

## 对塑性理论中几个有争议问题的讨论

梁乃刚 程品三

(中国科学院力学研究所, 100080, 北京)

### 1. 引言

屈服面的形状及其随变形历史的演化规律, 在固体材料塑性变形理论的研究中占有十分重要的地位。引人注目的是目前所得到的屈服面试验数据中出现了一些不尽一致甚至相互矛盾的现象。<sup>[2][3]</sup> 对于初始屈服面, 继 Tresca 的最大剪应力准则、Mises 的最大形变能准则之后, Ишлинский<sup>[4]</sup>(1940) 提出最大偏应力准则, 俞茂铨<sup>[5]</sup>(1961) 提出双剪应力准则, 这些准则都有一些试验数据所支持。对于后继屈服面, 一些学者如 Naghdi<sup>[6]</sup>(1953)、Phillips 和 Gray<sup>[7]</sup>(1961) 的试验数据显示后继屈服面上出现尖点, 另一些学者如 Ivey<sup>[8]</sup>(1961)、Mair<sup>[9]</sup>(1964)、Rees<sup>[10]</sup>(1981) 的试验数据表明后继屈服面为光滑曲面; 同时从 Mair<sup>[9]</sup>、Rees<sup>[10]</sup> 的试验结果中发现后继屈服面对预加载方向具有较强的横向效应, 这个现象与 Naghdi<sup>[6]</sup>、Ivey<sup>[8]</sup> 的试验结果并不吻合。

塑性形变理论具有较高的数值计算效率, 因此研究形变理论对偏离比例加载的适用性具有较大的应用价值。Ратнер<sup>[11]</sup>(1949) 认为形变理论中的单一曲线假定不能完全符合他的试验数据, Яри<sup>[12]</sup>(1958) 把试验数据进行归一化处理得到了近似成立的单一曲线。Budiansky<sup>[13]</sup>(1959) 研究形变理论成立时的加载路径特性, 指出完全加载路径下形变理论可能仍然适用。

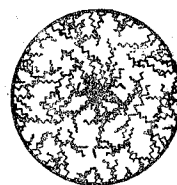
本文试图以作者在文 [1] 中提出的多晶金属材料的三维组集式弹塑性本构模型来讨论上述几个问题。三维组集式弹塑性本构模型具有较为清晰的细观物理概念, 它所给出的弹塑性增量本构关系无需屈服面的概念, 适用于各种复杂加载路径。因此用这个本构模型来进行数值模拟实验, 将有助于认识这些问题所产生的原因, 探索出解决这些问题的途径。

### 2. 三维组集式弹塑性本构模型<sup>[1]</sup>

在细观尺度上, 宏观材料单元是单晶、晶界、缺陷等细观结构的集合体。这些细观结构一般具有三维拓扑构造, 它们随材料的宏观变形而产生畸变和相互错

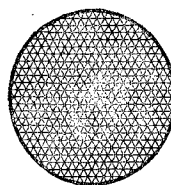
动。晶体的畸变是其点阵上原子间相对距离的变化, 这种变化一般是弹性的, 伴随着体积变化。细观结构内部和它们相邻间的相互错动不产生体积变形, 但在运动中消耗能量。如果把每一个可能引起贮能和耗能的运动机制用一根等效的弹塑性微杆件代替, 则宏观材料单元就成为三维空间中随机分布微杆件的集合体, 如图 1(a)。

对于小变形初始各向同性材料, 宏观单元内部的微杆件可以认为是均匀随机分布的。因此, 图 1(a) 所示的材料单元可以进一步抽象成在三维空间各方向上呈均匀分布微杆件的集合体, 如图 1(b)。对这个三维组集式单元模型, 以各方向杆件的伸长率代表该方向上的宏观变形, 以作用在单元面上所有杆件的内力之和构成宏观应力, 导出弹塑性本构关系为:



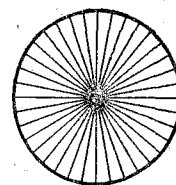
能量等价的随机分布微杆件

(a)



模型化均匀取向的分布微杆件

(b)



离散化的方向组件

(c)

