

用统计方法估算疲劳寿命 的参数敏感性分析*

梅红 柳春图

中国科学院力学研究所

文摘 本文以概率断裂力学的方法为基础,讨论了影响疲劳寿命的材料参数、初始裂纹尺寸和载荷等各参数的敏感性,并对计算疲劳寿命的随机样本容量进行了分析,从而提高了计算速度。另外,本文还对表面裂纹形状在扩展中的变化进行了讨论。

主题词 疲劳寿命 参数分析 统计分析 结构可靠性 断裂力学

引言

结构的疲劳寿命是评价其可靠性的关键问题之一。由于工程中使用了许多大型焊接结构,在焊缝附近不可避免地存在了一些原始缺陷,裂纹便由此萌生并扩展,其裂纹扩展的寿命就是结构的疲劳寿命。因此,根据裂纹扩展速率估算寿命的断裂力学方法越来越引起人们的重视。

通常,Paris公式被用来描述疲劳裂纹扩展速率:

$$\frac{da}{dN} = c \cdot (\Delta k)^m$$

其中 c 、 m 是材料性能参数, a 是裂纹长度, N 是疲劳寿命, Δk 为应力强度因子幅值,由此可见,影响疲劳寿命的因素很多,而这些因素在实际工程中又往往具有不确定性。如材料性能参数的分散性,初始裂纹尺寸的随机性,以及载荷改变的不确定性等等。而由于这些不确定参数,从统计学角度来看,都是服从某种概率分布的随机变量,故而,将概率统计的思想方法引入断裂力学。用这种“概率断裂力学”的方法来研究结构的疲劳寿命更为合理。采用概率统计方法可以得到疲劳寿命的分布状况以及有关统计量,分析结果的好坏关键在于我们对影响寿命的各种随机参量的测试与分析的合理与否。本文正是在采用概率统计方法估算疲劳寿命的基础上,进一步研究和讨论疲劳寿命对各随机参量的敏感性。

一、材料性能参数 c 与 m 的敏感性

由于材料性能参数 c 与 m 的统计推断是以疲劳实验的原始数据为依据的,因此,原

* 本课题得到国家自然科学基金资助。

本文1990年11月26日收到。

始数据的数量与数值对统计分析的准确程度有很大影响,为了解 c 和 m 的统计推断的误差对于寿命估算的影响,我们分别分析了 c 和 m 的均值与标准差改变时,寿命的均值与标准差将会如何改变。

1. 寿命 N 对 c 的敏感性

由以往的实验和文献知,参数 c 一般服从对数正态分布, $\ln c \sim N(\mu, \sigma)$, μ, σ 分别为对数均值和对数标准差。

(1) 标准差的影响

固定 $\ln c$ 的均值 μ 不变,并固定其它各参数,只改变 $\ln c$ 的标准差 σ ,计算对应的疲劳寿命 N ,计算结果表明,寿命的均值几乎没有变化,而其标准差则变化很大,以 C_{vc} , C_{vN} 分别表示 $\ln c$ 与 N 的变异系数($C_v = \text{标准差} \sigma / \text{均值} \mu \times 100\%$),则有 $C_{vN} / C_{vc} = \text{const.}$ 以 $\ln c \sim N(-28.68, \sigma)$ 为例,有 $C_{vN} = 30C_{vc}$ 。

(2) 均值的影响

固定 $\ln c$ 的变异系数及其它各参量,改变均值 μ ,计算寿命的均值 \bar{N} ,可得 $\bar{N}_2 / \bar{N}_1 = \mu_1 / \mu_2$ 。随着 c 的均值增大,结构寿命的均值成反比减小,此结论对不同变异系数均成立。

2. 寿命 N 对 m 的敏感性

文献给出的 m 分布是正态分布, $m \sim N(\mu, \sigma)$ 。

(1) 标准差的影响

取 m 均值 μ 和其它参量为确定量,改变标准差 σ ,与 c 的结果很相似,寿命均值变化甚微,而标准差却大大改变。记 C_{vm} 为 m 的变异系数,故: $C_{vN} / C_{vm} = \text{const.}$ 以 $m \sim N(3.5, \sigma)$ 为例,有 $C_{vN} = 21C_{vm}$ 。

