

# 用谱方法求解N-S方程

苏铭德

廖柏程

(清华大学工程力学系)

(中国科学院力学研究所)

## 摘 要

湍流研究具有重要的理论和工程意义,谱方法能达到快速收敛、高效和边界层中高分辨率、高精度。用谱方法边界条件处理也方便,谱方法随着数值方法的改善和计算机系统的发展,它在湍流数值模拟中的作用愈加重要。

这里介绍了一平直槽道及两个同心圆柱间的三维N-S方程数值求解的谱方法,在平直槽道中在平行壁面的 $x$ 及 $z$ 方向上用富氏展开,在法向( $y$ )用契比雪夫多项式展开,与平直槽道相似,在 $\theta$ 和 $z$ 方向用富氏展开,在法向 $r$ 用契比雪夫多项式展开,为解N-S方程,在时间方向用Crank-Nicholson格式,非线性项用Adam-Bashforth格式,边界和连续条件精确满足。

由平直槽道和二同心圆柱间流动的数值模拟结果表明谱方法是N-S方程数值模拟的有效方法,数值结果与理论结果相符甚好。

**关键词:** N-S方程, 谱方法, 数值计算, 湍流。

## 一、引 言

湍流运动几乎充满整个自然界和各个工业部门,湍流运动的研究具有重要意义。自Reynolds以来已有100多年的历史,但由于湍流运动的复杂性,至今未取得严格理论分析方面的重大突破。目前由于计算机的飞速发展,数值模拟方法已经成为与理论分析、实验研究相当的三个主要研究手段之一。

湍流的数值计算首先是由以下几方面展开的:采用各种湍流模型的数值计算,大涡模拟和直接求解N-S方程,采用湍流模型的计算具有较强的工程性,计算方便;大涡模拟和直接求解N-S方程的方法是近十多年来才开始发展起来的。直接求解N-S方程的方法不需要模型,比较准确。但为了描述复杂的湍流运动,需要足够的网格和足够小的时间步长,一般说需要计算 $Re^{11/4}$ 个点次。为此必须建立较高精度的计算方法,采用并行计算,还需要巨型高速电子计算机。大涡模拟<sup>[1]</sup>则采用尽可能简化的模型来描述湍流。它比直接求解N-S方程要简化一些,需要的计算机容量和速度可以略小一些和略低一些。大涡模拟的正确性可由实验验证或用直接求解N-S方程的方法来检验。

谱方法<sup>[2]</sup>由于采用了快速富氏变换(FFT),所以具有效率高和精度高的特点,已被用来直接求解N-S方程,以直接模拟湍流运动<sup>[3][4]</sup>。但谱方法目前还只能用于比较简单的几何形状

本文于1987年12月24日收到。本工作得到大气数值模拟开放研究实验室(LASG)的资助。

流场。

本项研究工作是探索用谱方法直接模拟平面与弯曲槽道中湍流流动的可能性和困难所在。由于目前计算机条件的限制，尚不能直接用于湍流的数值模拟，但本方法用于低雷诺数流动的计算以论证本方法的可行性，计算表明本方法具有较好的效率和精度。

## 二、数学问题的提法

首先认为湍流运动仍然满足 N-S 方程，在这里只考察不可压缩流体的湍流流动，这时方程的向量形式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} &= -\nabla p - \frac{1}{Re} \nabla \times \nabla \times \vec{V} + \vec{V} \times \vec{\Omega} - \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) \\ \nabla \cdot \vec{V} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

该方程已被无量纲化了，其中  $\vec{V}$  为速度向量， $p$  为压力， $Re$  为雷诺数， $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V}$ 。

这里要讨论的流场为平直槽道内的流动，所谓平直槽道是在两块平行的无限大平板间的几何空间，弯曲槽道是由两个半径不等的同轴圆柱形壁面所夹的环形通道，它们的几何形状及座标选取见图 1。