图 1 模型的构造

$$\sigma = k \text{tr}(\varepsilon) \mathbf{1} + \int_{\Omega} F(\lambda) \left( \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \right) d\Omega$$

式中： $\sigma$  和  $\varepsilon$  分别为应力张量和应变张量， $k$  为体积弹性模量， $\text{tr}(\varepsilon)$  为  $\varepsilon$  的迹， $\mathbf{1}$  为二阶单位张量， $\Omega$  为单单位球面， $\mathbf{n}$  为微面积  $d\Omega$  的矢径向量， $\lambda = \mathbf{e} : \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ ， $\mathbf{e}$  为偏应变， $F(\lambda)$  为  $\mathbf{n}$  方向上所有微杆件的平均内力一伸长率函数，它可由简单变形状态下的宏观材料应力应变试验数据予以确定。

内力一伸长率函数  $F(\lambda)$  包含着变形历史效应，因此上述本构关系在应用时通常采用增量形式：

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E} : \dot{\varepsilon}$$

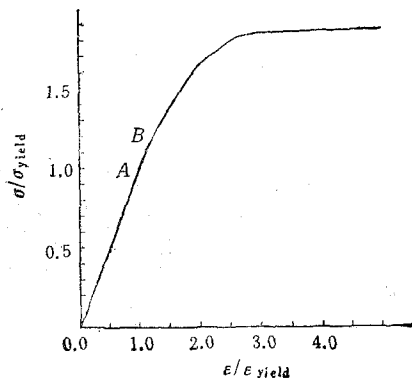
$$\mathbf{E} = k \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \int_{\Omega} \frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} \left( \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \right) \otimes \left( \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \right) d\Omega$$

文 [1] 以随动强化的理想弹塑性函数作为内力一伸长率函数，用上述本构关系计算薄壁圆筒的压扭复合弹塑性变形，得到了与 Budiansky<sup>[4]</sup> 试验数据相吻合的结果。本文后面的数值例子中均采用了与之相同的内力一伸长率函数。

### 3. 屈服点的判定与初始屈服面

屈服点的定义是确定屈服面的基础，本节从讨论屈服点的试验判定入手，研究 Tresca 准则、Mises 准则、最大偏应力准则或双剪应力准则之间的关系。

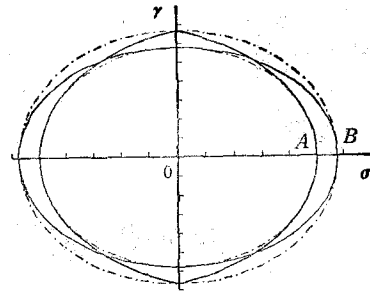
材料的屈服应力理论上应为比例极限应力，但在试验中比例极限应力却很难判定。图 2-1 为三维组集式本构模型所给出的单向拉伸试件的应力应变关系曲线，其中  $\sigma_{\text{yield}}$  和  $\varepsilon_{\text{yield}}$  分别为比例极限应力和比例极限应变。从图中可以看出，比例极限点 A 以后应力应变曲线仍有一个强化阶段，其斜率接近弹性模量。这是由于材料内部的微观结构并不同时进入塑性变形状态而产生的。这个强化阶段的存在，意味着只有应力超过比例极限足够大以后，材料才产生比较明显的塑性变



(a)

图 2 屈服点的确定

A 点为比例极限点在 B 点， $\varepsilon_B/\varepsilon_A = 1.5\%$



(b)

图 2 不同的初始屈服面

- 为对应图 2(a) 中 A 点的 Mises 屈服面
- 为对应图 2(b) 中 B 点的 Mises 屈服面
- 为 Tresca 屈服面
- 为最大偏应力准则屈服面

形。对于图 2(a) 中的 B 点，应力为  $\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{\text{yield}}$ ，比比例极限高约 15%，但该点的塑性应变却只有比例极限应变的 1.5%。对于铝合金材料，比例极限应变约为  $0.002^{[1]}$ ，此时 B 点仅有  $3 \times 10^{-3}$  的塑性应变。由于材料试验中试件性质的分散度、试验装置和测量方法的误差可能淹没这样小的塑性应变，因此由试验所确定的屈服点以及屈服面必然会出现较大的分散性。

