

# 具有局部非线性元件的结构动力分析\*

刘世龄

田千里

(香港理工学院)

(中国科学院力学研究所)

## 摘 要

谐波增量平衡法在描述非线性力时计及多谱分量,是处理强非线性的一个有效方法。在本文中,此法被推广于分析局部非线性结构的稳态响应。被分析的结构分解为若干子结构,所有非线性元件均位于子结构的分界面上。系统的响应用谐波增量平衡法(Incremental Harmonic Balance Method,简称 I. H. B 法)结合 F. F. T. (快速福里哀变换)技术与状态空间的模态综合法分析之。

**关键词:**非线性振动,结构振动,模态综合法,结构阻尼,谐波增量平衡法

## 一、引 言

如果没有足够的阻尼,工程结构在动力环境中会由于动应力放大而破坏。由于现代工程结构追求高强度与轻质量,如采用焊接整体结构、预应力混凝土结构等,会导致结构阻尼减小,故采用人工阻尼技术以增大结构阻尼受到了重视。粘弹性阻尼层技术有明显的减振效果,但在大型结构上全面采用它是不经济的。一个经济的办法是采用阻尼结点,因为通常一个装配结构的阻尼大约有 90% 来源<sup>[1]</sup>于它的结点,而干摩擦又是结点固有的阻尼特性,因而用结点摩擦控制振动近年来颇受工程界重视。早在 50 年代这种技术就被用于压缩机透平机叶片振动,近年来发展到建筑物隔振。将摩擦结点布置在结构框架的某些截面,或安排在建筑物底部与基础的分界面上。控制摩擦力的大小,使这些结点在正常情况下不发生滑动,而在地震力超过一门槛值后发生滑动,则由于滑动后结构固有频率的变化与应力重新分配,可以保证主要构件不发生破坏。地震谱有一个卓越周期,如果结点发生滑动后使建筑物的自振周期远离这一周期,则输入能量就会减少,结点发生滑动后,干摩擦还会消耗能量,使结构阻尼增大,因此引进摩擦结点可以通过反射能量与损耗能量两方面对建筑物进行减振。要保证取得良好的减振效果,须要对具有摩擦结点的结构进行动力分析,优化摩擦元件的参数。由于摩擦结点具有强非线性,而结构自由度又十分庞大,对这种系统进行非线性分析是十分困难的。关于摩擦或双线性滞迟系统的分析已有多年研究历史,但大多数是研究单自由

\* 国家自然科学基金与香港政府 U. K. P. G 基金资助项目。

本文于 1990 年 12 月 3 日收到。

度或多自由度体系的单谐波近似解<sup>[2]-[6]</sup>。用福里哀级数求解干摩擦系统,最早是邓哈陀<sup>[7]</sup>做的,文[8]~[11]将它推广到计算多自由度体系,但局限于分析完全滑动状态,文[12][13]将文[14][15]提出的 I. H. B. 法推广到分析干摩擦系统,处理了滑移—停滞—滑移的强非线性状态。文[13]在分析多自由度线性体系具有一个干摩擦结点时,对线性结构采用模态解。非线性方程组的维数为线性结构模态与非线性约束之和。该法先对非线性微分方程组采用 Galerkin 方法,对未知量作多谐展开,求得一组非线性代数方程组后再用 Newton-Raphson 法(N-R 法)迭代求解,并称为 G. N. R. 法。应当指出的是:G. N. R. 法在与 I. H. B 法在本质上并无差别,只不过是在作谐波分析与用 N-R 迭代二者的次序上有所颠倒。但由于 G. N. R. 法先作谐波展开,再用 N-R 法迭代,每一迭代均须用差分法求一个维数很大的 Jacobi 阵<sup>[16]</sup>。而 I. H. B. 法先将运动微分方程用 N-R 法展开,当非线性函数可用解析式表达时,其展开式可以预先求出;当非线性函数不能用解析式表达时便可用时域/频域转换及 F. F. T. 技术<sup>[17][18]</sup>,即在每一迭代步求得响应的时间函数后,用非线性元的本构关系计算非线性时间函数,再用 F. F. T. 在频域作谐波展开,对增量微分方程在频域求解,无须对代数方程组使用 N-R 法,因此避免了每迭代步计算庞大的 Jacobi 阵的工作量。I. H. B. 法的优点是用谐波分析处理非线性问题,对了解结构的频率响应十分便利,而且使用了 N-R 法能处理强非线性问题,但它每迭代步求解方程组的维数是谐波数乘以自由度数,故对多自由度体系而言,计算量十分庞大,本文用机械阻抗法与 I. H. B. 法相结合,将被分析的结构分解为线性态方程组求解,因为局部非线性问题非线性元自由度相对于整个结构而言要少得多,而线性结构参数在整个求解过程中是不变的,故非线性计算量不大。使用了 N-R 法与逐步初值跟踪求解,保证了收敛性,处理了包括干摩擦在内的一般非线性滞迟系统问题。