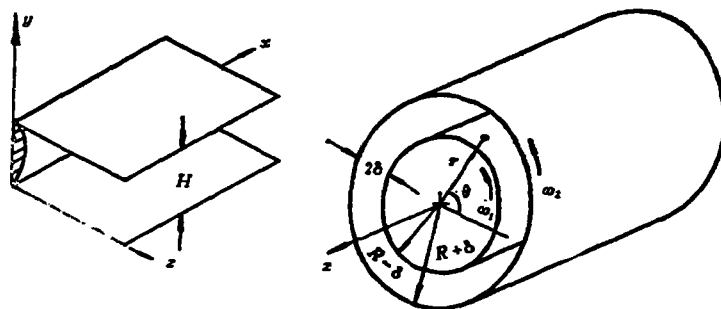


图 1

对于平直槽道内的流动，我们假定它沿某一方向有一主流，该方向记作  $X$ ，在其它方向的流速不大，并且总流量也不大，沿  $Z$  方向为零（由于壁面限止），沿  $Y$  方向的总流量也在零附近变化，统计平均值为零。因此在平直槽道内的压力梯度可以分解为两个部分：

$$\nabla p = (\nabla p)_0 + (\nabla p)' \quad (2.2)$$

其中

$$(\nabla p)_0 = -\frac{2\tau_w}{H} \vec{e}_x \quad (2.3)$$

其中  $\tau_w$  为壁面的平均切应力， $H$  为槽宽， $\vec{e}_x$  为  $X$  方向的单位向量。

对于弯曲槽道，由于它是一个环形通道，故不需要将压力梯度分解为两个部分，但两个圆柱形壁面至少有一个应当在转动，或者二者以不同的角速度在转动。这样方能给予流体以动力。

下面将平直槽道和弯曲槽内流动的提法表述如下：

对于平直槽道，方程改写为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} &= -\nabla p' + \frac{1}{Re} \Delta \vec{V} + \vec{f} \\ \nabla \cdot \vec{V} &= 0 \\ \vec{f} &= \vec{V} \times \vec{\Omega} - \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) - \nabla p_0; \quad \nabla p_0 = -\frac{2\tau_w}{H} \vec{e}_o \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \vec{V}|_{y=\pm 1} &= 0 \\ \vec{V}(x+ml_s, y, z+nl_s, t) &= \vec{V}(x, y, z, t) \\ p'(x+ml_s, y, z+nl_s, t) &= p'(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$l_x, l_s$  为  $x, z$  方向的长度周期,  $m, n$  为正整数

对于弯曲槽道, 方程写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \vec{V} + \vec{f} \\ \nabla \cdot \vec{V} &= 0 \\ \vec{f} &= \vec{V} \times \vec{\Omega} - \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{V}|_{R-\delta} &= \omega_1(R-\delta) \\ \vec{V}|_{R+\delta} &= \omega_2(R+\delta) \\ \vec{V}(\gamma, \theta + 2m\pi, z + nl_s, t) &= \vec{V}(\gamma, \theta, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

其中  $l_s$  为  $z$  方向的长度周期,  $m, n$  为正整数。

这样, 我们取得了两种不同情况下有相类似的方程(2.4)和(2.6), 对它们取散度可得到:

$$\Delta p = \nabla \cdot \vec{f} \quad (2.8)$$

其中关于平直槽道时  $p = p'$ 。为求解上述方程, 除了周期条件外, 在壁面上取

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\text{壁面}} = 0 \quad (2.9)$$

的条件, 为了确定起见, 应当在某一点给定压力  $p$  值。由于在后面描述的谱方法中压力被消去了, 所以为了计算压力值, 还必须单独求解(2.8)式。

### 三、平直槽道内解 N-S 方程的谱方法

根据谱方法的基本思想, 首先将速度向量表示为谱函数的形式:

$$\vec{V} = \sum_{k_x} \sum_{k_z} \sum_{j=0}^J \alpha_j(k_x, k_z, t) \cdot \vec{u}_j(y, k_x, k_z) e^{ik_x x} e^{ik_z z} \quad (3.1)$$

其中

$$k_x = \frac{2\pi m}{l_x}; \quad k_z = \frac{2\pi n}{l_z};$$

$$m = -M, \dots, -1, 0, 1, \dots, M; \quad n = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$$

根据方程(2.4),  $\vec{u}_j$  应当满足如下条件:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot [\vec{u}_j(y, k_x, k_z) e^{ik_x x} e^{ik_z z}] &= 0 \\ \vec{u}_j(y, k_x, k_z) |_{y=\pm 1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