考察图 2(a) 中 A、B 两点所对应的 Mises 屈服面，它们在  $\sigma$ - $\tau$  平面中为两个椭圆，如图 2(b)。由于试验数据的分散性，这两个椭圆所围成环形区域中的其它曲线完全有可能被判定为屈服轨迹，因而也可能认为试验数据支持其中的 Tresca 准则或最大偏应力准则，如图 2(b)。因此，各种屈服准则虽然在形式上有所差异，但本质上并无多大区别。

如果把屈服点取为应力应变曲线的斜率具有明显变化的名义应力点，则会引起更多的问题，本文对此不作详叙。

### 4. 后继屈服面上的尖点与横向效应

认识到屈服应力试验数据的分散性和准确判定比例极限应力的困难，对于研究后继屈服面上的尖点和横向效应问题同样具有启发意义。

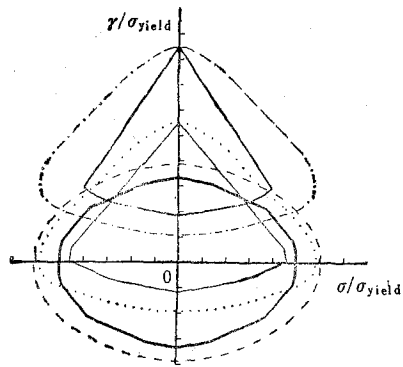
三维组集式弹塑性本构模型给出的后继屈服面如图 3(a)、图 3(b)。两图分别是剪切预加载和拉伸预加载的两组后继屈服面的演化情况，其中实线条组为比例极限应力屈服面，虚线条组为等效塑性应变达到比例极限应变 2.5% 的名义应力屈服面。等效应力和等效(塑性)应变的计算公式为：

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{12}^2}$$

$$g = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

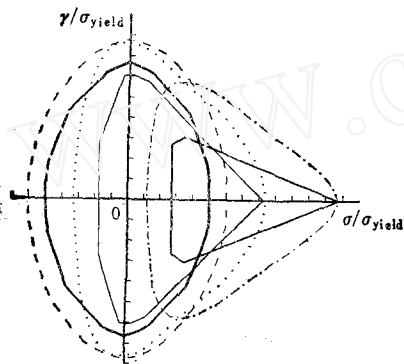
$$\times \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2} + \frac{3}{2} \tau_{12}^2$$

其中:  $\sigma_{11}$ 、 $\tau_{12}$  为单元的正应力和剪应力,  $\varepsilon_{11}$ 、 $\varepsilon_{22}$ 、 $\varepsilon_{33}$ 、 $\tau_{12}$  分别为单元的正应变和剪应变。



剪切预加载

(a)



拉伸预加载

(b)

图3 初始屈服面与后继屈服面

- 为比例应力初始屈服面,
- 为比例应力第一后继屈服面,
- 为比例应力第二后继屈服面,
- 为名义应力初始屈服面
- ..... 为名义应力第一后继屈服面
- ..... 为名义应力第二后继屈服面

比较图 3(a)、图 3(b) 中任意一对比例极限应力屈服面与名义应力屈服面, 可以看到在加载方向上比例极限应力屈服面出现了明显的尖点, 而名义应力屈服面没有出现尖点, 只是曲率有所增加。因此, 后继屈服面上是后出现尖点的争论可能出于屈服点定义的差异。由上节所述的原因, 材料试验中屈服点很难取到比例极限点, 故试验数据一般很难把尖点充分地显示出来。这个结论与以晶体变形的比例极限应力为屈服应力的物理塑性理论<sup>[7]</sup>关于后继屈服面上存在尖点的结论也完全一致。

将图 3(a) 或图 3(b) 中的三个比例极限应力屈服

力学与实践

面与三个名义应力屈服面进行比较, 可以发现比例极限应力屈服面具有明显的横向收缩效应, 而名义应力屈服面只有较小的横向收缩效应。同时, 对比图 3(a) 与图 3(b), 图 3(a) 的剪切预加载比图 3(b) 的拉伸预加载所产生的横向收缩更小一些, 特别是当剪切预加载较小时横向收缩相当微小。由此看来, 后继屈服面的横向收缩效应与屈服点的判定、预加载方式和大小都有关系, 不同的试验者可能得到不尽一致的试验数据是可以理解的现象。

