(t_0) = x_0$$

$$K[x(T), T] = 0$$

采用二次性能指标作为最优判据准则,寻找控制  $u$ ,使此系统从初始状态  $x(t_0) = x_0$  出发到达终端状态时的性能指标

$$J(u) = \frac{x^T(T)S(T)x(T)}{2} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T cu^T u dt$$

达到极小值。

式中  $x, u, t$  分别为状态向量、控制向量及控制时间;  $x_0, K[x(T), T]$  为状态向量的初始条件和终端条件;  $c$  为加权系数;  $S(T)$  为加权矩阵; 上标  $T$  表示矩阵转置符号。

系统的控制向量  $u$  受下列不等式约束:

$$L[u(t), t] \geq 0$$

在引入协态向量  $\lambda$ , 定义哈密顿函数

$$H(x, u, \lambda, t) = \frac{1}{2} cu^T u + \lambda^T f(x, u, t)$$

可求得系统的状态方程与协态方程组成的方程组为

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ x(t_0) = x_0 \\ \lambda(T) = \frac{\partial K[x(T), T]}{\partial x(T)} \\ H(x^*, u^*, \lambda, t) \leq H(x, u, \lambda, t) \end{cases} \quad (1)$$

式中  $u^*$  为最优控制;  $x^*$  为其对应的最优状态变量。

### 2.1 共轭梯度法在求解最优控制问题中的应用

方程(1)式是二点边值问题,求解两点边值问题的数值方法很多,本文采用共轭梯度法。共

轭梯度法是求解最优控制问题的一种有效的方法,特别是对于二次泛函指标的系统,其收敛速度较快。

共轭梯度法的关键是求出  $n$  个共轭方向向量。如图 1 所示,首先任选一初始点  $x_0$ ,计算出其梯度  $g^{(0)}$ ,则第一个共轭梯度方向为  $r^{(1)} = -g^{(0)}$ ,然后按照(2)式计算下一个共轭梯度方向。

$$r^{(k+1)} = -g^{(k)} + a_{k+1} \cdot r^{(k)} \quad (2)$$

式中

$$a_{k+1} = g^{(k)T} (g^{(k)} - g^{(k-1)}) / |g^{(k-1)}|^2 \quad (3)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1$$

将这种思想推广到动态最优控制问题时,将(1)式写成

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\lambda(T) = \frac{\partial K}{\partial x(T)}$$

$$\Delta J(u) = \int_{t_0}^T [\partial H / \partial u]^T \Delta u dt + 0 \|\Delta u\|$$

式中  $\frac{\partial H}{\partial u}$  就是泛函在  $u(t)$  处的梯度

$$\Delta J(u) = \frac{\partial H}{\partial u} = H_u$$

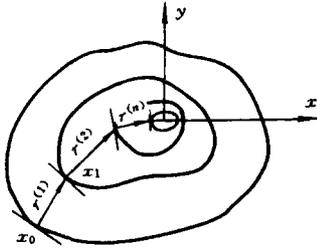


图 1 共轭梯度法示意图

按如下步骤计算,即可求得问题的解。

(1) 计算初始点。先在容许控制中任选一控制函数  $u(t_0)$ ,再结合给定的初始条件  $x(t_0)$ ,从  $t_0$  到  $T$  积分状态方程,得到  $x(t)$ 。用终端条件

$$\lambda(T) = \frac{\partial K}{\partial x(T)}$$

从  $T$  到  $t_0$  反向积分伴随方程

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

得到  $\lambda(t)$ 。

(2) 计算梯度  $H_u$ 。

(3) 若  $H_u = 0$ ,即求得极小指标函数,此时的控制  $u$  即为最优控制。否则,用单位搜索的方法求出迭代因子  $\mu$ ,迭代控制函数  $u(t)$ ,重复上面的过程,直至  $H_u = 0$  为止。

## 2.2 导弹垂直发射最优控制数学模型的建立

$$\dot{x}_1 = (1/m)(P \cos \alpha - mg \sin x_2 - 0.5 \rho x_1^2 S C_x - X_j \cos \alpha - L_j \sin \alpha)$$

$$\dot{x}_2 = (1/m x_1)[P \sin \alpha - mg \cos x_2 + 28.65 \rho x_1^2 S (C_y^a \alpha + C_y^e x_7) - X_j \sin \alpha + L_j \cos \alpha]$$

$$\dot{x}_3 = (1/J_z)[L_j(x_c - x_e) + 28.65 \rho x_1^2 S l (m_z^a \alpha + m_z^e x_7)$$

$$+ m_z^e (x_3 l / x_1) + m_z^e (a l / x_1)] \quad (4)$$

$$\dot{x}_4 = x_1 \cos x_2$$

$$\dot{x}_5 = x_1 \sin x_2$$

$$\dot{x}_6 = x_3$$

$$\dot{x}_7 = (1/T_j)[K_\theta(\theta_D - x_2) + K_\theta(\Theta_D - x_6) + K_{\omega_j} x_3 - x_7]$$