## 二、用 I. H. B. 方法计算动力响应

将整个结构分解为若干子结构,令所有非线性减振元件均位于子结构的分界面上,然后用固端模态综合法<sup>[19]</sup>对整个结构进行动力分析。

结构的运动方程为

$$\underline{\bar{M}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\bar{K}} \underline{q} + \underline{\bar{C}} \dot{\underline{q}} = \underline{\bar{F}} + \underline{\bar{f}} \quad (1)$$

其中

$$\underline{q} = [y_1^T, y_2^T, \dots, y_k^T, \dots, u^T]^T \quad (2)$$

$y_k^T$  为第  $k$  个子结构的固端模态坐标,  $u^T$  为所有子结构边界点几何坐标的集合,  $\underline{\bar{F}}$  为外载荷矢量,  $\underline{\bar{f}}$  为非线性边界力

$$\underline{\bar{f}} = \sum_{i=1}^n \underline{\bar{f}}_i \quad (3)$$

$$\underline{\bar{f}}_i = [0, 0, \dots, 0, f_i, 0, \dots - f_i, 0, \dots] \quad (4)$$

$\alpha \qquad \qquad \beta$

$\underline{\bar{f}}_i$  为第  $i$  个非线性杆元内力,  $\alpha, \beta$  为第  $i$  杆两端坐标

$\underline{\bar{M}}, \underline{\bar{K}}, \underline{\bar{C}}$  为固端模态综合后结构的惯性、刚度及阻尼矩阵。即使子结构是具有比例阻尼,在模态综合后,一般也不再具有比例阻尼阵,故此可用状态方程法求解。

令

$$\underline{\tilde{Y}} = \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{q}} \\ \underline{\tilde{q}} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\underline{\tilde{M}} = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{0}} & \underline{\tilde{M}} \\ \underline{\tilde{M}} & \underline{\tilde{C}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\underline{\tilde{K}} = \begin{bmatrix} -\underline{\tilde{M}} & \underline{\tilde{0}} \\ \underline{\tilde{0}} & \underline{\tilde{K}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

则可得(1)式改写成

$$\underline{\tilde{M}} \underline{\dot{Y}} + \underline{\tilde{K}} \underline{Y} = \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{0}} \\ \underline{\tilde{F}} + \underline{\tilde{f}} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

令

$$\theta = \omega t, \quad \underline{Y}' = \frac{d\underline{Y}}{d\theta}, \quad \underline{A} = \underline{\tilde{M}}^{-1} \underline{\tilde{K}} \quad (9)$$

则有

$$\omega \underline{Y}' + \underline{A} \underline{Y} = \underline{F} + \underline{f} \quad (10)$$

其中

$$\underline{F} = \underline{\tilde{M}}^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{0}} \\ \dots \\ \underline{\tilde{F}} \end{Bmatrix}, \quad \underline{f} = \underline{\tilde{M}}^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{0}} \\ \dots \\ \underline{\tilde{f}} \end{Bmatrix}$$

I. H. B. 方法是谐波平衡法(Harmonic Balance Method)与牛顿—拉甫森(Newton-Raphson, N-R)法的结合,与一般的非线性近似方法如慢变参数、等效线性法相比,由于计及高次谐波,故可处理强非线性;与谐波平衡法相比,由于引入了N-R迭代,可以保证收敛性,故能分析复杂的非线性滞迟问题;与逐步积分法相比,在对结构作频响分析时,由于只需迭代求解,不需逐步积分,引用F. F. T. 技术,对系统在频域计算响应,再在时域计算非线性杆内力,故计算量可大大节省。I. H. B. 方法的第一步是用N-R法列出系统的增量运动方程,假设当前状态用 $\omega_0, \underline{F}_0, \underline{Y}_0$ 描述,它的邻近状态为

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \quad (11)$$

$$\underline{F} = \underline{F}_0 + \Delta\underline{F} \quad (12)$$

$$\underline{Y} = \underline{Y}_0 + \Delta\underline{Y} \quad (13)$$

$$\underline{f} = \underline{f}_0 + \Delta\underline{f} \quad (14)$$

将(11)~(13)代入(10),并将非线性力 $\underline{f}$ 用一阶泰劳(Taylor)级数展开,便得到线性化的增量

运动方程

$$\omega_0 \Delta \tilde{Y}' + \underline{A} \Delta \tilde{Y} = \underline{R} + \Delta \tilde{f} - \Delta \omega (Y_0' - \frac{2f}{2\omega} |_0) + \Delta \tilde{F} \quad (15)$$

