

湍流壁函数的一般形式¹⁾

徐大鹏 刘树军 卞荫贵

(中国科学院力学研究所, 北京, 100080)

提要 本文给出了一般形式的湍流壁函数。该壁函数适用于具有壁面引射的湍流计算。广为应用的无引射的湍流壁函数是该壁函数的特例。

关键词 湍流, 壁函数, 引射

一、引言

在湍流计算中, 由于近壁区域流动变化剧烈(速度和温度的垂直梯度大), 要获得足够的分辨率, 就要有足够细密的网格, 这就大大增加了贮存和计算量。同时, 越靠近壁面, 分子粘性效应越强, 而湍流粘性效应越弱, 因此, 在近壁区域一些湍流模式已不适用。

为了克服上述困难, 通常在壁面和湍流核心区之间引进湍流壁函数^[1], 壁面函数一旦给定, 计算则可以从湍流区开始。

文献[2]给出了壁面无引射的壁函数, 得到了从事湍流计算的研究人员的认可并广为应用^[3]。然而, 对于具有壁面引射的湍流, 迄今还没有相应的壁函数。以致在计算有壁面引射的湍流时, 人们不得不照搬无引射湍流的壁函数^[4], 或者, 仅对其一些参数稍加调整^[5]。

本文通过分析的方法, 试图给出一般形式的湍流壁函数。使得该壁函数适用于具有壁面引射的湍流计算, 而无引射湍流的壁函数仅为其特例。

二、湍流速度、温度壁函数

控制二维不可压缩湍流速度、温度的方程为

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.1a)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial x} - \overline{uu} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\nu - \overline{uv}) \quad (2.1b)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial V}{\partial x} - \overline{uv} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial V}{\partial y} - \overline{vv} \right) \quad (2.1c)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial T}{\partial x} - \overline{u\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{\partial T}{\partial y} - \overline{v\theta} \right) \quad (2.1d)$$

1) 国家自然科学基金资助课题。

本文于1990年3月22日收到第一稿, 1990年12月3日收到修改稿。

式中 u, v 为脉动速度分量, θ 为脉动温度, a 为导温系数, 其他均为通用符号, 这里不再赘述。上述方程尚不封闭, 还需要给出联系脉动关联量与平均量关系的湍流模式。关于湍流模式我们将在下面讨论。

在无分离和滞止的情况下, 通常认为近壁区的流动为充分发展的^[6]。一般而言, 在近壁区域, 垂直于流动方向的空间尺度 l 远比流动方向的空间尺度 L 小。我们定义小参数 $\delta = l/L$, 并作如下无量纲化和小参数展开:

$$U = U_*(U^+ + \delta U^{++} + \dots) \quad (2.2a)$$

$$V = U_*(V^+ + \delta V^{++} + \dots) \quad (2.2b)$$

$$P = \rho U_*^2 (P^+ + \delta P^{++} + \dots) \quad (2.2c)$$

$$\overline{uu} = U_*^2 (\overline{uu}^+ + \delta \overline{uu}^{++} + \dots) \quad (2.2d)$$

$$\overline{uv} = U_*^2 (\overline{uv}^+ + \delta \overline{uv}^{++} + \dots) \quad (2.2e)$$

$$\overline{vv} = U_*^2 (\overline{vv}^+ + \delta \overline{vv}^{++} + \dots) \quad (2.2f)$$

$$T_0 - T = T_*(T^+ + \delta T^{++} + \dots) \quad (2.2g)$$

$$\overline{u\theta} = U_* T_* (\overline{u\theta}^+ + \delta \overline{u\theta}^{++} + \dots) \quad (2.2h)$$

$$\overline{v\theta} = U_* T_* (\overline{v\theta}^+ + \delta \overline{v\theta}^{++} + \dots) \quad (2.2i)$$

$$x = \frac{v}{U_*} \frac{x^+}{\delta} \quad (2.2j)$$

$$y = \frac{v}{U_*} y^+ \quad (2.2k)$$

式中 T_0 为壁面温度, $U_* = (\tau_0/\rho)^{1/2}$ 为摩擦速度, τ_0 为壁面摩擦应力, $T_* = Q_0/\rho c_p U_*$ 为特征温度, Q_0 为壁面热通量。

在展开式(2.2)中, 为了不失一般性, 我们保留了所有各阶的量。事实上, 由于有壁面引射的存在, $V^+ \neq 0$, 且 $\overline{uu}^+, \overline{uv}^+, \overline{vv}^+$ 均不等于零。

