

圆柱突然起动的快速涡解法

中国科学院力学研究所 陶 锋
中国科学技术大学 尹协远 童秉纲

NUMERICAL STUDY OF UNSTEADY FLOWS AROUND AN IMPULSIVELY STARTED FROM REST CIRCULAR CYLINDER BY FAST VORTEX METHOD

Institute of Mechanics of Chinese Academy of Science Tao Feng

University of Science and Technology of China Yin Xieyuan and Tong Binggang

摘 要 文中将 Chorin 的涡方法、格子涡 (VIC) 方法和快速 Fourier 变换 (FFT) 相结合, 发展了一套快速有效的求解高 Re 数下非定常 N-S 方程的算法 (快速涡方法)。通过对二维圆柱突然起动问题的数值计算, 得到流动分离及其演化过程 (包括二次涡及二次涡对的生成); 此外还得到回流区对称轴线上速度分布。这些结果与实验数据及其它数值解相比, 是令人满意的。该程序对其它高 Re 数非定常流动问题也是适用的。

关键词 非定常流, 圆柱体, 数值计算, 数值流动显示。

Abstract An effective numerical method (fast vortex method) to solve unsteady N-S equations at high Reynolds number, combining Chorin's vortex scheme with the Vortex-in-Cell (VIC) method and the Fast Fourier Transforms (FFT), is presented in this paper. The scheme has successfully calculated the early stage flows of two dimensional circular cylinder which impulsively started from rest. The process of separation and evolution with time of the flow, the generation of the secondary vortex and the pair of the secondary vortex, and the radial velocity on the symmetry axis behind the cylinder, etc., are studied in detail. The comparison with the careful experimental data and other accurate numerical results is satisfactory. The program is also available for other problems of unsteady flow at high Reynolds number.

Key words unsteady flow, cylindrical bodies, numerical calculation, numerical flow visualization.

一、引 言

高雷诺数下二维圆柱突然起动问题是流体力学中迄今仍未彻底解决的经典理论课题之一。它涉及到一系列理论问题, 如流动分离、剪切层演化、旋涡形成和发展、涡脱落、涡配对和合并、层流到湍流的转变及湍流流迹结构等。因此它一直吸引着许多研究者。

随着流动显示技术的进步, Bouard 和 coutanceau⁽¹⁾ 对 Re 数 40~9500 范围内圆柱突然起动做了一系列实验, 观察了尾涡生长及二次涡形成; 并测量了分离点及柱后对称轴线上速度分布。实验为进一步认识流动机理提供了丰富的数据, 成为各种数值方法比较的基础。

1990年4月2日收到, 1990年11月9日收到修改稿
国家自然科学基金资助课题

数值计算方面,有限差分格式的困惑一直存在于研究者中间。近年来, Ta Phuoc Loc 和 Bouard^[2]采用高精度差分格式取得了明显进展,对 $Re=300, 500, 1000, 3000$ 和 9500 等情况做了数值计算;得到与实验十分接近的结果。Chorin^[3]应用涡方法的思想成功地计算了高 Re 数下圆柱非定常绕流问题,从此涡方法获得迅速发展。Cheer^[4]用涡层和涡团复合离散涡模型得到柱面附近绕流的细致结构,如二次涡等。Smith 和 Stansby^[5]采用 VIC 和 FFT 快速求解 Poisson 方程,得到与实验和差分解可比的结果。

对于数目为 N 的离散涡,文献[3, 4]采用涡-涡诱导的 Biot-Savart 公式确定每个涡的速度,这需要 $O(N^2)$ 量级的运算次数,而文献[5]只需 $O(N \lg_2 N)$ 量级的运算次数。因此采用文献[5]的方法,但考虑到它在新涡生成及壁面附近涡运动的处理方面,存在使以后时间步中涡数目累积到很大量级的缺点;为此借鉴文献[3]的办法以保证计算在有限内存上进行,并得到较合理的结果。

二、数值方法

二维不可压涡量-流函数形式的无量纲化 N-S 方程为

$$(\partial \omega / \partial t) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = 2Re^{-1} \nabla^2 \omega \quad (1)$$

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \quad (2)$$

$$u_r = \partial \psi / r \partial \theta, u_\theta = -\partial \psi / \partial r, \omega = [\partial(ru_\theta) / r \partial r] - (\partial u_r / r \partial \theta) \quad (3)$$