其中

$$\underline{R} = -(\omega Y_0' + \underline{A} Y_0) + \underline{F}_0 + \underline{f}_0 \quad (16)$$

比较式(10)(15)可知当  $Y_0$  达到精确解时  $\underline{R} \rightarrow 0$ , 故  $\underline{R}$  为修正项。I. H. B. 法的第二步是迭代求解增量微分方程, 将求得的增量叠加到当前解上以修正初值, 直到  $\underline{R}$  趋近于零。 $\tilde{f}$  为非线性力矢量, 对于具有滞迟阻尼的非线性元件, 其力—位移关系多为双值关系, 如图 1。

$$f = n_1(u_r) \quad \text{当} \frac{du_r}{dt} > 0 \quad (17)$$

$$f = n_2(u_r) \quad \text{当} \frac{du_r}{dt} < 0 \quad (18)$$

可写成统一的表达式

$$f(u_r, u_r') = g(u_r) + h(u_r) \text{sgn} u_r' \quad (19)$$

$$g(u_r) = \frac{1}{2}(n_1(u_r) + n_2(u_r)) \quad (20)$$

$$h(u_r) = \frac{1}{2}(n_1(u_r) - n_2(u_r)) \quad (21)$$

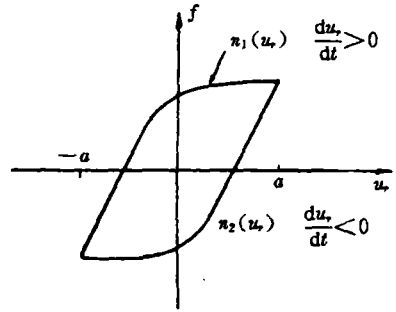


图 1. 非线性力—位移曲线

$$\text{sgn} u_r' = \begin{cases} 1 & u_r' > 0 \\ 0 & u_r' = 0 \\ -1 & u_r' < 0 \end{cases} \quad (22)$$

$f$  的一阶泰勒展开为

$$\begin{aligned} f &\approx f_0 + \frac{\partial f}{\partial u_r} |_0 \Delta \tilde{u}_r + \frac{\partial f}{\partial u_r'} |_0 \Delta u_r' \\ &= |g(u_r) + h(u_r) \text{sgn} u_r'|_0 + |g'(u_r) + h'(u_r) \text{sgn} u_r'|_0 \Delta u_r \\ &\quad + 2h(u_r) \delta(u_r') |_0 \Delta u_r' \end{aligned} \quad (23)$$

$\delta$  为 Dirac delta 函数

$\Delta u_r, \Delta u_r'$  分别为非线性杆元两端的相对位移与相对速度, 故式(15)是时变微分方程, I. H. B. 法中用迦辽金法求解, 这里改为直接用 F. F. T. 展开, 非线性力  $f$  之福氏展开依赖于  $u_r' = 0$  的时间点, 故在每一步频响分析后, 要将位移及速度响应通过 F. F. T. 变换到时域以决定  $u_r' = 0$  的时间。

令 
$$\underline{Y}_0 = \underline{F} \Phi = [\underline{F}_0 \underline{F}_1 \dots \underline{F}_r, \underline{F}_1^\perp \underline{F}_2^\perp \dots \underline{F}_r^\perp] \Phi$$

$$= \begin{bmatrix} F_{10} & F_{11} & \cdots & F_{1p} & F_{11}^{\perp} & F_{12}^{\perp} & \cdots & F_{1p}^{\perp} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ F_{N0} & F_{N1} & \cdots & F_{Np} & F_{N1}^{\perp} & F_{N2}^{\perp} & \cdots & F_{Np}^{\perp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_p \\ \Phi_1^{\perp} \\ \Phi_2^{\perp} \\ \vdots \\ \Phi_p^{\perp} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$\Delta \underline{Y} = \begin{bmatrix} G_{10} & G_{11} & \cdots & G_{1p} & G_{11}^{\perp} & G_{12}^{\perp} & \cdots & G_{1p}^{\perp} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{N0} & G_{N1} & \cdots & G_{Np} & G_{N1}^{\perp} & G_{N2}^{\perp} & \cdots & G_{Np}^{\perp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_p \\ \Phi_1^{\perp} \\ \Phi_2^{\perp} \\ \vdots \\ \Phi_p^{\perp} \end{Bmatrix}$$

$$= [\underline{G}_0, \underline{G}_1, \dots, \underline{G}_p, \underline{G}_1^{\perp}, \underline{G}_2^{\perp}, \dots, \underline{G}_p^{\perp}] \underline{\Phi} = \underline{G} \underline{\Phi} \quad (25)$$

