

磁通量片的 Helmholtz 不稳定性

胡文瑞

(中国科学院 力学研究所, 北京 100080)

主题词: 太阳—磁流体力学—等离子体

提 要

本文分析了被等离子体约束由两个间断面组成的有限厚度磁通量片的 Helmholtz 不稳定性, 导出了不稳定条件, 若片的厚度趋于无穷则此条件与一个间断面时相同。还给出了两个间断面的色散关系。结果表明, 两个间断面时的磁致稳作用比一个间断面时有所减弱, 而约束等离子体的致稳作用相对增强, 但两种情况具有相同量级的不稳定增长率。

切向间断面是自然界普遍存在的位形, 它的流体力学和磁流体力学稳定性已进行了广泛的研究^[1]。一般的理论模型都考虑切向间断面为一无限平面, 将两个半无限介质分开。在许多自然现象中, 往往有不只一个间断面, 它们相互作用。例如在太阳大气中有许

多磁流体力学切向间断, 磁场约束在磁通量片中, 而通量片的两个边界都是切向间断面。我们曾用简单的理论分析过这类位形的不稳定性^[2]。本文将建立更符合实际的模型, 它包含有两个切向间断面。这时, 不稳定性条件与磁通量片的厚度有关。

讨论平衡位形的磁通量约束在 $x = -x_0$ 和 $x = x_0$ 的片状区域中, 如图 1 所示。磁通量片内外区域中的磁场、速度和热力学参数都是均匀的。讨论不可压缩流体, 则磁流体力学基本方程组为

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

而相应的边界条件为

$$\left\{ p + \frac{B^2}{8\pi} \right\} = 0, \quad (\text{间断面上}) \quad (5)$$

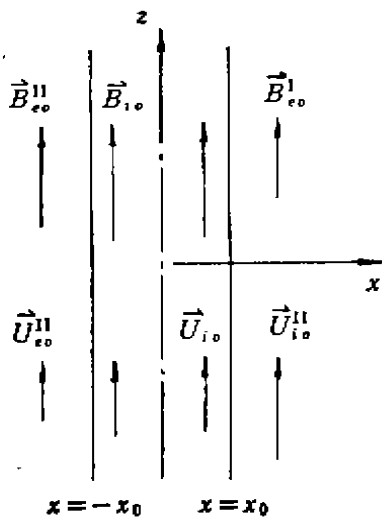


图1 磁通量片平衡位形的示意图
Fig. 1 The schematic diagram of equilibrium configuration for magnetic flux sheet

$$B_x = v_x = 0, x = 0 \quad (6)$$

$$\omega = 0, j = 0, \text{ 当 } x = 0 \text{ 时} \quad (7)$$

其中 ω 和 j 为涡和电流矢量, 而(5)式中的符号{ }表示间断面两边的差值。为了简单, 我们先讨论对 $x = 0$ 呈对称的问题。

假设基态为均匀状态, 记为

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{i0} &= (0, 0, B_{i0}), \quad \mathbf{B}_{e0} = (0, B_{e0y}, B_{e0x}), \\ \mathbf{v}_{i0} &= (0, 0, v_{i0}), \quad v_{e0} = 0, \\ p_{i0} &= \text{常数}, \quad p_{e0} = \text{常数}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中下标 0 代表基态, 下标 i 和 e 分别代表磁通量片内和外区域中的量。显然, 条件(5)要求

$$p_{i0} + \frac{B_{i0}^2}{8\pi} = p_{e0} + \frac{B_{e0}^2}{8\pi}. \quad (9)$$

讨论叠加在基态上的小扰动, 记

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i &= \mathbf{B}_{i0} + \mathbf{B}_{i1}, \quad \mathbf{B}_e = \mathbf{B}_{e0} + \mathbf{B}_{e1}, \\ \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_{i0} + \mathbf{v}_{i1}, \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_{e1}, \\ p_i &= p_{i0} + p_{i1}, \quad p_e = p_{e0} + p_{e1}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中下标 1 表示扰动量。将(9)和(10)代入基本方程组(1)–(4), 不难导出扰动方程组为