其中,取圆柱半径 a 和无穷远速度 U 为特征长度和特征速度。 Re 数定义为 $2Ua/\nu$ 。因流动是对称的,只须考虑对称的上半平面。为使 FFT 在矩形域内进行,引入变换

$$\nabla z = a \exp(\pi \zeta) \quad (4)$$

其中 $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ 。 $\xi = 0$ 对应上半圆柱面, $\eta = 0$ 和 $\eta = 1$ 分别对应圆柱外的 $+x$ 轴和 $-x$ 轴。变换平面内的 Poisson 方程为

$$(\partial^2 \psi / \partial \xi^2) + (\partial^2 \psi / \partial \eta^2) = -E\omega, E = \pi^2 \exp(2\pi \zeta) \quad (5)$$

$$u_\xi = \pi u_r \exp(\pi \zeta), u_\eta = \pi u_\theta \exp(\pi \zeta) \quad (6)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \psi = 0, \quad \partial \psi / \partial \xi = 0 & \quad (\text{圆柱面上}, \xi = 0, 0 \leq \eta \leq 1) \\ \psi = 2 \sinh(\pi \zeta) \sin(\pi \eta) & \quad (\text{远场}, \xi = \xi_\infty, 0 \leq \eta \leq 1) \\ \psi = 0, \quad \omega = 0 & \quad (\text{对称轴线上}, \eta = 0 \text{ 和 } \eta = 1) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

根据 Chorin 涡方法的思想,首先将流场中连续分布的涡量由大量的离散涡代替

$$\Gamma = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \quad (8)$$

其中, Γ_n 和 \mathbf{x}_n 分别表示第 n 个涡的环量和位置。然后将涡量输运方程(1)时间分裂成两部分,第一部分是粘性扩散方程

$$[\partial \omega / \partial t]_1 = 2Re^{-1} \nabla^2 \omega \quad (9)$$

第二部分是粘 Euler 方程

$$[\partial \omega / \partial t]_2 = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega \quad (10)$$

涡量输运方程的解是由粘性扩散和对流两部分续接起来的。于是,涡方法的主要步骤是:

- (1) 求解流函数的 Poisson 方程,不考虑粘性效应,只需满足物面无穿透条件;
- (2) 考虑粘性扩散和对流;

(3)在壁面生成新涡以满足壁面无滑条件。

解 Poisson 方程和求涡对流时使用了 VIC 和 FFT 方法。VIC 方法是先将离散涡的涡量分配到该涡所在网格的四个格点上, 由双线性插值有

$$\tilde{\Gamma}_k = \frac{\Gamma_n A_k}{A} \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (11)$$

其中 k 代表四个格点, Γ_n 是在该网格内第 n 个点涡的强度, A 是该网格面积

$$A = \sum_{k=1}^4 A_k \quad (\text{图 1}).$$

对所有涡按(11)式计算后, 便可得计算域各格点上的涡量 ω_{ij} , 再用 FFT 即得到 ψ_{ij} , 每个点涡的对流速度仍由双线性插值

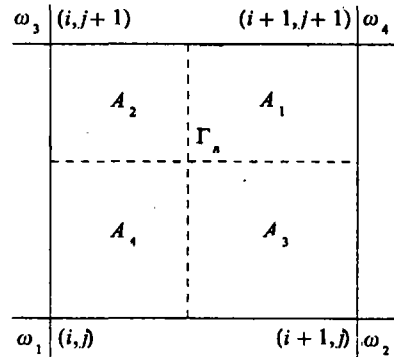


图 1 格子涡方法示意图

$$u_n = \sum_{k=1}^4 u_k A_k / A, \quad v_n = \sum_{k=1}^4 v_k A_k / A \quad (12)$$

至于粘性扩散方程(9)可用大量涡的随机游动模拟。于是经过 Δt 时间以后涡的新位置为

$$x_n(t + \Delta t) = x_n(t) + u_n \Delta t + \Delta x_n, \quad y_n(t + \Delta t) = y_n(t) + v_n \Delta t + \Delta y_n \quad (13)$$

其中, $\Delta x_n = [4\nu\Delta t \ln(1/P_n)]^{1/2} \cos\theta_n$, $\Delta y_n = [4\nu\Delta t \ln(1/P_n)]^{1/2} \sin\theta_n$

$\Delta x_n, \Delta y_n$ 是第 n 个涡随机扩散增量, P_n 和 θ_n 分别为 $(0, 1)$ 和 $(0, 2\pi)$ 区间内的随机量。