式中状态变量为

$$x = (v, \theta, \omega_z, x, y, \Theta, \delta_j)^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T$$

故(4)可以写成

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dots, \dot{x}_7)^T = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_7)^T$$

控制变量为

$$u = \delta_j$$

终端条件为

$$\begin{cases} y(T) = e_y \\ \theta(T) = e_\theta \\ \omega_x(T) = e_{\omega_x} \end{cases}$$

即

$$\begin{aligned} x_5(T) - e_y &= 0 \\ x_2(T) - e_\theta &= 0 \\ x_3(T) - e_{\omega_x} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

根据本文的设计目的,性能指标泛函为

$$J = \mu_y x_5^2(T) + \mu_\theta [x_2(T) - e_\theta]^2 + \mu_{\omega_x} [x_3(T) - e_{\omega_x}]^2 + \int_{t_0}^T \mu_{\delta_j} \delta_j^2 dt \quad (6)$$

$$\text{式中} \quad K[x(T), T] = \mu_y x_5^2(T) + \mu_\theta [x_2(T) - e_\theta]^2 + \mu_{\omega_x} [x_3(T) - e_{\omega_x}]^2 \quad (7)$$

$$L(t, x, u) = \mu_{\delta_j} \delta_j^2 \quad (8)$$

$\mu_y, \mu_\theta, \mu_{\omega_x}, \mu_{\delta_j}$  为罚因子,下标  $j$  表示燃气舵工作时该变量的状态变量。

为应用共轭梯度法,需求出  $\partial H/\partial x, \partial H/\partial u, \partial K/\partial x$ 。式中哈密尔顿函数为

$$H = L + \lambda^T f$$

### 3 计算结果分析

这里通过具体计算结果讨论了共轭梯度法中罚函数的选取原则,分析了燃气舵最大舵偏角、燃气舵工作时间和回路反馈参数等对转弯弹道特性的影响。

#### 3.1 转弯程序优化计算结果

##### (1) 计算结果

应用共轭梯度法在 VAX-780 机上对转弯弹道进行优化,得转弯段特性曲线,如图 2~图 6 所示。

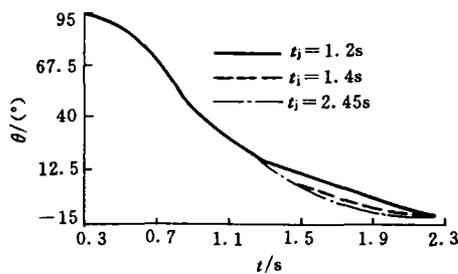


图 2 不同  $t_j$  值导弹弹道倾角比较

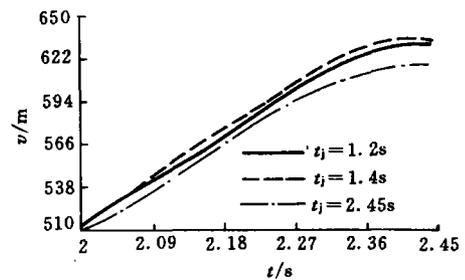


图 3 不同  $t_j$  值导弹飞行速度比较

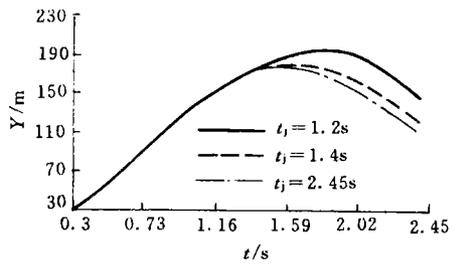


图4 不同  $t_j$  值导弹飞行高度比较

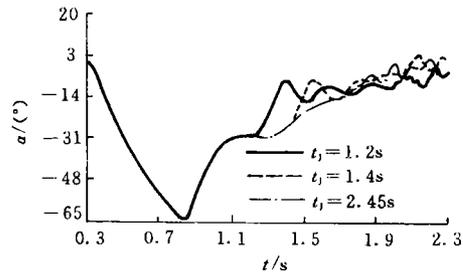


图5 不同  $t_j$  值导弹飞行攻角比较

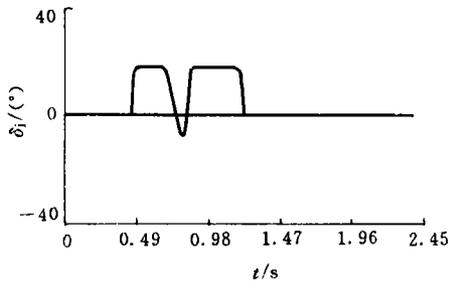


图6 转弯段燃气舵偏角随时间变化规律

## (2) 共轭梯度法中罚函数的选取原则

从指标泛函式(6)可以看出,罚因子  $\mu_y, \mu_\theta, \mu_{\omega_x}, \mu_{\theta_1}$  的选取直接影响最后结果的各种指标值。由于高度、角速度、角度的量级不同,各罚因子不能进行简单的比较,需根据各自相应指标值进行衡量。计算中取值如表1。