将(2.2)式代入(2.1)式, 令 $\delta = 0$, 得到(2.1)式的零阶近似

$$\frac{\partial V^+}{\partial y^+} = 0 \quad (2.3a)$$

$$V^+ \frac{\partial U^+}{\partial y^+} = \frac{\partial}{\partial y^+} \left(\frac{\partial U^+}{\partial y^+} - \overline{uv}^+ \right) \quad (2.3b)$$

$$\frac{\partial P^+}{\partial y^+} + \overline{vv}^+ = 0 \quad (2.3c)$$

$$V^+ \frac{\partial T^+}{\partial y^+} = \frac{\partial}{\partial y^+} \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial T^+}{\partial y^+} + \overline{v\theta}^+ \right) \quad (2.3d)$$

(2.3d)式中的 Prandtl 数定义为 $Pr = \nu/a$ 。

积分(2.3a)得到

$$V^+ = V_0^+(x) \quad (2.4)$$

考虑到上式, 并注意到在壁面 $y^+ = 0$ 处, 有 $\overline{uv}^+ = 0$, $\frac{\partial U^+}{\partial y^+} = 1$, $\overline{v\theta}^+ = 0$, $\frac{1}{Pr} \frac{\partial T^+}{\partial y^+} =$

1, 分别对(2.3b)和(2.3d)积分给出

$$\frac{\partial U^+}{\partial y^+} - \overline{uv}^+ = 1 + V_0^+ U^+ \quad (2.5a)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial T^+}{\partial y^+} + \overline{v\theta}^+ = 1 + V_0^+ T^+ \quad (2.5b)$$

在层流子层, 可以分别忽略方程(2.5a)(2.5b)中的湍流项 \overline{uv}^+ 和 $\overline{v\theta}^+$, 并求得方程的解如下

$$U^+ = \frac{1}{V_0^+} (\exp(V_0^+ y^+) - 1) \quad (2.6a)$$

$$T^+ = \frac{1}{V_0^+} (\exp(Pr V_0^+ y^+) - 1). \quad (2.6b)$$

在湍流区, 按照 Prandtl 混合长理论^[7], 假定

$$-\overline{uv}^+ = (\kappa y^+)^2 \left| \frac{\partial U^+}{\partial y^+} \right| \left| \frac{\partial U^+}{\partial y^+} \right| \quad (2.7a)$$

$$\overline{v\theta}^+ = \frac{(\kappa y^+)^2}{Pr_t} \left| \frac{\partial U^+}{\partial y^+} \right| \left| \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right| \quad (2.7b)$$

式中 $\kappa = 0.41$ 为 Von Karman 常数, Pr_t 为湍流 Prandtl 数。

将(2.7)式代入(2.5)式, 并且考虑到在湍流区湍流起主导作用, 故分别略去(2.5a)和(2.5b)中的 $\frac{\partial U^+}{\partial y^+}$ 和 $\frac{1}{Pr} \frac{\partial T^+}{\partial y^+}$, 容易验证如下的解满足简化了的方程(2.5),

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln Ey^+ \left(1 + \frac{V_0^+}{4} \frac{1}{\kappa} \ln Ey^+ \right) \quad (2.8a)$$

$$T^+ = \frac{1}{V_0^+} \left[\left(1 + \frac{V_0^+}{2} \frac{1}{\kappa} \ln Ey^+ \right)^{2Pr_t} - 1 \right] \quad (2.8b)$$

式中一般取 $E = 9.0$.

三、剪应力, 湍流动能, 耗散率壁函数

在湍流核心区, 略去方程(2.5a)中的 $\frac{\partial U^+}{\partial y^+}$, 有

$$-\overline{uv}^+ = 1 + V_0^+ U^+ \quad (3.1)$$

将 U^+ 的表达式(2.8a)代入得

$$-\overline{uv}^+ = \left(1 + \frac{V_0^+}{2} \frac{1}{\kappa} \ln Ey^+ \right)^2 \quad (3.2)$$

控制湍流动能的方程为

$$\begin{aligned} U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x} + C_k \frac{k^2}{s} \frac{\partial k}{\partial x} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial y} + C_k \frac{k^2}{s} \frac{\partial k}{\partial y} \right) - \overline{uu} \frac{\partial U}{\partial x} - \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} = s. \end{aligned} \quad (3.3)$$