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{m1} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{m1}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{m0} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{m1} = -\frac{1}{\rho_m} \nabla \left(p_{m1} + \frac{\mathbf{B}_{m0} \cdot \mathbf{B}_{m1}}{4\pi} \right) + \left(\frac{\mathbf{B}_{m0}}{4\pi\rho_m} \cdot \nabla \right) \mathbf{B}_{m1}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{m1}}{\partial t} = (\mathbf{B}_{m0} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{m1} - (\mathbf{v}_{m0} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{m1}, \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{m1} = 0, \quad (14)$$

其中 $m = i, e$ 。根据(11)和(14), 从(12)式可导出扰动总压 $p_{m1} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_{m0} \cdot \mathbf{B}_{m1}$ 是调和函数。由此设

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{B}_{m1} \\ \mathbf{v}_{m1} \\ p_{m1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_m(x) \\ \hat{\mathbf{v}}_m(x) \\ \hat{p}_m(x) \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - k_y y - k_z z)} \quad (15)$$

将(15)式代入(11)–(14), 不难导出 $\hat{\mathbf{B}}_m(x)$, $\hat{\mathbf{v}}_m(x)$ 和 $\hat{p}_m(x)$ 都呈 x 的指数函数形式, 即

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_m(x) \\ \hat{\mathbf{v}}_m(x) \\ \hat{p}_m(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_{mc} \\ \mathbf{v}_{mc} \\ p_{mc} \end{Bmatrix} (c_{m1} e^{kx} + c_{m2} e^{-kx}), \quad (16)$$

其中 $\mathbf{B}_{mc}, \mathbf{v}_{mc}$ 为常矢量, p_{mc} 为常数, c_{m1} 和 c_{m2} 为待定常数, 由边条件确定, 而 $k^2 = k_y^2 + k_z^2$ 。由于外场界在 $x \rightarrow \infty$ 时有界, 所以 $c_{e1} = 0$; 内场解应满足边条件(6)和(7), 由此得到

$$\begin{aligned} \phi_{ix} &= v_{ix} \text{sh}(kx), \quad \phi_{iy} = v_{iy} \text{ch}(kx), \quad \phi_{iz} = v_{iz} \text{ch}(kx), \\ \hat{B}_{ix} &= B_{ix} \text{sh}(kx), \quad \hat{B}_{iy} = B_{iy} \text{ch}(kx), \quad \hat{B}_{iz} = B_{iz} \text{ch}(kx), \\ \hat{p}_i &= p_{ic} \text{ch}(kx), \end{aligned}$$

$$\hat{v}_i = v_{i0} e^{-kz}, \quad \hat{B}_i = B_{i0} e^{-kz}, \quad p_i = p_{i0} e^{-kz}; \quad (17)$$

其中的系数由边界条件确定。由 $x = 0$ 处的条件(7)可导出横向速度或磁场分量与纵向速度或磁场分量间的振幅联系。解式(17)表明,磁通量片的扰动场与一个切向间断的扰动场有很大的差别。一个切向间断两边的扰动场都随距离指数衰减;而磁通量片扰动的外场随距离指数衰减,内场并不衰减。由此导致两种情况的色散关系的差异。

现在来讨论边界条件。假设基态的边界 $x = x_0$ 在扰动后变为

$$x = x_0 + \zeta(y, z, t), \quad (18)$$

其中 $\varepsilon = |\zeta(y, z)|/x_0 \ll 1$ 。不难看出,扰动边界也具有(15)式的分布,即

$$\zeta(y, z, t) = \zeta_0 \exp[i(\omega t - k_y y - k_z z)], \quad (19)$$

其中 ζ_0 为常数。利用(18)式,由关系式(5)可导出切向间断的一阶关系为

$$\left\{ p_1 + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1 \right\}_{x=x_0} = 0. \quad (20)$$