令

$$\underline{\hat{F}} = [\underline{F}_0^{\perp}, \underline{F}_1^{\perp}, \dots, \underline{F}_p^{\perp}, \underline{F}_1^{\perp \top}, \underline{F}_2^{\perp \top}, \dots, \underline{F}_p^{\perp \top}]^{\top} \quad (26)$$

$$\underline{\hat{G}} = [\underline{G}_0^{\perp}, \underline{G}_1^{\perp}, \dots, \underline{G}_p^{\perp}, \underline{G}_1^{\perp \top}, \underline{G}_2^{\perp \top}, \dots, \underline{G}_p^{\perp \top}]^{\top} \quad (27)$$

及

$$\begin{aligned} \underline{\hat{\Phi}}^{\times} &= \underline{\hat{\Phi}}^{\times} \otimes I_N \\ &= [[\underline{\Phi}_0], [\underline{\Phi}_1], \dots, [\underline{\Phi}_p], [\underline{\Phi}_1^{\perp}], [\underline{\Phi}_2^{\perp}], \dots, [\underline{\Phi}_p^{\perp}]] \end{aligned} \quad (28)$$

$\otimes$ 为克罗克乘积,  $I_N$ 为  $N \times N$  单位矩阵,  $\underline{\hat{\Phi}}^{\times}$ 为  $N \times [N \times (2p+1)]$  矩阵

$$\Phi_j(\theta) = \cos j\theta, \quad \Phi_j^{\perp}(\theta) = \sin j\theta \quad (29)$$

则有

$$\underline{Y}_0 = \underline{\hat{\Phi}}^{\times} \underline{\hat{F}} \quad (30)$$

$$\Delta \underline{Y} = \underline{\hat{\Phi}}^{\times} \underline{\hat{G}} \quad (31)$$

由一组任选的初值  $Y_0$  开始, 代入(15)式, 将  $\bar{f}_0 + f_0$  也展为福氏级数, 进行求解。通常以线性解为初值, 逐步增大幅度至非线性解, 再逐步改变频率, 以上一步的终值作为下一步的初值, 跟踪搜索。文[20]给出了

$$\int_0^{\theta} \underline{\Phi}(\bar{\theta}) d\bar{\theta} = \omega \underline{P} \underline{\Phi}(\theta) \quad (32)$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{\omega} & 0 & -\frac{2}{\omega} e_p \\ 0 & 0_{p \times p} & \frac{1}{\omega} \underline{J}_{p \times p} \\ \frac{1}{\omega} e_p & -\frac{1}{\omega} \underline{J}_{p \times p} & 0_{p \times p} \end{bmatrix}_{(2p+1) \times (2p+1)} \quad (33)$$

其中

$$\bar{e}_s = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ \vdots \\ 1/p \end{Bmatrix} \quad \bar{I}_{s \times s} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1/2 & & & \\ & & 1/3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1/p \end{bmatrix} \quad (34)$$

故有

$$\int_0^{\theta} \underline{\phi}^r(\bar{\theta}) d\bar{\theta} = \omega [\underline{\phi}^r P^r] \otimes I_N = \omega \underline{\phi}^r \hat{P}^r \quad (35)$$

及

$$\underline{\phi}^r = \frac{1}{\omega} \underline{\phi}^r \hat{P}^{-r} \quad (36)$$

将非线性力按总体坐标排列,可写成

$$\{f\} = \sum_{i=1}^k (\{f_i\}_0 + [T_i]_0 \Delta Y + [S_i]_0 \Delta Y') \quad (37)$$

其中

$$[T_i]_0 = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & & \\ & \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \Big|_0 & \cdots & -\frac{\partial f_i}{\partial u_i} \Big|_0 & \alpha \text{行} \\ & 0 & \vdots & \vdots & \text{---} \\ & -\frac{\partial f_i}{\partial u_i} \Big|_0 & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \Big|_0 & \beta \text{行} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$[S_i]_0 = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & & \\ & \frac{\partial f_i}{\partial u_i'} \Big|_0 & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial u_i'} \Big|_0 & \alpha \text{行} \\ & 0 & \vdots & \vdots & \text{---} \\ & -\frac{\partial f_i}{\partial u_i'} \Big|_0 & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial u_i'} \Big|_0 & \beta \text{行} \\ \alpha \text{列} & & & & \beta \text{列} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$[T_i]_0, [S_i]_0$ 中除对应于 $\alpha, \beta$ 行列的四个元素外,其余均为零,将 $\bar{f}_0 + \Delta \bar{f} + \underline{f}_0$ 展为福氏级数。