表1 共轭梯度法中罚因子的选取

罚因子	$\mu_y$	$\mu_\theta$	$\mu_{\omega_x}$	$\mu_{\theta_1}$
数值	0.00001	105	100	10
指标值	384400	0.04385	0.01000	0.186550

经过比较,计算中终端条件  $e_\theta = -12^\circ, e_{\omega_x} = 0.1 \text{ rad/s}$  比较合适,迭代中  $\Delta J < 0.01$  时即停止。

转弯段整个迭代过程仅需 15min,表2是随着迭代次数的增加, $J$  呈递减的趋势。

表2 优化方法迭代过程

迭代次数	$J$	迭代次数	$J$
1	0.2331646E+10	5	0.212448E+10
2	0.2329489E+10	6	0.2152447E+10
3	0.2194472E+10	7	0.2152447E+10
4	0.2152478E+10	8	0.2152447E+10

从表中看出这种算法的收敛速度是比较快的。

### 3.2 燃气舵与回路参数对弹道转弯特性的影响

#### (1) 燃气舵工作时间 $t_j$ 对弹道特性的影响

燃气舵在导弹转弯时开始工作。因其安装在发动机的尾部,靠发动机喷出的气流产生控制力,所以其工作时间不能大于发动机工作时间。分别选取不同的燃气舵工作时间  $t_j$ ,分析其对转弯段弹道特性的影响。

图2,3,4,5分别为  $t_j = 1.2\text{s}, 1.4\text{s}, 2.45\text{s}$  时的弹道倾角、速度、高度、攻角随时间的变化曲线。

从图2看出,  $t_j = 2.45\text{s}$  时,  $\theta$  角最早达到  $0^\circ$ ;其次是  $t_j = 1.4\text{s}$ ;最晚的是  $t_j = 1.2\text{s}$ 。因此燃气

舵工作时间愈长,导弹转弯的速度愈快。但从图 3 看出: $t_j=2.45\text{s}$  时,导弹的速度损失最大。这是由于燃气舵工作时间愈长,推力的损失愈大,从而导致导弹速度损失也大。但若燃气舵工作时间太短,则不能提供足够的控制力矩使导弹尽快转弯。由图 2、图 4 看出: $t_j=1.2\text{s}$  时,导弹转弯的时间较长,高度也较大。

由于最大攻角发生在  $1.2\text{s}$  以前,所以不同的燃气舵工作时间,如  $t_j=1.2\text{s}$ 、 $1.4\text{s}$ 、 $2.45\text{s}$  时,其导弹的最大攻角值由图 5 上可以看出是完全相同的。

但是, $t_j=1.4\text{s}$ , $v=330\text{m/s}$ ,则在跨音速阶段,燃气舵仍工作,这是极不利的。而  $t_j=1.2\text{s}$ , $v=281.07\text{m/s}$ , $\theta=27.0^\circ$ ,此时的转弯弹道特性与  $t_j=1.4\text{s}$  差别不大,且此时用空气舵控制仍可使导弹转至所要求的俯仰姿态,满足对超低空制导拦截的需要。所以本文选取  $t_j=1.2\text{s}$ 。

### (2) 燃气舵最大舵偏角 $\delta_m$ 对转弯段弹道特性的影响

由燃气舵升力计算式

$$X_j = 4q_j S_j (57.3 C_{N_j}^* \delta_j \sin \delta_j + C_{x_j} \cos \delta_j)$$

$$L_j = 2 \sqrt{2} q_j S_j (57.3 C_{N_j}^* \delta_j \cos \delta_j - C_{x_j} \sin \delta_j)$$

可知: $\delta_j$  愈大,则控制力  $L_j$  愈大,导弹的转弯能力就愈强。但同时由于燃气舵产生的阻力增加,轴向推力下降,从而使速度损失增加。

### (3) 控制回路的参数 $K_\theta$ , $K_{\dot{\theta}}$ , $K_{\omega_z}$ 对导弹转弯段特性的影响

控制回路的方程为

$$\delta = (1 - T_j) [K_\theta (\theta_D - \theta) + K_{\dot{\theta}} (\dot{\theta}_D - \dot{\theta}) + K_{\omega_z} \omega_z - \delta_j] \quad (9)$$

式中  $K_\theta$ ,  $K_{\dot{\theta}}$  为角度增益; $K_{\omega_z}$  为角速度增益; $T_j$  为舵系统的时间常数。