壁面新生涡强度要满足壁面无滑移条件。若经过前述涡方法的(1), (2)两步后在壁面上产生滑移速度 u_s , 为抵消此滑移速度壁面附近应有一涡层存在。为此将壁面划分成若干小段 Δs , 对应于 Δs 段的连续涡层离散为位于 Δs 段中点 s 上的旋涡, 但因处于紧靠壁面的一层网格内原来存在旋涡, 在壁面网格点上分配有一定环量, 所以新生环量可表示为

$$\Delta\Gamma_{new}(s) = u_s \Delta s - \Gamma_{old} \quad (15)$$

其中 Γ_{old} 表示原有涡在壁面格点上分配的环量。文献[5]由 Poisson 方程的解求满足无滑条件的壁面涡量

$$\omega(i, 0) = -\psi(i, 1) / \Delta y^2$$

此涡量一般与原有旋涡分配在壁面上的值不相等。于是新生涡环量等于

$$\Delta\Gamma_{new}(i, 0) = \omega(i, 0)A - \Gamma_{old}(i, 0) \quad (16)$$

A 是网格面积。以上两种方法实质上是一致的。

三、计算结果及分析

计算在 NEC9801VX2(相当于 286 机, 8MHz 时钟频率, 640kb 内存)上进行。网格划分为 65×65 。远场边界取在 $r_\infty = 25a$ 处, 对于研究突然起动早期绕流问题是足够的。在(4)式的变换平面内, 网格大小为 $\Delta\xi = 0.016$, $\Delta\eta = 0.0159$, 紧靠柱面的网格约为 5% 的半径。时间步长 $\Delta t = 0.02$ 。当涡出现于柱面内时, 采用吸收的办法将其去掉, 最终涡数达 4000 个左右。计算中 250 个时间步约需 CPU 150min。文献[3]在 CDC 6400 上计算, 需 CPU 12min, 涡数最多 300 个; 在文献[5]中, 每个时间步均有 $(2 \sim 3) \times 128$ 个涡产生,

且网格数为 129×129 , 需巨大的内存和巨型机。因此, 与实验和其他数值结果比较, 本方计算是可取的。

1、近尾迹结构及其演化

曾对 $Re = 550, 3000$ 和 9500 三种情况作了计算, 图 2 和图 3 分别为 $Re = 3000$ 和 9500 时, 早期流动 ($t < 5$) 的流线和点涡演化图。文献[1]中叙述的四种流态均再现出来。 $Re = 3000$ 时可看到孤立二次涡发生至二次涡对 (α 现象) 形成过程 (图 2)。 $Re = 9500$ 情况中, 图 3(a) 是典型的迹前涡图象; $t = 2.8$ 时 (图 3(b)) 已形成一个很强的主涡, 二次涡对不明显; $t = 4.0$ 时 (图 3(c)) 主剪切层断裂, 主涡前的小涡是从主涡撕裂出来的, 同主涡有相同的旋转方向, 不是二次分离的结果。