设它们为 $\underline{\phi}^r \hat{C}$ ,将 $\frac{\partial f}{\partial \omega} \Big|_0$ 亦展为福氏级数,设它为 $\underline{\phi}^r \hat{H}$ ,将 $\underline{A}, [T_i]_0, [S_i]_0$ 亦分别展为福氏级数矩阵

$$\underline{A} = [\underline{A}_0, 0, 0, \cdots, 0] \underline{\phi} = \hat{\lambda} \hat{\phi} \quad (40)$$

$$[T_i]_0 = [T_0, T_1, \cdots, T_r, T_r^{\perp}, T_r^{\perp}, \cdots, T_r^{\perp}] \underline{\phi} = \hat{T}_i \hat{\phi} \quad (41)$$

$$[S_i]_0 = [S_0, S_1, \cdots, S_r, S_r^{\perp}, S_r^{\perp}, \cdots, S_r^{\perp}] \underline{\phi} = \hat{S}_i \hat{\phi} \quad (42)$$

$\underline{\hat{\phi}}$  为  $\underline{\hat{\phi}}^T$  的转置矩阵, 其维数为  $[(2p+1) \times N] \times N$ 。利用三角函数、和角公式可以证明

$$\underline{\hat{\phi}} \underline{\hat{\phi}}^T = \underline{\hat{\phi}}^T \underline{\hat{\phi}} \quad (\underline{\hat{L}} \text{ 代表 } \underline{\hat{A}}, \underline{\hat{T}}_i \text{ 或 } \underline{\hat{S}}_i) \quad (43)$$

$$\underline{\hat{L}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\underline{L}_0 & \cdots & \underline{L}_q & \cdots & \underline{L}_1^T \underline{L}_1^T & \cdots & \underline{L}_q^T \\ 2\underline{L}_1 & \cdots & \underline{L}_{1+q} + \tau \underline{L}_{1-q} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 2\underline{L}_p & \cdots & \underline{L}_{p+q} + \tau \underline{L}_{p-q} & \cdots & \underline{L}_{p+1}^T - \theta \underline{L}_{p-1}^T & \cdots & \underline{L}_{p+q}^T - \theta \underline{L}_{p-q}^T \\ 2\underline{L}_t^T & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 2\underline{L}_r^T & \cdots & \underline{L}_{r+q}^T + \theta \underline{L}_{r-q}^T & \cdots & \tau \underline{L}_{r-1} - \underline{L}_{r+1} & \cdots & \tau \underline{L}_{r-1} - \underline{L}_{r+q} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \tau = 1 |_{p \neq q} \\ \tau = 2 |_{p=q} \\ \theta = -1 |_{<} \\ \theta = 0 |_{=} \\ \theta = +1 |_{>} \end{matrix} \quad (44)$$

利用以上诸式, 可得 (15) 式之福氏展开式为

$$\begin{aligned} \underline{\hat{\phi}} \underline{\hat{G}} + \frac{\omega}{\omega_0} \underline{\hat{\phi}}^T \underline{\hat{A}} \underline{\hat{P}}^T \underline{\hat{G}} - \sum_{i=1}^k \frac{\omega}{\omega_0} (\underline{\hat{\phi}}^T \underline{\hat{P}}^T \underline{\hat{T}}_i + \frac{1}{\omega} \underline{\hat{\phi}}^T \underline{\hat{\phi}} \underline{\hat{P}}^T \underline{\hat{S}}_i \underline{\hat{P}}^{-T}) \underline{\hat{G}} \\ = - \underline{\hat{\phi}}^T \underline{\hat{P}} - \frac{\omega}{\omega_0} \underline{\hat{\phi}}^T \underline{\hat{A}} \underline{\hat{P}}^T \underline{\hat{P}} + \frac{\omega}{\omega_0} \underline{\hat{\phi}}^T \underline{\hat{P}}^T \underline{\hat{C}} + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \underline{\hat{\phi}}^T (\omega \underline{\hat{P}}^T \underline{\hat{H}} - \underline{\hat{P}}) \end{aligned} \quad (45)$$