在近壁区域,通常认为流动处于局部平衡,即湍流生成项等于湍流耗散项

$$\varepsilon = -\overline{uu} \frac{\partial U}{\partial x} - \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.4)$$

将展开式(2.2a)、(2.2d)、(2.2e),坐标无量纲化(2.2j)、(2.2k)以及如下的 ε 的展开式,

$$\varepsilon = \frac{U_*^3}{\nu} (\varepsilon^+ + \delta \varepsilon^{++} + \dots) \quad (3.5)$$

代入(3.4)式,令 $\delta = 0$,得到其零阶近似为

$$\varepsilon^+ = \overline{uv}^+ \frac{\partial U^+}{\partial y^+} \quad (3.6)$$

注意到(2.8a)和(3.1)式,可以得到湍流耗散率的壁函数为

$$\varepsilon^+ = \frac{1}{\kappa y^+} \left(1 + \frac{V_0^+}{2\kappa} \ln Ey^+ \right)^3 \quad (3.7)$$

另一方面,按照 Boussinesq 涡粘性假定,

$$-\overline{uv} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.8)$$

Prandtl 和 Kolomogorov 曾通过量纲分析给出,

$$\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon \quad (3.9)$$

式中 $C_\mu = 0.09$,展开湍流动能为

$$k = U_*^2 (k^+ + \delta k^{++} + \dots), \quad (3.10)$$

将(3.9)式代入(3.8)式,注意到(2.2c)、(3.10)、(3.5) (2.2a)及(2.2k)式,得到(3.8)式的零阶近似

$$-\overline{uv}^+ = C_\mu \frac{(k^+)^2}{\varepsilon^+} \frac{\partial U^+}{\partial y^+} \quad (3.11)$$

再将(3.6)式代入,可以求得湍流动能壁函数为:

$$k^+ = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}} \left(1 + \frac{V_0^+}{2\kappa} \ln Ey^+ \right)^2 \quad (3.12)$$

四、讨 论

1. $V_0^+ \rightarrow 0$ 时,壁函数的形式

应用 L'Hospital 法则,求(2.6)式当 $V_0^+ \rightarrow 0$ 时的极限,得到层流子层区壁函数

$$U^+ = y^+ \quad (4.1a)$$

$$T^+ = Pr y^+ \quad (4.1b)$$

类似地,可以由(2.8)、(3.2)、(3.12)和(3.7)式得到当 $V_0^+ \rightarrow 0$ 时湍流区壁函数,

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln Ey^+ \quad (4.2a)$$

$$T^+ = \frac{Pr}{\kappa} \ln Ey^+ \quad (4.2b)$$

$$-\overline{uv} = 1 \quad (4.2c)$$

$$\kappa^+ = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}} \quad (4.2d)$$

$$\varepsilon^+ = \frac{1}{\kappa y^+} \quad (4.2e)$$

由此可见, 上述广为应用的壁面无引射的湍流壁函数仅是本文给出的一般形式的湍流壁函数的特例。

2. 层流子层与湍流区的界线

在层流子层和湍流区的界线上, 假定(2.6)和(2.8)式同时成立。消去 U^+ 、 T^+ , 可以得到两个超越方程

$$\exp(V_0^+ y^+) - \left(1 + \frac{V_0^+}{2\kappa} \ln Ey^+\right)^2 = 0 \quad (4.3a)$$

$$\exp(Pr V_0^+ y^+) - \left(1 + \frac{V_0^+}{2\kappa} \ln Ey^+\right)^{2Pr_t} = 0, \quad (4.3b)$$

分别描述速度、温度的层流子层与湍流区界线随引射速度 V_0^+ 的变化。图 1 给出了 $Pr =$

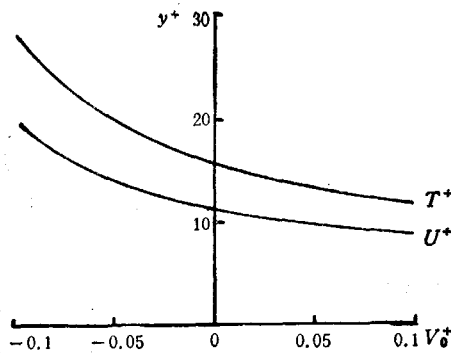


图 1 速度、温度层流子层与湍流区界线随引射速度的变化

0.7, $Pr_t = 0.9$ 时速度、温度的层流子层与湍流区界线随引射速度的变化。由图可见, 随着 V_0^+ 的增加, y^+ 减小, 意味着引射使得湍流核心区向壁面移动, 说明引射强化了湍流。在 $V_0^+ = 0$ 处, 相应于速度、温度的 y^+ 分别为 11.3 和 15.5, 这些值都与已有的理论相吻合。随着 V_0^+ 的减小, y^+ 增加, 意味着抽吸使得湍流核心区外移, 说明抽吸减弱了湍流。当 $V_0^+ < -0.13$ 时, 方程(4.3a)和(4.3b)的解不存在, 说明由于抽吸作用, 边界层已完全层流化。