### 5. 关于单一曲线假定

单一曲线假定是塑性形变理论的基础, 它的成立与否直接危及形变理论的应用可靠性。

在  $\sigma$ - $\tau$  平面中, 对  $\sigma_{11} = \sigma \cos \theta$ 、 $\tau_{12} = \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \sin \theta$ ,  $\theta = 0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ, 90^\circ$  的五种加载方式, 用三维组集式弹塑性本构模型进行模拟, 得到等效应力  $\sigma$  与等效应变  $e$  关系曲线如图 4。

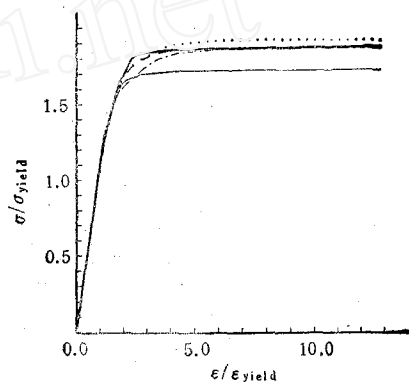


图4 等效应力应变的归一化

- $\theta = 0.0^\circ$
- .....  $\theta = 22.5^\circ$
- $\theta = 45.0^\circ$
- · -  $\theta = 67.5^\circ$
- —  $\theta = 90.0^\circ$

从图 4 可以看出, 不同的加载方式所得到的等效应力与等效应变的关系曲线严格地说不相同, 因而单一曲线假定不能完全成立。但是, 不同的曲线相互差别不大, 如果选用  $\theta = 22.5^\circ$  的曲线为基准, 等效应变相等时等效应力相差不足 10%。因此从应用角度上说, 单一曲线假设是近似成立的, 这个结论与文[11]的结论一致。对于细观结构具有应变强化的材料, 计算表明以上的分析具有一般性。

### 6. 塑性形变理论的适用范围

诚然, 塑性形变理论原则上仅适用于比例加载。但由于用形变理论解题比增量理论来得方便, 等价于求解一个非线性弹性问题, 因此在非比例加载问题中也经常使用形变理论进行分析。令人奇怪的是, 薄板塑性失稳是一个典型的非比例加载, 而形变理论比增

量理论的计算结果更接近于试验数据。因而有必要探讨形变理论对偏离比例加载的适用性问题。Budiansky<sup>[13]</sup>为此提出了完全加载路径的概念,认为与比例加载具有相同终了状态的非比例加载路径为完全加载路径。王仁<sup>[10]</sup>进一步讨论了完全加载路径与形变理论成立的相互关系。本节将从一个三杆桁架塑性变形的分析入手,讨论完全加载路径的可能分布范围。

图5的右上角为所讨论的三杆桁架。两斜杆与水平杆成 $45^\circ$ 角,各杆均为相同的随动强化弹塑性材料。设杆件的屈服伸长量为 $u_0$ ,考虑在真实位移与 $u_0$ 之比的无因次位移空间中从初始点 $(0,0)$ 到终了点 $(4,0)$ 的各种加载路径。

在图5中,当沿直线从 $(0,0)$ 到 $(4,0)$ 时,各杆按比例单调增加, $\beta$ 杆最大伸长量为4, $\alpha$ 、 $\gamma$ 杆为2。当加载偏离比例加载较小时,各杆伸长仍能保持单调增加,只是它们增加的比例关系被打乱。随着加载偏离程度的增加,会出现个别杆经过卸载,而另外的杆件过快增加变形。众所周知,只要卸载的杆件不产生反向屈服,而变形较快的杆件不超过它的最大值,则当加载终了时各杆件仍保持与比例加载相同的内力状态。因此,完全加载路径的条件为:

- (1) 没有杆件发生反向屈服;
- (2) 没有杆件的变形超过它的最终值。

在初始状态,直线BC的右下方是 $\alpha$ 杆满足条件I的区域,而直线EA的左上方是 $\alpha$ 杆满足条件II的区域。三杆满足上述两个条件的共同区域为图5中的ABCDEA所围成的区域。可以验证,从O点出发沿直线到达封闭区域中任一点,再沿直线到达A的加载路径,一定是完全加载路径。图中还划出了加载路径OabcA及加载到达a、b、c各点时的相应封闭区域。很显然,OabcA也是一条完全加载路径。

一般地说,在ABCDEA内的任一逐渐趋向A点的加载路径都是完全加载路径。在这个意义上,区域ABCDEA是完全加载区域。

连续介质内细观结构的塑性变形机制在非比例加载时有类似的现象发生。使用三维组集式弹塑性本构模型进行数值模拟,得到的结果如图6。图6给出了在应力空间中的完全加载区域ABCDEF,其中任一趋向于A点的加载路径都是完全加载路径,甚至首先远离A然后逐步趋向A点的加载路径,如图从O出发的折线,仍然是完全加载路径。

在薄板塑性失稳问题中,只要附加弯矩不是太大,加载路径就不会超出完全加载区域。塑性形变理论预见到比较接近试验结果的失稳载荷是不奇怪的。至于增量理论算得的失稳载荷过大的问题,可以有这样的解释:后继屈服面的形状改变在复杂加载条件下是不可忽视的,而文[13]中的增量理论采用了形状不发生变化的后继屈服面。文[11]中的数值例子说明,如果假

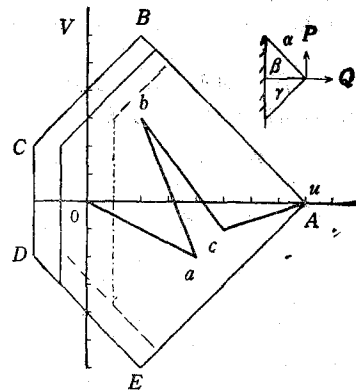


图5 完全加载区域  
 —— 初始完全加载区域  
 —— a点的完全加载区域  
 - - - b点的完全加载区域  
 - · - · c点的完全加载区域  
 —— 加载路径

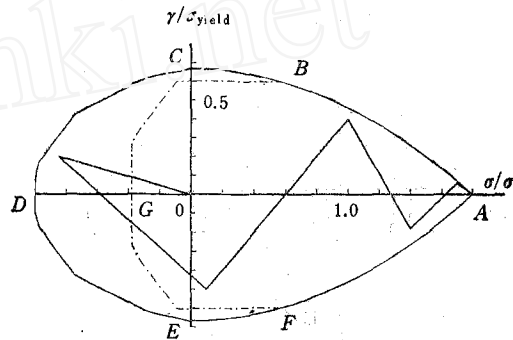


图6 完全加载区域  
 —— 从 $(0,0)$ 到 $(1.8,0)$ 的完全加载区域  
 - - - 从 $(1.625,0)$ 到 $(1.8,0)$ 的完全加载区域  
 —— 加载路径

定后继屈服面的形状保持不变,增量理论算得的塑性应变偏小,高估了材料的刚度。这样,算得的失稳载荷就必然偏大。用三维组集式弹塑性本构模型对这个问题的计算分析将另文介绍。

## 7. 结论

(1) 对于金属材料,即使细观结构服从分解剪应力定律而呈现理想弹塑性性质,也因为细观结构在变形中不能同时进入塑性状态而使比例极限以后的应力应变曲线具有明显的强化部分,给屈服点的试验判定造成了困难。看来,历史上出现的一些不尽一致的试验结论及其相关的数学模型并不能完全归属于材料性质的差别。

(2) 数学塑性理论中的加载函数是试验测得的后继屈服面的数学描述。在复杂变形过程中,后继屈服面剧烈变化,很难在试验中准确测定并给出数学公式

化, 这给数学塑性理论在非比例加载问题中的应用投下了阴影。以材料细观结构的变形力学规律为基础的物理塑性理论, 可以避开屈服面的概念而直接导出弹塑性本构关系, 是解决这个问题的根本出路。