在求系统的频率响应曲线时, 可保持激振力为一常数, 故  $\Delta F = 0$ 。通常在每一迭代步保持激励频率不变, 故 (45) 式中含  $\Delta\omega/\omega_0$  的一项亦为零。求解时首先假设一组  $\underline{\hat{P}}$  及  $\underline{\hat{C}}$  的初值, 故 (45) 式在每次迭代时为已知。

$$\underline{\hat{G}} = \underline{\hat{P}} - \frac{\omega}{\omega_0} \underline{\hat{A}} \underline{\hat{P}}^T \underline{\hat{P}} + \frac{\omega}{\omega_0} \underline{\hat{P}}^T \underline{\hat{C}} = \underline{\hat{D}} \quad (46)$$

$$\text{及} \quad I + \frac{\omega}{\omega_0} \underline{\hat{A}} \underline{\hat{P}}^T - \frac{\omega}{\omega_0} \sum_{i=1}^k [\underline{\hat{P}}^T \underline{\hat{T}}_i + \frac{1}{\omega} \underline{\hat{P}}^T \underline{\hat{S}}_i \underline{\hat{P}}^{-T}] = \underline{\hat{B}} \quad (47)$$

$$\text{则有} \quad \underline{\hat{G}}^{(j+1)} = [\underline{\hat{B}}^{(j)}]^{-1} \underline{\hat{D}}^{(j)} \quad (48)$$

$$\Delta Y^{(j+1)} = \underline{\hat{\phi}}^T \underline{\hat{G}}^{(j+1)} \quad (49)$$

$$\underline{Y}^{(j+1)} = \underline{Y}^{(j)} + \Delta Y^{(j+1)} \quad (50)$$

在共振峰附近, 幅度不再急剧增长, 可用幅度增长法求解, 在每一迭代步保持幅度为常数, 迭代计算  $\Delta\omega$

$$\text{即} \quad \underline{\hat{G}}^{(j+1)} = [\underline{\hat{B}}^{(j)}]^{-1} (\underline{\hat{D}}^{(j)} + \frac{\Delta\omega^{(j+1)}}{\omega_0} (\omega^{(j)} \underline{\hat{P}}^T \underline{\hat{H}}^{(j)} - \underline{\hat{P}}^{(j)})) \quad (51)$$

$$\omega^{(j+1)} = \omega^{(j)} + \Delta\omega^{(j+1)} \quad (52)$$

$\underline{\hat{B}}$  是  $N \times (2p+1)$  方阵, 对于多自由度体系, 其维数可能很高, 但用了模态综合, 可使其维数降低, 而当只有少数非线性杆位于结构边界面上时,  $\underline{\hat{T}}_i, \underline{\hat{S}}_i$  是高度稀疏的矩阵,  $\underline{\hat{A}}$  是方块对角常数矩阵, 每次迭代只需修正  $\underline{\hat{T}}_i, \underline{\hat{S}}_i$  阵, 故计算工作量不大。如果用修正的 N-R 法, 令  $\underline{\hat{B}}$  阵在迭代过程中不变, 每次只修正  $\underline{\hat{D}}$  中之  $\underline{\hat{C}}$ , 由于  $\underline{\hat{C}}$  中有大量零元素, 只在对应于非线性力的位置不