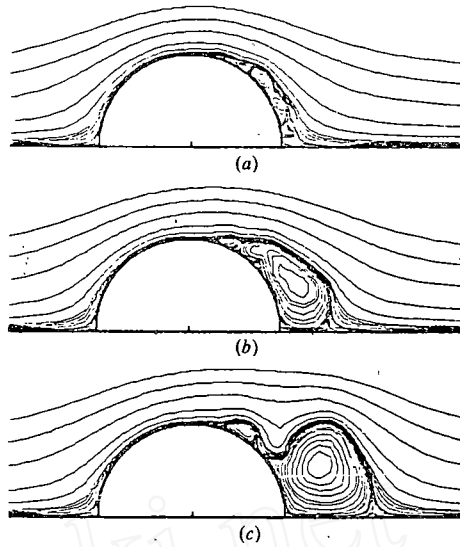


图 3 圆柱突然起动的早期流动(流线图)
 $Re = 9500$ (a) $t = 1.6$ (b) $t = 2.8$ (c) $t = 4.0$

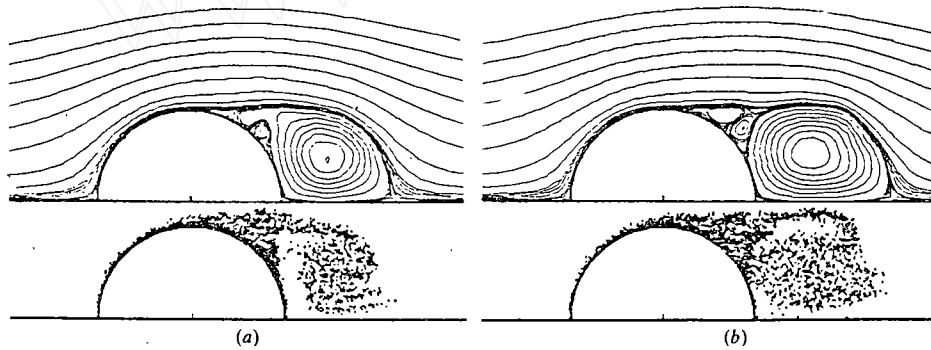


图 2 圆柱突然起动的早期流动(流线图及点涡演化图)
 $Re = 3000$ (a) $t = 4$ (b) $t = 5$

总结计算结果我们发现流动有几种典型结构 (图 4)。“ α 现象” (图 4(c)) 在 Re 数超过 5000 时很难在计算中捕捉到; 更多的情况是此时主剪切层未断裂, 在主涡内部分裂出一个方向相反的小涡 (图 4(b)); 此涡与二次涡配对。还发现主涡层断裂不是一次完成的, 主涡层断裂后还会再联结, 再断裂 (图 4(d)、(e))。目前尚需进一步数值检验, 当主涡层断裂时, 是否最容易演化成非对称涡。

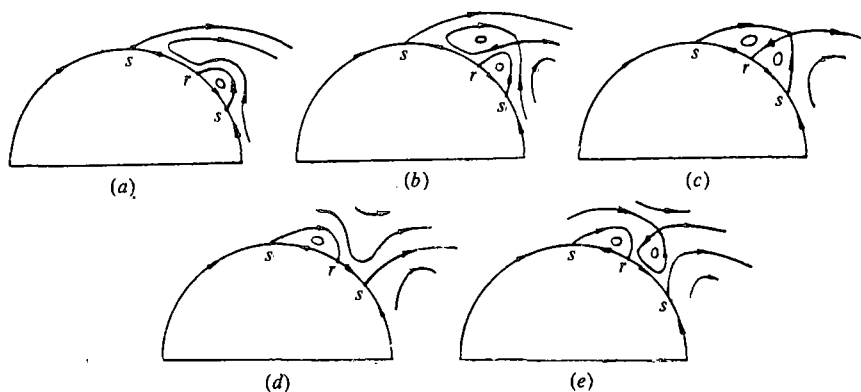


图 4 几种典型流动结构

2、分离区特征尺寸及其特性

图 5 是分离区长度、涡心距随时间的变化。计算与实验基本符合，回流区长度随时间近似线性增长；涡心离对称轴距离变化不大。图 6 是后对称轴线上的速度分布。 $Re = 300$ 时， $t = 1.0$ 和 2.0 时与实验符合甚好，以后误差稍大。 $Re = 9500$ 时， $t = 3.0$ 时误差最大，但与其他计算结果^[4, 5]相比，误差并不大。图 7 是分离点随时间的变化。由于涡方法用离散涡代替了分布涡量，表面涡量分布波动性较大，分离点的确有一定误差，但总变化趋势是正确的。