(3) 塑性形变理论在偏离比例加载路径下可能仍有较大的适用范围。准确地确定这个范围, 是一个值得进一步研究的课题。

### 参 考 文 献

[1] 梁乃刚、程品三, 多晶金属材料的三维组集式弹塑性本构模型, 力学学报, 22, 6(1990), 680—688.  
 [2] Michno, M. etc., *J. Appl. Mech.*, 11(1976), 59.  
 [3] 王仁、黄克智、朱兆祥, 塑性力学进展, 中国铁道出版社(1988).  
 [4] Ишлинский, А. Ю., *Механика*, 46(1940).  
 [5] 俞茂镛, 双剪应力强度理论研究, 西安交通大学出版社(1988).  
 [6] Naghdi, P. M., Essenburg, F. and Koff, W., *J. Appl. Mech.*, 25, 2(1958), 201.  
 [7] Hutchinson, J. W., *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A319(1970), 247.

[8] Ivey, J. H., *J. Mech. Engng. Sci.*, 3, 1(1961), 15.  
 [9] Mair, W. M. etc., *J. Mech. Engng. Sci.*, 6, 2(1964), 49.  
 [10] Rees, D. W. A., *J. Strain Analysis*, 16, 2(1981), 85.  
 [11] Ягн, Ю. И. 等, *Заводская Лаборатор* (1958, 10).  
 [12] Ратнерс, И., *Прочность и Пластичность Металлов* (1949).  
 [13] Budiansky, B., *J. appl. Mech.*, 26, 2(1974), 259.  
 [14] Budiansky, B., Dow, N. F., Peters, R. W. and Shepherd, R. P., *Proc. 1st U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1951), 503.  
 [15] Mroz, Z., *Acta Mech.* 7(1969), 199.  
 [16] Sewell, M. J., *J. Mech. Phys. Solids*, 22(1974), 469.  
 [17] Phillips, A. and Gray, G. A., *J. Basic Engng.* 83 (1961), 275.  
 [18] 王仁、熊祝华、黄文彬, 塑性力学基础, 科学出版社, (1987).

(本文于1990年10月31日收到)

## 对脆性材料单向压缩试件发生鼓形变形后 “侧张”破坏过程的分析

何 蕴 增

(哈尔滨船舶工程学院, 150001)

对脆性材料试件单向压缩时的破坏现象和力学实质这一常见的材料力学问题, 许多作者曾作过有益的研究<sup>[1-7]</sup>, 但至今一些问题仍难于得到令人满意的解释。

当材料试验机砧块侧向约束不足时, 试件首先发生侧向倾斜永久变形[图1(a)], 然后断裂。而试验机砧块具有良好侧移约束时, 试件将首先发生鼓形永久变形[图1(b)], 然后断裂。对图1(a)的情况, 我们已

于文章[1]详细讨论过。本文将报告对图1(b)情况下试件的力学场计算结果, 并作力学分析。

### 1. 计算模型

在计算中, 假设材料均匀、各向同性、线弹性; 满足小变形条件; 不计残余应力。材料的累积永久变形由试件形状的改变来考虑, 永久变形过程中, 试件体积保持不变。为便于计算, 假设试件侧面始终保持为由圆弧生成的迴转面。鼓形试件的几何形状, 可由图2的

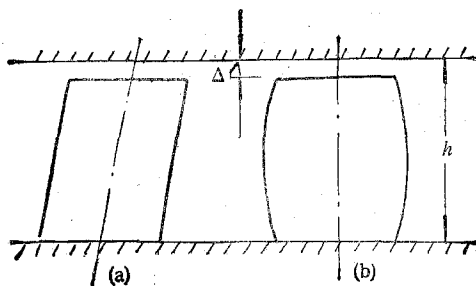


图 1

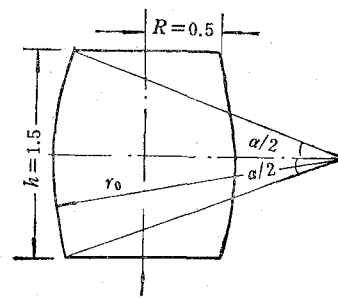


图 2