对于一定的舵系统,其时间常数和气流的密度与速度有关,本文燃气舵取  $T_j=0.008$ 。

下面分别讨论以上各参数对弹道特性的影响。

#### 1) 角度增益 $K_\theta$ , $K_{\dot{\theta}}$ 的影响

由回路方程(9)知道,随着增益  $K_\theta$  的增加,舵偏的变化率就大,回路响应快,转弯速度就快。

然而,若  $K_\theta$  太大,说明在  $\Delta\theta = \theta_D - \theta$  比较小时,舵偏仍需达到饱和状态,从而使导弹不能稳定在所需要的位置,相应导弹攻角增大,速度损失增加;若  $K_\theta$  太小,舵偏角达到饱和需要时间较长,从而使导弹转弯时间加长,导弹飞行高度也大。

优化结果取  $K_\theta=0.158$  是合理的。

增益  $K_{\dot{\theta}}$  的分析和  $K_\theta$  的道理基本相同,这里不再赘述。

#### 2) 角速度增益 $K_{\omega_z}$ 的选取

由回路方程(9)知道, $K_{\omega_z} \cdot \omega_z$  项是阻尼导弹转动的,以防导弹转动过快导致系统不稳定。随着  $K_{\omega_z}$  的增加,其阻尼作用将增大。

当  $K_{\omega_z}$  取较小值  $0.032$  时,由于阻尼作用小,舵偏的饱和状态持续时间长, $t=1.56\text{s}$  时导弹已达到  $\theta = -15^\circ$ ,但整个过程中攻角最大达到  $-70^\circ$ ,导弹飞行姿态极不稳定,而速度损失也大。当取较大的  $K_{\omega_z}=0.112$  时,因阻尼作用过大,导弹刚一转动,航偏就得减小,从而达不到快速转弯的目的; $t=2\text{s}$ , $\theta$  尚不到  $0^\circ$ ,从而使导弹飞行高度也压不下去,不能满足制导拦截的初值要求。因此,取  $K_{\omega_z}=0.08$  比较合理。以上讨论了燃气舵回路的参数对弹道特性的影响,空气舵参数的影响和燃气舵一样。

综合上述讨论,我们选取燃气舵及回路参数为

$$\sigma_m = 18^\circ, \quad t_j = 1.2s, \quad K_{\theta_j} = 0.158, \quad K_{\theta_j} = 0.088, \quad K_{\omega_{\theta_j}} = 0.08$$

最后得出舵偏角的变化规律如图 6,使应用最优控制理论得到的舵偏角变化规律得以工程上的实现。

## 4 结 论

经过弹道转弯程序优化,从拦截结果和上述分析比较可以得出:最优控制理论极小值原理用于近程垂直发射舰空导弹的转弯设计是可行的,计算结果能满足低空、超低空、近程舰空导弹拦截掠海飞行的高速反舰导弹的要求。

## 参 考 文 献

- 1 战术导弹垂直发射的最优推力矢量控制. 外国海军导弹动态,增刊,1984(1)
- 2 韩世纬. 舰载垂直发射导弹燃气舵材料的选择. 上海航天,1986(4)
- 3 推力矢量控制的小型导弹的飞行运动. 飞航导弹,航天部三院三部
- 4 杨燕萍. 舰载战术导弹垂直发射技术综述. 航天控制,1988(2)
- 5 张德昌. 国外舰空导弹武器系统垂直发射技术概况
- 6 叶庆凯,王肇明. 优化与最优控制中的计算方法. 北京,科学出版社
- 7 孟宪仲编. 现代控制理论. 北京,北京航空学院出版社
- 8 汤善同编. 最优控制理论在拦截问题中的应用. HT-860130N

# APPLICATION OF OPTIMAL CONTROL THEORY TO TURNING CONTROL OF VERTICAL LAUNCHING VESSEL-TO-AIR MISSILE

Tang Shantong

Chen Suzhen

(2nd Res. Academy of Indus. Ministry of Aero. and Astro.)

(Res. Inst. of Mechanics of CAS)

## ABSTRACT

By using optimal control theory, the turning control law of vertical launching vessel-to-air missile is studied. In addition, the trajectory optimization design has been developed on the basis of some kinds of low altitude, super low altitude, short range vessel-to-air missiles. Based on the results of trajectory calculations, the effect of the maximum deflection angle of gas-vane and its working time, parameters of control network upon the trajectory behaviour is also analyzed. Finally, a set of optimal parameters are selected for an ones all trajectory simulation calculation. The results show that it is possible to apply the vertical launching techniques to the intercepting low altitude, short range or skimming targets with velocity.

**Key words:** optimal control theory, conjugate gradient method, vertical launching technology, program turning, skimming flight.