为了消去压力项（将压力求解单独地归结为解方程(2.8)，从而把压力计算分离出去），选用新的谱函数  $\vec{\phi}_{j1}(k_x, k_z, x, y, z)$ ，它满足如下条件：

$$\left. \begin{aligned} \vec{\phi}_{j1}(k_x, k_z, x, y, z) &= \vec{\psi}_{j1}(y, k_x, k_z) e^{-ik_x x} e^{-ik_z z} \\ \nabla \cdot [\vec{\psi}_{j1}(y, k_x, k_z) e^{-ik_x x} e^{-ik_z z}] &= 0 \\ \vec{\psi}_{j1}(y, k_x, k_z) \cdot \vec{n} |_{y=\pm 1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

将(3.1)式代入(2.4)式，在(2.4)式两边再数乘  $\vec{\phi}_{j1}$ ，并对于全流场积分可得到方程

$$\sum_{j=0}^J \frac{d\alpha_j}{dt} \int_{-1}^1 \vec{\psi}_{j1} \cdot \vec{u}_j dy = \frac{1}{Re} \sum_{j=0}^J \alpha_j \int_{-1}^1 \vec{\psi}_{j1} \cdot \left[ \frac{d^2}{dy^2} - (k_x^2 + k_z^2) \right] \vec{u}_j dy + \int_{-1}^1 \vec{\psi}_{j1} \cdot \vec{f} dy \quad (j' = 0, 1, \dots, J; \forall k_x, k_z) \quad (3.4)$$

其中  $\widehat{f}$  为  $f$  的富氏变换即

$$\widehat{f} = \sum_{k_x} \sum_{k_z} \widehat{f}(y, k_x, k_z) e^{ik_x x} e^{ik_z z} \quad (3.5)$$

为了简化计算，设

$$\vec{u}_j = \alpha_j^+ \vec{u}_j^+ + \alpha_j^- \vec{u}_j^- \quad (3.6)$$

并且把  $\vec{\psi}_{j1}$  也分成  $\vec{\psi}_{j1}^+$  和  $\vec{\psi}_{j1}^-$ ，并要求它们满足下列条件：

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 \vec{\psi}_{j1}^+ \cdot \vec{u}_j^- dy &= 0 & \int_{-1}^1 \vec{\psi}_{j1}^- \cdot \vec{u}_j^+ dy &= 0 \\ \int_{-1}^1 \vec{\psi}_{j1}^+ \cdot L \vec{u}_j^- dy &= 0 & \int_{-1}^1 \vec{\psi}_{j1}^- \cdot L \vec{u}_j^+ dy &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

其中

$$L \vec{u} = \left[ \frac{d^2}{dy^2} - (k_x^2 + k_z^2) \right] \vec{u} \quad (3.8)$$

将(3.6)式代入(3.4)式， $\vec{\psi}_{j1}^+$ ， $\vec{\psi}_{j1}^-$ ，代替  $\vec{\psi}_{j1}$ ，可得方程

$$\left. \begin{aligned} A^+ \frac{d\alpha^+}{dt} &= \frac{1}{Re} B^+ \alpha^+ + F^+ \\ A^- \frac{d\alpha^-}{dt} &= \frac{1}{Re} B^- \alpha^- + F^- \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_{j'j}^+ &= \int_{-1}^1 \vec{\psi}_{j'1}^+ \cdot \vec{u}_j^+ dy & A_{j'j}^- &= \int_{-1}^1 \vec{\psi}_{j'1}^- \cdot \vec{u}_j^- dy \\ B_{j'j}^+ &= \int_{-1}^1 \vec{\psi}_{j'1}^+ \cdot L \vec{u}_j^+ dy & B_{j'j}^- &= \int_{-1}^1 \vec{\psi}_{j'1}^- \cdot L \vec{u}_j^- dy \\ F_{j'}^+ &= \int_{-1}^1 \vec{\psi}_{j'1}^+ \cdot \widehat{f} dy & F_{j'}^- &= \int_{-1}^1 \vec{\psi}_{j'1}^- \cdot \widehat{f} dy \end{aligned} \right\} \quad (j', j = 0, 1, \dots, J) \quad (3.10)$$

为了进一步简化计算, 对于每一组  $k_x, k_z$ , 作一变换使得:

$$k_{z1} = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}, \quad k_{x1} = 0 \quad (3.11)$$

再记  $k_{x1}, k_{z1}$  为  $k_x, k_z$  因此以下表达式中都令  $k_x = 0$ , 这样  $\vec{u}_j^+, \vec{u}_j^-, \vec{\psi}_j^+, \vec{\psi}_j^-$  可以作如下的选择