由(12)和(13)式的 x 分量可以导出

$$\begin{aligned} p_{m1} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_{m0} \cdot \mathbf{B}_{m1} \\ = \pm \frac{i}{k} \left[\rho_m (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{m0}) - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{m0}}{4\pi (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{m0})} \right] v_{m1x}. \end{aligned} \quad (21)$$

利用(19)式可得到

$$v_{m1x} = i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{m0}) \zeta_0 \quad (22)$$

将(21)和(22)代入(20),考虑到解(17),我们得到

$$\rho_i (\omega - k_x v_{i0})^2 - \frac{k_x^2 B_{i0}^2}{4\pi} = - \left[\rho_e (\omega - k_x v_{e0})^2 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{e0}^2}{4\pi} \right] s(x_0), \quad (23)$$

其中记 $s(x_0) = e^{-kx_0}/\text{ch}(kx_0)$ 。当 $kx_0 \rightarrow 0$ 时,(23)式退化为一个切向间断面时的色散关系。由(23)式可导出

$$\begin{aligned} \omega = \frac{1}{\rho_i + \rho_e s(x_0)} \left\{ \rho_i k_x v_{i0} + \rho_e k_x v_{e0} s(x_0) \right. \\ \left. \pm \sqrt{\frac{\rho_i + \rho_e s(x_0)}{4\pi} [k_x^2 B_{i0}^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{e0})^2 s(x_0)] - \rho_i \rho_e s(x_0) (k_x v_{i0} - k_x v_{e0})^2} \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

由此得到磁流体力学切向间断的稳定性条件为

$$k_x^2 (v_{i0} - v_{e0})^2 \leq \frac{\rho_i + \rho_e s(x_0)}{4\pi \rho_i \rho_e s(x_0)} [k_x^2 B_{i0}^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{e0})^2 s(x_0)] \quad (25)$$

由于 $s(kx_0) \in [1, 0]$, (25)式表明,稳定性条件相当于一个切向间断面时用 $\rho_e s(x_0)$ 代替 ρ_e 和用 $\sqrt{s(x_0)} \mathbf{B}_{e0}$ 代替 \mathbf{B}_{e0} , 这时磁场的致稳作用减弱了,但有效 $\rho_e s(x_0)$ 的致稳作用可以增强。当 $kx_0 \rightarrow \infty$ 时, $s(kx_0) \rightarrow 0$, 则(27)式右端为无限大,间断面是绝对稳定的。物理上, $kx_0 \rightarrow \infty$ 对应于无限短的扰动波长,在有限宽度的磁片区域中这种扰动显然被抑制了。当 $kx_0 \rightarrow 0$ 时,也就是对于长波的情况, $s(kx_0) \rightarrow 1$, 这时的稳定性条件与一个切向间断面时相同。

上面的讨论限于 $x = 0$ 平面对称的情况。我们也可以讨论不对称的情况,这时

$$\mathbf{B}_i^1 = \mathbf{B}_{i0}^1 + \mathbf{B}_{i1}^1, \quad \mathbf{v}_i^1 = \mathbf{v}_{i0}^1 + \mathbf{v}_{i1}^1, \quad p_i^1 = p_{i0}^1 + p_{i1}^1,$$

$$\mathbf{B}_c^{\text{II}} = \mathbf{B}_{c0}^{\text{II}} + \mathbf{B}_{c1}^{\text{II}}, \quad \mathbf{v}_c^{\text{II}} = \mathbf{v}_{c0}^{\text{II}} + \mathbf{v}_{c1}^{\text{II}}, \quad p_c^{\text{II}} = p_{c0}^{\text{II}} + p_{c1}^{\text{II}}, \quad (26)$$