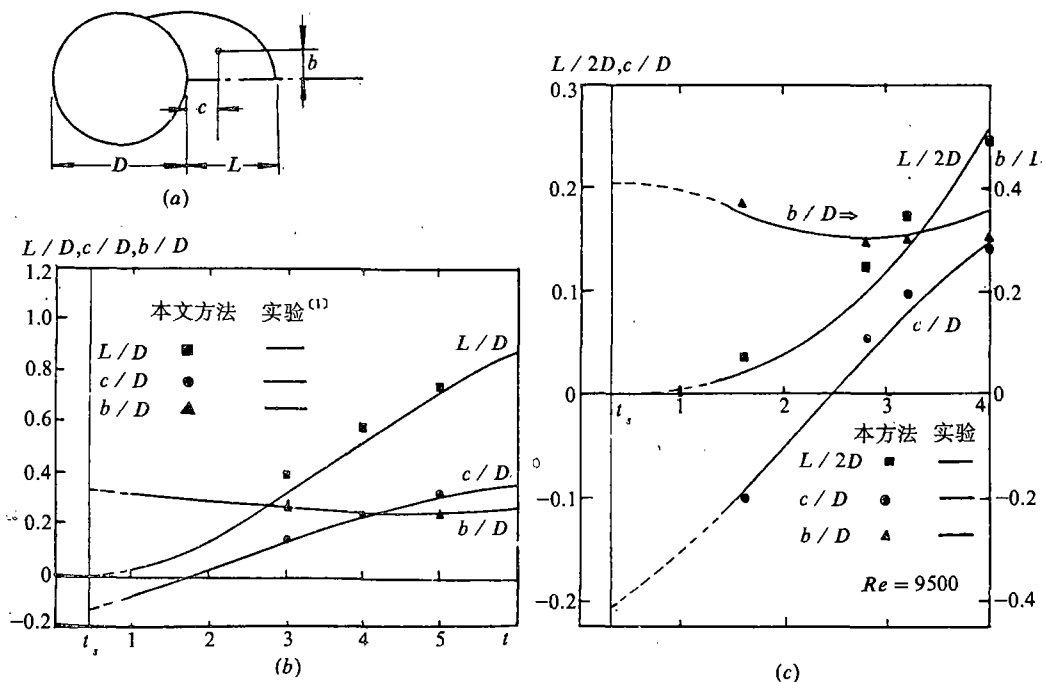


图 5 分离区长度、涡心距随时间的变化

(a) 几何关系 (b) $Re = 3000$ (c) $Re = 9500$

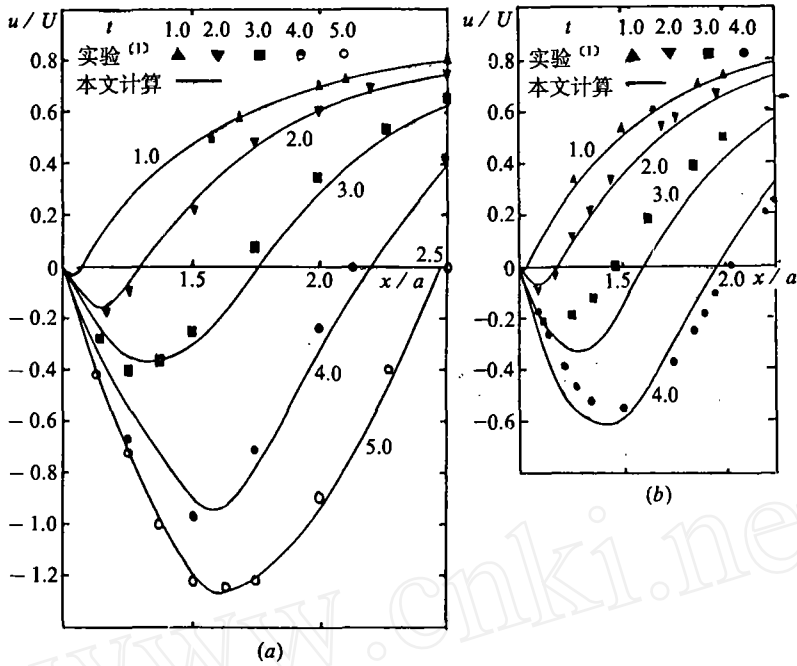


图 6 后对称轴线上速度分布

(a) $Re = 3000$ (b) $Re = 9500$

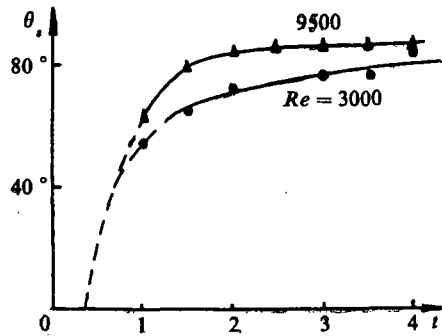


图 7 分离点随时间的变化

参 考 文 献

- 1 Bouard R, Coutanceau M. The Early Stage of Development of the Wake behind an Impulsively Started Cylinder for $40 < Re < 10000$. J Fluid Mech, 1980; 101:583~608
- 2 Ta Phuoc Loc, Bouard R. Numerical Solution of the Early Stage of Unsteady Viscous Flow around a Circular Cylinder: a Comparison with Experimental Visualisation and Measurements. J Fluid Mech, 1985; 160:93~117
- 3 Chorin A J. Numerical Study of Slightly Viscous Flow. J Fluid Mech, 1973; 57:785~796
- 4 cheer A Y. Unsteady Separated Wake behind an Impulsively Started Cylinder in Slightly Viscous Fluid J Fluid Mech, 1989; 201:485~505
- 5 Smith P A, Stansby P K. Impulsively Started Flow around a Circular Cylinder by the Vortex Method. J Fluid Mech, 1988; 194:45~77