为零,故如用分块矩阵求逆,每次迭代只需修正对应于非线性部分,计算量将大为减少,此法之优点是不需求复特征解,可以处理非比例阻尼结构。

### 三、计算例题

引用文[13]的算例,两悬臂梁里通过一个摩擦结点连在一起,如图2,当梁的模态阻尼与结点摩擦力幅度变化时,计算得梁1根部应变响应如图3、4。

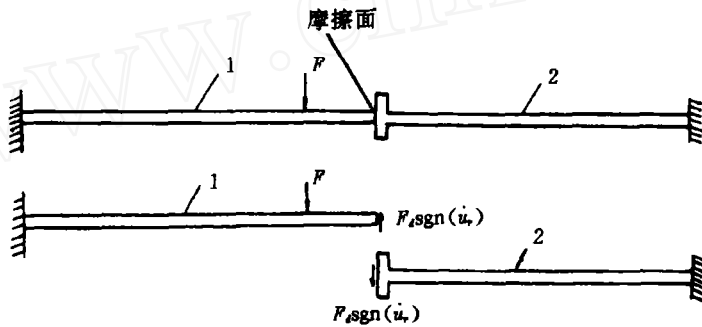


图2. 摩擦结点梁计算模型

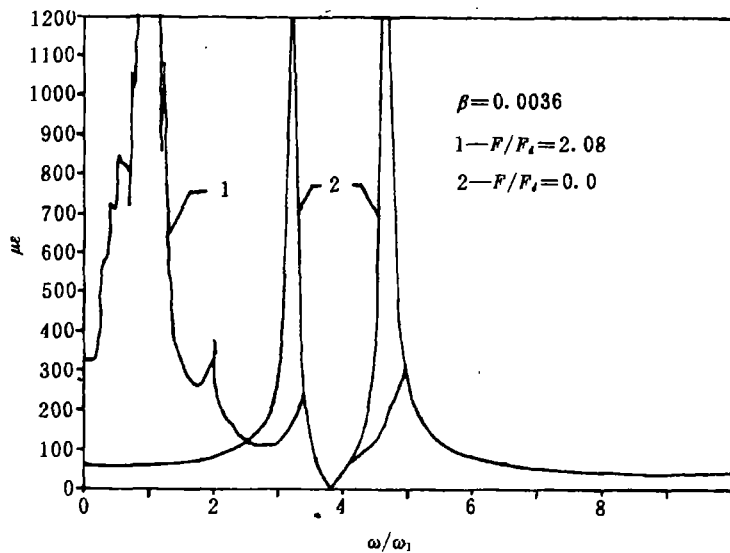


图3. 摩擦力对梁的动特性的影响

图3. 中曲线2对应于摩擦力非常大的极限情况,在整个频率内摩擦力将梁1与2紧固的建立在一起,使之成为一个两端固支的整体梁,曲线2为此两端固支梁前二阶频响曲线。图3中曲线1对应于摩擦力较小的情况,在低频就发生了滑动,梁1成为一支左端固定右端受到摩擦力约束的悬臂梁,曲线1显示了这支梁的基频响应很大,而高次谐波影响不小。当激励频率增大后,避开了梁1的基频  $\omega_1$ ,故响应迅速减小,至  $\omega/\omega_1 > 3.3$ 后,因响应太小,两梁结点滑动停止,其响应曲线又与两端固支整体梁的重合。这个例题说明了增加摩擦结点后,调整摩擦力的幅度可以改变系统的共振特性。图4给出了梁1模态阻尼  $\beta = 0.1, F/F_s = 1.70, 2.08, 2.46$  三种情况下的响应曲线,可见对同一模态阻尼的结构,增大结点摩擦阻尼后也能明显地抑制



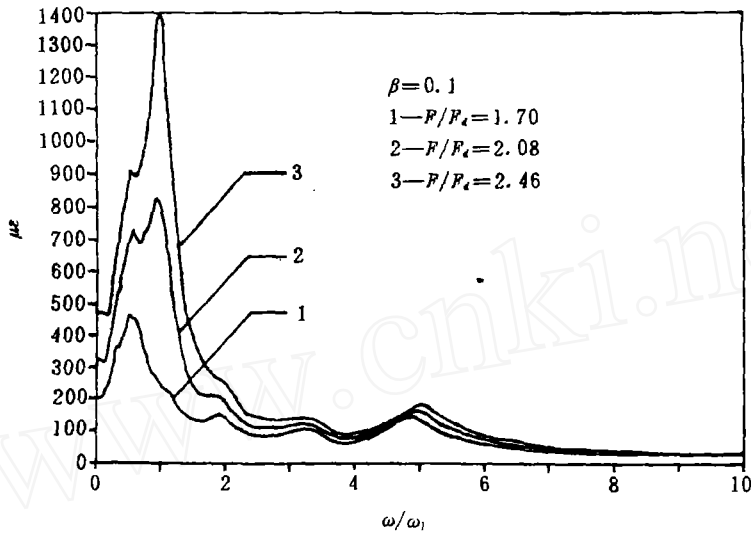


图4. 摩擦力的减振效果

其振峰。由这些图中还可看出结构具有一定的模态阻尼会明显地抑制高频响应及高次谐波响应,故为了压缩结构的振动响应,最好是同时增大模态阻尼与摩擦阻尼。前者可使用粘弹性层处理技术,后者可用非线性滞迟元件。应当指出的是—般的弹塑性阻尼器、钢丝绳减振器等都具有双线性滞迟性能,都包含有干摩擦特征。

#### 四、后 记

I. H. B. 方法是分析强非线性振动问题的一个好方法,曾用于分析三维体、多层板、多自由度等多种问题,本文结合模态综合、状态空间与 F. F. T. 技术,将它用于计算具有局部非线性多自由度结构。本文作者之一得到中国国家自然科学基金资助,又应邀去香港理工学院与另一作者合作完成此文。在香港受到香港政府 U. P. G. C. 基金资助,计算工作是刘玉标同志完成的,在此一并致谢。