3. 速度、温度剖面

图 2、3 中, 分别给出了速度和温度剖面。随着引射量 V_0^+ 的增加, 速度剖面变得饱满, 这是入射流体填充和湍流强化的结果。反之, 随着引射量 V_0^+ 的减小, 抽吸使得一部分流体排出, 也使得湍流减弱, 于是, 速度剖面变窄。类似地, 上述讨论也适合温度剖面。

4. 任意标量的壁函数

由于温度也是标量, 所以本文关于温度的讨论, 对于任意标量, 如某种组分的浓度 C 均适用。在具体应用中, 注意将温度壁函数中的 Prandtl 数 Pr 和 Pr_t 换成 Schmidt 数 $Sc = \nu/D$ 和 $Sc_t = \nu_t/D$, (D 为扩散系数)无量纲量 C^+ 应该理解成为 $(C_0 - C)/C_*$, 而 $C_* = q_0/U_*$ 为特征标量, q_0 为壁面标量通量。

5. 剪应力, 湍流动能及耗散率剖面

图 4、5 分别给出了湍流动能及耗散率壁函数剖面。湍流动能随引射量减小而减小, 并且随 y^+ 增加而减小, 耗散率也有相应的减小; 随着引射量的增加, 湍流动能增加, 并且沿 y^+ 向上递增, 耗散率也相应地增加。