(2) 均值的影响

以 $m \sim N(\bar{m}, 0.02\bar{m})$ 为例,改变 \bar{m} ,可以得到寿命 \bar{N} ,故

$$\frac{\ln \bar{N}_1 - \ln \bar{N}_2}{\bar{m}_2 - \bar{m}_1} = 5.9$$

3. 当 c, m 同时为随机变量时

取 $m \sim N(3.5, \sigma_m)$, $\ln c \sim N(-28.68, \sigma_c)$ 为例,由于两个参数的分散度,必然造成寿命分散度的大大提高。有趣的是通过计算得到:

$$C_{vN(m+c)} \doteq C_{vN(m)} + C_{vN(c)} \doteq 30C_{vc} + 21C_{vm}$$

即 m, c 二者的分散度对寿命分散度的影响相互独立,总影响等于二者分别影响的叠加。

由以上的计算结果可以看出, c 与 m 都是材料参数,并有相似的敏感性,即当其均值变化时,寿命均值随之变化,且变化规律与确定性分析中寿命随材料参数的变化规律相似。而材料参数标准差的变化对寿命的影响也主要反映在寿命的分散度上, C_{vN} 随 C_{vc} 和 C_{vm} 的增大而迅速增大。计算结果还表明,虽然此时寿命的均值变化很小,但寿命分布曲线的左端却有很大变化,与95%存活率相对应的寿命 N_{95} 将会大大降低。总之,寿命对材料参数的变化是十分敏感的。

二、寿命对初始裂纹尺寸的敏感性

1. 初始裂纹深度 a_0 对寿命的影响

目前各文献中对初始裂纹深度 a_0 的分布情况说法不一,有对数正态分布、指数分布以及三参数威布尔分布等三种不同的说法,对于 a_0 的均值与取值范围也给出了不同的结果,这不仅由于检测的客观对象有差异,而且也与检测手段的精度有关。

(1) a_0 的分布类型对寿命的影响

在 a_0 均值相同的条件下,我们对假定 a_0 为指数分布与威布尔分布这两种情况进行了计算比较,结果表明,当 a_0 为指数分布时,所得到的寿命均值与变异系数都比 a_0 为威布尔分布时的值要大,但随着 \bar{a}_0 减小,二者相差也在减小,当 $\bar{a}_0 = 0.1$ 时,二者相减无几。此外,寿命分布曲线的左端在两种情况下比较相近,即 $N_{0.5}$ 对 a_0 分布类型不太敏感,这一点对于设计来说是有利的。

(2) a_0 均值对寿命的影响

当 a_0 为威布尔分布时,寿命的均值随 a_0 均值 \bar{a}_0 的变化规律与确定性分析中二者关系十分近似,即 $\bar{N}_1/\bar{N}_2 = \bar{a}_{02}/\bar{a}_{01}$,而且,与50%存活率及95%存活率对应的寿命 N_{50} 、 N_{95} 的变化也同样与 \bar{a}_0 的变化近似成反比关系。

当 a_0 为指数分布时,寿命均值的变化相对比较小时,即 \bar{N} 对 \bar{a}_0 的敏感性比 a_0 为威布尔分布时弱,因此,结果还显示出寿命分布曲线左端对 \bar{a}_0 的变化更不敏感, $N_{0.5}$ 很稳定。

(3) a_0 标准差对寿命的影响

a_0 标准差的变化对寿命分散度的影响不及材料参数 c 与 m 的影响大,一般来说, C_{VN} 取值在 $(0.3C_{va0}, 2C_{va0})$ 之间。由于我们考虑到在实际中 a_0 的取值范围是有限的,根据各文献,我们给出 a_0 在 $(0.05, 0.5)$ 之间取值,这样,使得寿命分布曲线左端受 a_0 分散度变化的影响很小,当 C_{va0} 从10增大到100时, $N_{0.5}$ 仅降低20%左右。

2. 初始裂纹形状 a_0/c_0 对寿命的影响

取 $\bar{a}_0 = 0.32$,选 $a_0/c_0 = 0.15, 0.2, 0.25, 0.5, 1.0$,五种情况进行了计算,当 a_0 为指数分布时,寿命的均值比 a_0 为威布尔分布时大一倍左右,但二者变化规律都与确定性分析中相似,故

$$\bar{N}_{1.0}/\bar{N}_{0.15} \approx 3$$

其中, $\bar{N}_{1.0}$ 、 $\bar{N}_{0.15}$ 分别为 $a_0/c_0 = 1.0, 0.15$ 时的寿命均值。这说明初始裂纹形状对寿命的影响不大,这是因为在疲劳裂纹扩展过程中,裂纹形状将按照一定的规律自行调整,趋于某一定值。