#### 参 考 文 献

- [1] Beards, C. F. ; Damping in Structural Joints, *Shock and Vibration Digest*, Vol. 11, No. 9, 1979
- [2] Sinha, A. , Griffin, J. H. ; Friction Damping of Flutter in Gas Turbine Engine Airfoils, *AIAA J. Aircraft*, Vol. 20, No. 4, 1983, pp. 372-376
- [3] Sinha, A. and Griffin, J. H. ; Effects of Static Friction on the Forced Response of Frictionally Damped Turbine Blades, *ASME Jour. of Engng. for Gas Turbines and Power*, Vol. 106, No. 1, 1984, pp. 65-69
- [4] Dowell, E. H. ; The Behavior of a linear Damped Modal System with a Nonlinear Spring-Mass-Dry Friction Damper System Attached, *Jour. of Sound and Vibration*, Vol. 89, No. 1, 1983, pp. 65-84
- [5] Ferri, A. A. and Dowell, E. H. ; The Behavior of a Linear Damped Modal System with a Nonlinear Spring Mass-Dry Friction Damper System attached, Pt. I , *Jour. of Sound and Vibration*, Vol. 91, 1983, pp. 269-291
- [6] Jezequel, L. ; Structural Damping by Slip in Joints, *ASME Jour. of Vib. Acoust. Stress and Reliability in Design*, Vol. 105, No. 4, 1983, pp. 497-504
- [7] Den Hartog, J. T. ; Forced Vibrations with Combined Coulomb and Viscous Friction, *Trans. ASME* 1931, Paper

APM-53-9, pp. 107-115

- [8] 田千里、李盛章:用 SAP5程序计算具有干摩擦之隔震问题,《振动与冲击》,1982年第4期,pp. 28-33
- [9] Tian, Q. L. et. al. ; Stochastic Dynamic Analysis of a Structure with Frictional Joints, *Shock and Vibration Bull.* 54, Pt. 3, 1984, pp. 11-17
- [10] Liauw, T. C. , Tian, Q. L. , and Cheung, Y. K. ; Dynamic Analysis of a Structure with Sliding Base, *Shock and Vibration Bull.* 57, Pt. 3. 1987, pp. 47-56
- [11] Ostachowicz, W. ; The Harmonic Balance Method for Determining the Vibration Parameters in Damped Dynamic Systems, *Jour. of Sound and Vibration*, Vol. 131, No. 3, 1989, pp. 465-473.
- [12] Pierre, C. , Ferri, A. A. , Dowell, E. H. ; Multi-Harmonic Analysis of Dry Friction Damped Systems using an Incremental Harmonic Balance Method, *ASME Jour. of Appl. Mech.* , Vol. 52. , Dec. 1985, pp. 958-964
- [13] Ferri, A. A. , Dowell, E. H. ; Frequency Domain Solutions to Multi-Degree-of-Freedom Dry Friction Damped Systems, *Jour. of Sound and Vibration*, Vol. 124. No. 2, 1988, pp. 207-224
- [14] Lau, S. L. , Cheung, Y. K. , Wu, S. Y. ; A Variable Parameter Incremental Method for Dynamic Instability of Linear and Nonlinear Elastic Systems, *ASME Jour. of Appl. Mech.* , Vol. 49, Dec. 1982, pp. 849-853
- [15] Lau, S. L. , Cheung, Y. K. , Wu, S. Y. ; Incremental Harmonic Balance Method with Multiple Scales for Aperiodic Vibration of Nonlinear Systems, *ASME Jour. of Appl. Mech.* , Vol. 50, Dec. 1983, pp. 871-876
- [16] Chai, Y. S. and Noah, S. T. ; Forced Periodic Vibration of Unsymmetric piecewise-linear Systems, *Jour. of Sound and Vibration*, Vol. 121, No. 1, 1988, pp. 117-126
- [17] Minnetyan Levon et. al. ; Dynamic Simulation of Structural Systems with Isolated Nonlinear Components, *Shock and Vibration Bull.* 53, Pt. 3, 1983, pp. 63-71
- [18] Cameron, J. M. and Griffin, J. H. ; An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems, *ASME Jour. of Appl. Mech.* , Vol. 56, March 1989. pp. 149-153
- [19] Craig, R. R. J. ; *Structural Dynamics*, John Wiley & Sons, Inc. , 1981
- [20] Chung Hungyuan, Solution of State-Space Equations via Fourier Series, *Int. Jour. Systems Sei.* , Vol. 18, No. 2, 1987, pp. 221-228

## Dynamic Analysis of Locally Nonlinear Structure by I. H. B. Method

Liu ShiLin

Tian Qianli

(Hongkong Polytechnic Institute)

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

### Abstract

The Incremental Harmonic Balance (I. H. B. ) method which accommodates multiple harmonic components in the description of nonlinear forces is an efficient method for handling strong nonlinearities, being extended in the presented paper to analyze the steady response of a locally nonlinear structure. The whole system being analyzed is decomposed into several linear substructures. All nonlinear elements are located at the junction boundaries of substructures. The response of the system is analyzed by the I. H. B. method incorporated with F. F. T. technique and modal synthesis method in state space.

**key words:** nonlinear vibration, structural vibration, modal synthesis method, structural damping, Incremental Harmonic Balance method