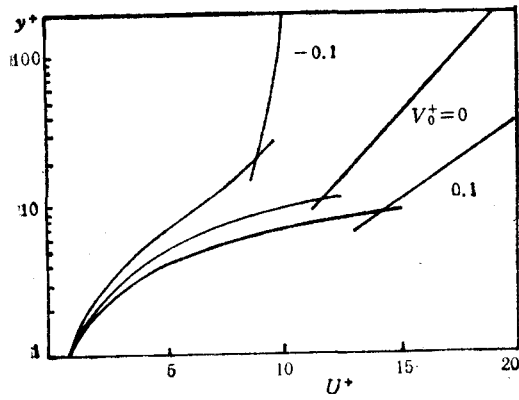


图 2 速度剖面

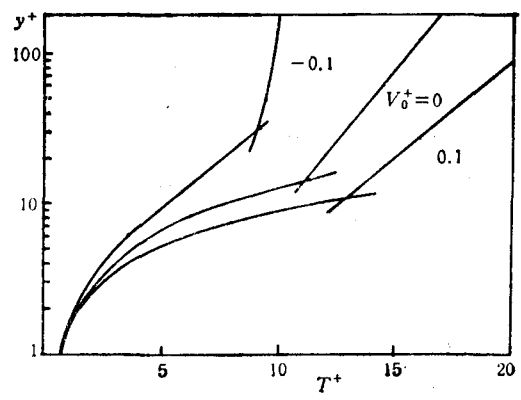


图 3 温度剖面

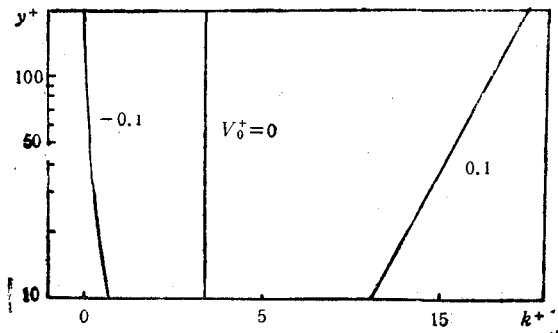


图 4 湍流动能剖面

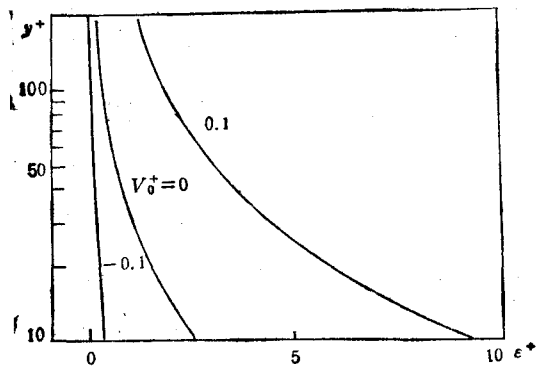


图 5 湍流耗散率剖面

剪应力剖面与湍流动能剖面相似, 只差一个 $\sqrt{C_\mu}$ 的因子, 这里不再重复讨论。

6. 算例

我们应用本文的一般形式的壁函数, 计算了双基推进剂侵蚀燃烧问题。由于该算例涉及的物理现象很复杂, 其中包括空气动力学、热力学、化学动力学等因素。由于本文篇

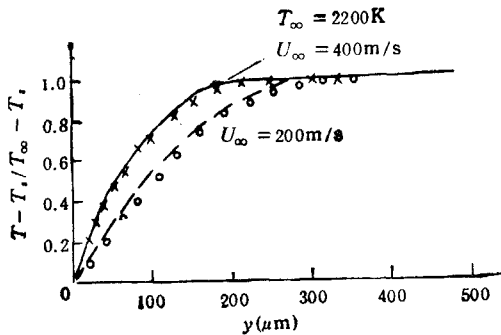


图6 压力为98atm时,边界层温度分布曲线
——计算结果,×○实验结果

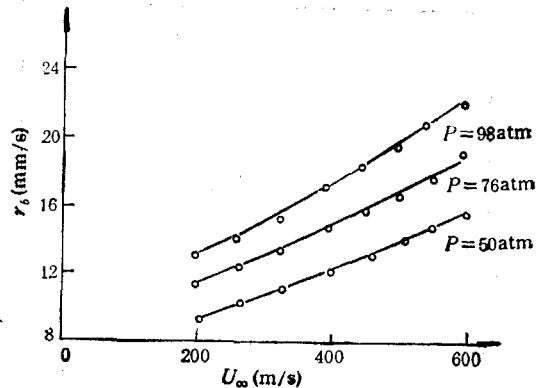


图7 不同压力下,固体火箭推进剂侵蚀燃烧(燃速)结果
——计算结果,○实验结果

幅所限,不可能在本文交待得很清楚,必须另文给出。这里我们只给出一些计算结果与实验的比较。图6给出了压力不变时,不同速度对边界层温度分布的影响。图7给出了压力、速度对侵蚀燃烧速率的影响。由图可见,计算结果与实验结果吻合得很好。

五、小 结

本文给出了二维湍流计算的速度、温度、剪应力、湍流动能及耗散率壁函数的一般形式。对于任意标量的壁函数,可类似于温度壁函数的推导得出。这些壁函数适合描述壁面有引射的湍流流动。目前广泛应用的壁面无引射的壁函数(往往被硬搬来计算有引射的湍流流动)为其特例。

本文给出了湍流壁函数的一般形式的实际应用算例,计算结果与实验结果符合得很好。对于轴对称问题的一般形式的湍流壁函数正在研究之中。此外,涉及分离和滞止以及角域附近的湍流壁函数在实际应用中意义很大,尚待进一步的研究。

参 考 文 献

- [1] Launder, B. E. and Spalding, D. B. The numerical computation of turbulent flow *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 1974, 3. 269—289.
- [2] Rodi, W. Examples of turbulence models for incompressible flows. *AIAA Journal*, 1982, 20, (7): 872—879.
- [3] Nallasamy, M. Turbulence models and their applications to the prediction of internal flows, A review *Computers and Fluids*, 1987, 15(2): 151—194.
- [4] Razdan, M. K. and Kuo, K. K., Erosive burning study of composite solid propellants by turbulent boundary layer approach. *AIAA Journal*, 1979, 11(11): 1125—1233.
- [5] King, M. K., A model of the effects of pressure and crossflow velocity on composite propellant burning rate *AIAA Paper*, 79—1171.
- [6] Chen, C. J., Prediction of turbulent flows, Lecture Note. Department of Mechanical Engineering, The University of Iowa 1987.
- [7] Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Company, 1979, 579.

THE GENERAL FORM OF TURBULENT WALL-FUNCTIONS

Xu Dapeng Liu Shujun Bian Yingui

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080, China)

Abstract The general form of turbulent wall-functions is presented. It is applicable to the turbulent computation with wall injection or suction. The widely used turbulent wall-functions for turbulent computation without injection or suction are the special case of the general form of turbulent wall-functions.

Key words turbulence, wall-function, injection or suction