3. a_0 与材料参数同时为随机变量时

取 a_0 满足威布尔分布,再取 c 或 m 或二者同时为随机变量,计算结果表明,对寿命产生的影响并不是 a_0 的影响与材料参数的影响的简单叠加,此时,它们产生的影响因彼此复盖而有所减弱。

三、载荷对寿命的影响

1. 常幅载荷大小的影响

改变载荷大小,我们分别用确定性分析($\ln c = -28.68$)及统计分析($\ln c \sim (-28.68, 0.2868)$)方法计算寿命,可以得到表1。

表 1

应力幅值 $\Delta\sigma_t(N/mm^2)$	确定分析 N	统 计 分 析			
		\bar{N}	N_{50}	N_{95}	C_{vN}
124.5	95383	99290	96662	55433	30
150.9	48656	50648	49307	28275	30
177.4	27617	28747	27986	16049	30
186.2	23311	24266	23623	13547	30
212.7	14630	15231	14827	8503	30
235.2	10290	10712	10428	5980	30
248.2	8524	8873	8638	4953	30

从表1可以看出无论载荷多大,都有

$$N_{\text{确}}/\bar{N} \approx 0.96; \quad \bar{N}/N_{50} \approx 1.03; \quad \bar{N}/N_{95} \approx 1.79$$

且 N 与 $(\Delta\sigma_t)^m$ 成反比,此时 $m = 3.5$ 。另外,在统计分析中,材料参数的标准差对寿命标准差的影响 $C_{vN} = 30C_{vc}$,不受载荷大小的影响。

2. 在程序载荷下的疲劳寿命

许多实际工程结构所承受的疲劳载荷并不是常幅,而是一个连续的随机过程,如海洋结构所承受的海浪风暴等。为了确定此时结构的使用寿命,则须模拟真实载荷状态来进行疲劳试验,而由于疲劳载荷的随机性,真实情况的千变万化,须将实测载荷简化,通常将载荷简化成“程序载荷”,即按一定程序施加不同大小的载荷循环。本文对此作了一点初步研究,在常幅载荷的计算程序基础上,加以改进,对四级程序加载进行了计算,并与常幅载荷的计算结果进行了比较。给定四级程序载荷对应的应力幅值为 $250N/mm^2$, $225N/mm^2$, $200N/mm^2$, $175N/mm^2$,我们分别对两种不同加载次序如图1和图2下的寿命进行计算,并与等效常幅 $\sigma^2 = \sum_{i=1}^4 \sigma_i^2/4$,此时, $\sigma = 214.3N/mm^2$ 的统计寿命进行比较,见表2。

从表2计算结果可以看出,三种加载方式的统计寿命相差很小,在5%以内,这个结果与以前实验结果是有一定出入的,实验结果中程序加载的寿命高于常幅载荷的寿命。我们分析这主要是由于过载的影响,即过载会使裂纹尖端产生塑性区,从而抑制裂纹扩展,而通过Paris公

表 2

	\bar{N}	σ	N_{50}	N_{95}
程序1	28523	8310	27256	17346
程序2	28599	8310	27328	17432
常幅	29609	8672	28283	17954

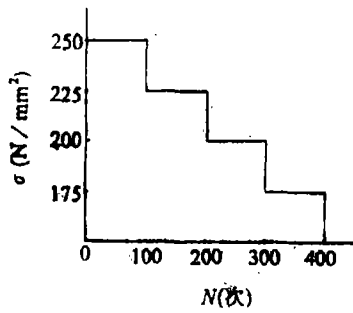


图 1

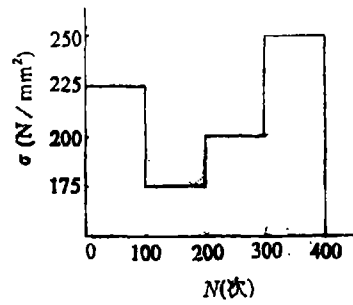


图 2

式计算出的寿命没有考虑到这个因素，所以比实验结果要低。

四、表面裂纹形状在疲劳扩展中的变化

表面裂纹形状在疲劳扩展过程中是如何变化的，到目前为止，仍是一个尚未解决的问题，人们对此提出了不同的假设，如设 $a/c = 1$ 及 $a/c = 0.15$ 等。我们考察了在 a/c 取不同值时寿命的变化情况，发现寿命对 a/c 的变化比对 a_0/c_0 的变化敏感得多，所得到的寿命值有很大差异。