其中上标 I、II 分别对应于外场区域 I 和 II 中的量。相应地, 边界条件(6)和(7)被 $x = \pm x_0$ 处的总压守恒条件(5)所代替。不难导出, 扰动量的解在三个区域中都具有(15)和(16)的形式。由外场的无穷远条件可得到, 区域 I 和 II 中的解为

$$C_{i1}^{\text{I}} = 0, \quad C_{i2}^{\text{II}} = 0. \quad (27)$$

其中 $C_{i1}^{\text{I}}, C_{i2}^{\text{I}}, C_{i1}^{\text{II}}$ 和 C_{i2}^{II} 为与(16)式对应的区域 I 和 II 中解的系数。利用 $x = \pm x_0$ 处的条件(5), 对 $p_i, v_{iy}, v_{iz}, \hat{B}_{iy}$ 和 \hat{B}_{iz} 可以导出

$$C_{i1} = 1, \quad (28)$$

$$C_{i2} = 2 \frac{p_{ic}^{\text{I}} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_{ic}^{\text{I}} \cdot \mathbf{B}_{ic}^{\text{I}}}{p_{ic} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_{i0} \cdot \mathbf{B}_{ic}} e^{kx_0} - e^{kx_0} \quad (29)$$

或者

$$C_{i2} = 2 \frac{p_{ic}^{\text{II}} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_{ic}^{\text{II}} \cdot \mathbf{B}_{ic}^{\text{II}}}{p_{ic} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_{i0} \cdot \mathbf{B}_{ic}} e^{-kx_0} - e^{-kx_0}. \quad (29')$$

显然, (29)式和(29')式右端项应相等。不难验证, 在对称于 $x = 0$ 的情况时, $C_{i1} = C_{i2} = \frac{1}{2}$, (28)和(29)式的解就化为(17)式给出的外场解。这时, 对于两个间断面分别导出色散关系

$$\rho_1(\omega - k_x v_{i0})^2 - \frac{k_z^2 B_{i0}^2}{4\pi} = - \left[\rho_2(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{c0}^{\text{I}})^2 - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{c0}^{\text{I}})^2 \right] s^{\text{I}}(x_0) \quad (30)$$

和

$$\rho_1(\omega - k_x v_{i0})^2 - \frac{k_z^2 B_{i0}^2}{4\pi} = - \left[\rho_2(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{c0}^{\text{II}})^2 - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{c0}^{\text{II}})^2 \right] s^{\text{II}}(x_0), \quad (31)$$

其中

$$s^{\text{I}}(x_0) = 2e^{-kx_0} / (e^{kx_0} + C_{i2}e^{-kx_0}), \quad (32)$$

$$s^{\text{II}}(x_0) = 2e^{-kx_0} / (e^{-kx_0} + C_{i2}e^{kx_0}). \quad (33)$$

由此可导出与(25)式类似的稳定性条件。

我们曾用一个间断面时的 Helmholtz 关系去估算太阳大气中间断面的不稳定性发展速率。本文讨论了有限厚度磁通量片区域的 Helmholtz 不稳定性关系, 并给出了稳定性条件(25)。显然我们关心发展速率最快的不稳定波长。对于长波 $kx_0 \ll 1$, (25)式中的 $s(x_0) \rightarrow 1$ 。这时的色散关系和稳定性条件退化为一个间断面的情况。这在物理上表明, 短波长扰动主要作用于间断面附近, 受远处的影响较小。所以, 前文^[2]中的分析结果在计入通量区厚度时仍成立。

参 考 文 献

- [1] 胡文瑞, 宇宙磁流体力学, 1987, 科学出版社。

[2] 胡文瑞,张洪起,陈济民,中国科学 no. 1(1991), 69.

The Helmholtz Instability of Magnetic Flux Sheets

Hu Wenrui

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences)

Key words Sun—MHD—Plasma

Abstract

In the present paper, the Helmholtz instability is analyzed for the magnetic flux sheet, whose configuration consists of two discontinuous surfaces from a sheet magnetic flux region with finite thickness confined by plasma in both sides. The instability condition for the case of sheet is obtained, and it agrees with that for the case of one discontinuous surface if the thickness of sheet tends to infinity. The dispersion conditions at two discontinuous surfaces are also given. The results show that the influence of magnetic stabilization in the case of sheet is relatively weaker than the case of one discontinuous surface, however, the influence of confined plasma is relatively stronger, although the growth rates of instability for both cases have the same order of magnitude.