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_j^+ &= \begin{pmatrix} i g_j' \\ k_x g_j \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{u}_j^- &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_j \end{pmatrix} \\ \vec{\psi}_j^+ &= \begin{pmatrix} -i Q_j' \\ k_x Q_j \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{\psi}_j^- &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{j1} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} g_j &= (1-y^2)^2 T_j(y) & h_j &= (1-y^2) T_j(y) \\ Q_j &= \left( \frac{T_{j+2}(y)}{j(j+1)} - \frac{2T_j(y)}{(j+1)(j-1)} + \frac{T_{j-2}(y)}{j(j-1)} \right) / 4(1-y^2)^{1/2} \\ P_{j1} &= (T_{j-1}(y) - T_{j+1}(y)) / 2j^2 (1-y^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

$T_j(y)$  为契比雪夫多项式

$$g_j' = dg_j/dy; \quad Q_j' = dQ_j/dy \quad (3.14)$$

为了保证完备性, 当  $k_x = k_z = 0$  时

$$\vec{u}_j^+ = \begin{pmatrix} h_j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_j^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_j \end{pmatrix} \quad \vec{\psi}_j^+ = \begin{pmatrix} P_{j1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\psi}_j^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{j1} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

#### 四、弯曲槽道内解 N-S 方程的谱方法

对于弯曲槽道内流动, 谱方法的作法是与前相类同的, 但是更为复杂了。在这里设

$$\vec{V} = \sum_{k_x} \sum_{k_\theta} \sum_{j=0}^J (\alpha_j^0 \vec{u}_j^0 + \alpha_j^+ \vec{u}_j^+ + \alpha_j^- \vec{u}_j^-) e^{ik_\theta \theta} e^{ik_x z} \quad (4.1)$$

其中

$$k_\theta = m; \quad k_x = \frac{2\pi n}{l_x} \quad \left. \begin{aligned} m &= -M, \dots, -1, 0, 1, \dots, M \\ n &= -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

其中  $\alpha_j, \vec{U}_j$  都与  $k_\theta, k_x$  有关, 它们分别是  $(k_\theta, k_x, t)$  及  $(k_\theta, k_x, y)$  的函数。

同样, 选用新的谱函数

$$\vec{\phi}_{j1}(k_\theta, k_x, \gamma, \theta, z) = \vec{\psi}_{j1}(k_\theta, k_x, \gamma) e^{-ik_\theta \theta} e^{-ik_x z} \quad (4.3)$$

$\alpha_j, \vec{U}_j$  和  $\vec{\phi}_{j1}, \vec{\psi}_{j1}$  所应满足的条件也是与前类似的, 即

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (\alpha_j \vec{u}_j e^{ik_\theta \theta} e^{ik_x z}) &= 0 \\ \vec{u}_j \Big|_{r=\{R-\delta, R+\delta\}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{\psi}_{j1} e^{-k_\theta \theta} e^{-ik_z z}) &= 0 \\ \vec{\psi}_{j1} \cdot \vec{n} \Big|_{r=\{R-\delta, R+\delta\}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

若选取

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_j^+ &= \nabla \times \begin{pmatrix} ig_j \\ g_j \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ik_z g_j \\ -k_z g_j \\ g_j' + \frac{1+k_\theta}{r} g_j \end{pmatrix}; \quad \vec{\psi}_{j1}^+ = \nabla^* \times \nabla^* \times \begin{pmatrix} -iQ_{j1} \\ Q_{j1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{u}_j^- &= \nabla \times \begin{pmatrix} -ig_j \\ g_j \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ik_z g_j \\ k_z g_j \\ g_j' + \frac{1-k_\theta}{r} g_j \end{pmatrix}; \quad \vec{\psi}_{j1}^- = \nabla^* \times \nabla^* \times \begin{pmatrix} iQ_{j1} \\ Q_{j1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{u}_j^0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2k_\theta h_j \\ 2k_\theta h_j/r \end{pmatrix} \quad \vec{\psi}_{j1}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -k_\theta r^2 P_{j1} \\ k_\theta r P_{j1} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

对于  $\vec{U}_j^+$ ,  $\vec{\psi}_{j1}^+$ ,  $j, j' = 0, 1, \dots, J$ ; 对于  $\vec{U}_j^0$ ,  $\vec{\psi}_{j1}^0$ ,  $j, j' = 0, 1$ , 以上只对  $k_\theta \neq 0$  的情况而言,  $\nabla$  是  $\nabla$  的 Fourier 变换后的算子,  $\nabla^*$  是  $\nabla$  的复共轭