在本文计算中，对于裂纹形状未做任何假定，而是在裂纹深度与长度两个方向上分别应用Paris公式，并用递推法来进行积分计算。我们观察了在计算过程中 a/c 的变化情况，可以看到在两个方向取相同的材料参数条件下，不论初始裂纹形状 a_0/c_0 多大，经过若干步计算后， a/c 的变化趋于一致，在裂纹贯穿壁厚时，均有 $a/c = 0.7$ ，而且无论在确定性分析中还是统计分析中，也无论载荷多大，都有同样结论，此结论正确与否还有待于试验验证。

五、统计样本容量的多少对寿命估算的影响

我们针对实际工程中影响结构寿命的因素多，且不确定性而采用了统计分析方法来估算结构的疲劳寿命。如视真实疲劳寿命的整个分布为母体，那我们所做的只是从这个母体中随机抽取子样，即由Monte - Carlo法产生出一定容量的随机子样来表示真实母体的统计分布。因此，推断的可信度与子样容量的大小有关，容量越大，可信度越高。为了提高计算速度，我们试图找到当子样容量 n 为多大时，子样寿命的统计估算具有相当的置信度可以接受。

1. 理论分析

我们考虑从一个均值为 μ_0 ，标准差为 σ_0 的母体中随机抽取一个大小为 n 的子样，并求出该子样的均值 \bar{x} ，由概率统计理论，可得到当子样为大子样($n > 50$)时，作为随机变量的 \bar{x} 总是按正态分布的，且 \bar{x} 分布的母体均值也为 μ_0 ，标准差为 σ_0/\sqrt{n} ，我们将 \bar{x} 分布写成标准正态变量

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$$

由正态分布曲线得到, u 以 95% 的概率位于区间 $(-1.96, 1.96)$ 之内, 即

$$-1.96 \leq \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \leq 1.96$$

$$\Rightarrow -\frac{1.96\sigma_0}{\sqrt{n}\bar{x}} \leq \frac{\bar{x} - \mu_0}{\bar{x}} \leq \frac{1.96\sigma_0}{\sqrt{n}\bar{x}}$$

对于大子样, 子样标准差接近母体标准差, 则记 $s = \sigma_0 / \bar{x}$ 是子样的变异系数, $\sigma = |(\bar{x} - \mu_0) / \bar{x}|$ 是子样均值与母体均值的相对误差, 有

$$\sigma \leq \frac{1.96s}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow n < 4s^2 / \sigma^2$$

取 $\sigma = 5\%$, 有 $n < 1600s^2$ 。即当 $n = 1600s^2$ 时, 子样均值与母体均值的相对误差小于 5%, 此结论的置信度为 95%。

表 3 给出了在不同变异系数下, n 的最大取值。

对于标准差, 只要是大子样 ($n > 50$), 可以认为子样的标准差为母体标准差的无偏估计。

对存活率的估计可以由概率论理论知, 要使子样频率 μ/n 与母体概率 p 的差小于 ε 的概率不小于 β , 则应有

$$2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 \geq \beta$$

其中 Φ 为拉普拉斯函数。取 $\beta = 95\%$, 当存活率为 95% 时, $p = 5\%$, $q = 95\%$, 有

$$\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{0.0475}}\right) \geq 0.975$$

$$\Rightarrow n \geq 0.19 / \varepsilon^2$$

当存活率为 50% 时, $p = q = 50\%$, 有

$$\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{0.025}}\right) \geq 0.975$$

$$\Rightarrow n \geq 0.1 / \varepsilon^2$$

取 $\varepsilon = 5\%$, $n \geq 76$ 满足以上两式; 取 $\varepsilon = 2\%$, $n \geq 480$ 满足以上两式。即当 n 大于 76 时, 子样的损坏率与母体的损坏率误差小于 5%, 此结论的置信度为 95%。

表 3

s	0.2	0.3	0.5	0.6
n	64	144	400	576

2. 计算结果

我们取不同的参数为随机变量, 计算了在不同的变异系数下, 改变样本容量 n 时, 寿命的均值、方差、存活率的改变, 以材料参数为随机变量, 对于 $C_{VN} = 0.1$ 和 0.3 , 假设 $n = 500$ 为母体样本, 对于 $C_{VN} = 0.6$, 假设 $n = 1000$ 为母体样本, 表4给出了当 n 变化时, 各子样结果与母体结果的相对误差(%)。

计算结果与分析结果比较接近。我们可以得到, 当寿命分散度不是很大时, 100根试件的结果就有较高的可信度。当寿命比较分散时, 一般地取500根左右是可靠的。

表 4

C_{VN}	n	$\bar{N}(\%)$	$\sigma(\%)$	50%存活率	95%存活率
0.1	15	0.6	8.2	1.4	3.3
	50	1.9	6.2	2.8	3.8
	100	1.1	0.4	0.3	3.8
0.3	15	3	9	0.1	3.6
	50	5.8	11	3.8	4
	100	3.2	2.4	1.5	4
0.6	50	16	14	7	8
	100	9.2	2	4.8	5
	300	3.3	5.2	2.5	4.9
	500	2.9	2.5	2.9	1.1

结 论

1. 本文应用概率断裂力学的方法计算疲劳寿命, 对影响寿命的各参量进行了敏感性分析, 结果表明, 材料参数 c 与 m 的均值与标准差的变化对寿命的影响较大, 特别是 c 与 m 的分散度对寿命分散度有很大影响, 初始裂纹深度 a_0 的影响次之, 寿命对初始裂纹形状的变化不敏感。

2. 本文对加在结构上的疲劳载荷进行了分析, 在常幅下, 载荷幅值的变化对寿命均值影响极大。而程序加载下的寿命与等效常幅载荷下的寿命相差无几, 可用常幅替代, 且加载次序影响也甚微。

3. 本文对表面裂纹形状在裂纹扩展中的变化情况以及对寿命的影响进行了讨论, 当裂纹形状 a/c 取不同值时, 寿命的变化比对初始 a_0/c_0 取不同时的变化要敏感得多。因此, 裂纹形状是估算寿命时应注意的一个因素。本文在对裂纹形状未做任何假定下, 考虑了 a/c 在扩展中的变化, 得到 a/c 在扩展中将自行调整, 趋于一定值。

4. 本文还对这种概率统计方法计算寿命的随机样本容量大小进行了计算分析, 得到在分散度不大时, 取100根试件的寿命统计参量就有较高的可信度。从而, 大大提高了计算速度。

参 考 文 献

- [1] Lidiard, A, B. "Probabilistic Fracture Mechanics", in "Fracture Mechanics", ed. by R. A. Smith (1979).
- [2] Bokalrad, T. and Karlsen, A. "Probabilistic Fracture Mechanics Evaluation of Fatigue Failure from Weld Defects in Batt Weld Joints", Proc. Conf. on Fitness for Purpose Validation of Welded Constructions, London, Paper 28 (1981). : (下转第25页)

- [2] B. S. Dhillon, Reliability Engineering in Systems Design and Operation, Van Nostrand Reinhold, Chap. 6. 1983.
- [3] A. J. Gross, M. Kamins, Reliability Assessment in the Presence of Reliability Growth, Symposium on Reliability, 1968, 406—416.
- [4] D. K. Lloyd, M. Lipow, Reliability: Management, Methods and Mathematics, Prentice-Hall, Inc, New Jersey, Chap. 11, 1962.
- [5] J. Sogorka, J. Peterson, Dynamic Characteristics of Reliability Growth and Its Implications, Proc. Joint Mil-Ind. Guided Missile Res. Technol. , 5th, Chicago, 1959.
- [6] 周延昆, 可靠性十二项实用新技术, 华东师大数理统计系内部讲义, 第8章, 1985.
- [7] 田国梁, 二项分布的可靠性增长模型, 宇航学报待发表.
- [8] 中科院数学研究所概率统计室编, 常用数理统计表, 科学出版社, 1979.

Reliability - Growth Prediction Models for Binomial Distribution

Tian Guoliang

Beijing Institute of Structure and Environment Engineering

(上接第16页)

- [3] Knat M. Engesvik and Torgeir Moan "Probabilistic Analysis of the Uncertainty in the Fatigue Capacity of Welded Joints", Eng. Frac. Mech. Vol. 18, No. 4, (1983).
- [4] Madsen, H. C. Skjong, R., and Kirkemc, F. "Probabilistic Fatigue Analysis of Offshore Structures—Reliability Updating Through Inspection Results", IOS' 8, Glasgow, U. K. September 28—29, (1987).
- [5] 吴敬梓、刘建新、陈新增, "疲劳裂纹扩展的概率断裂力学分析", 第五届全国断裂学术会议论文集. 1988, 5.

Analysis of Parameter Sensitivities to Estimate Fatigue Life by Using the Statistical Method

Mei Hong Liu Chuntu

Institute of Mechanics, Academic Sinica