当  $k_z = 0$ ,  $k_\theta \neq 0$  时

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_j^+ &= \begin{pmatrix} -ik_\theta g_j/r \\ g_j' \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{u}_j^- &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_j \end{pmatrix} \\ \vec{\psi}_{j1}^+ &= \begin{pmatrix} -ik_\theta Q_{j1}/r \\ Q_{j1}' \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{\psi}_{j1}^- &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{j1} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

若  $k_z = k_\theta = 0$  时

$$\vec{u}_j^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ h_j \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_j^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_j \end{pmatrix} \quad \vec{\psi}_{j1}^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ P_{j1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\psi}_{j1}^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{j1} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

如果在方程(2.6)两边数乘  $\vec{\phi}_{j1}^+$ ,  $\vec{\phi}_{j1}^0$ , 对全流场作积分, 可以得到与(3.9)式相类似的方程组:

$$\left. \begin{aligned} A_\pm^+ \frac{d\alpha^+}{dt} + A_0^+ \frac{d\alpha^0}{dt} &= \frac{1}{Re} (B_\pm^+ \alpha^+ + B_0^+ \alpha^0) + F^+ \\ A_\pm^- \frac{d\alpha^-}{dt} + A_0^- \frac{d\alpha^0}{dt} &= \frac{1}{Re} (B_\pm^- \alpha^- + B_0^- \alpha^0) + F^- \\ A_\pm^0 \frac{d\alpha^+}{dt} + A_\pm^0 \frac{d\alpha^-}{dt} + A_0^0 \frac{d\alpha^0}{dt} &= \frac{1}{Re} (B_\pm^0 \alpha^+ + B_\pm^0 \alpha^- + B_0^0 \alpha^0) + F^0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} (A_\beta^\gamma)_{j1j} &= \int_{R-\delta}^{R+\delta} \vec{\psi}_{j1}^\gamma \cdot \vec{u}_j^\beta r dr \\ (B_\beta^\gamma)_{j1j} &= - \int_{R-\delta}^{R+\delta} \vec{\psi}_{j1}^\gamma \cdot \nabla^* \times \nabla^* \times \vec{u}_j^\beta r dr \\ F_{j1}^\gamma &= \int_{R-\delta}^{R+\delta} \vec{\psi}_{j1}^\gamma \cdot \hat{f} r dr \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

其中  $\alpha, \beta$  可为  $+, -, 0$ 。当  $\alpha=0$  时,  $j'=0, 1$ ;  $\beta=0$  时  $j=0, 1$ ;  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$  时  $j', j=0, 1, \dots, J$ 。

(4.10)式具有如下形式:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_0^+ & & A_0^- & \alpha^+ \\ \hline & A_1^+ & & \\ \hline & & A_1^- & \alpha^- \\ \hline A_1^+ & A_1^- & A_1^+ & \alpha^+ \\ \hline & & & \\ \hline A_1^+ & A_1^- & A_1^+ & \alpha^+ \\ \hline \end{array} = \frac{1}{Re} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline B_0^+ & & B_0^- & \alpha^+ \\ \hline & B_1^+ & & \\ \hline & & B_1^- & \alpha^- \\ \hline B_1^+ & B_1^- & B_1^+ & \alpha^+ \\ \hline & & & \\ \hline B_1^+ & B_1^- & B_1^+ & \alpha^+ \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline F^+ \\ \hline \\ \hline F^- \\ \hline \\ \hline F^+ \\ \hline \end{array} \quad (4.11)$$

此外

$$\left. \begin{aligned} g_j &= r(1-y^2)^2 T_j(y) \\ h_j &= r(1-y^2) T_j(y) \\ Q_j &= r^2 \left( \frac{T_{j+2}(y)}{j(j+1)} - \frac{2T_j(y)}{(j+1)(j-1)} + \frac{T_{j-2}(y)}{j(j-1)} \right) / 4(1-y^2)^{1/2} \\ F_j &= (T_{j-1}(y) - T_{j+1}(y)) / 2j(1-y^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

其中  $y = (r-R)/\delta$

## 五、数值方法和计算结果

在第三、四节中我们用谱方法分别得到了方程(3.9)和(4.9)。应当注意(3.9)式是两个  $(J+1)$  元常微分方程组, 并且关于每个  $k_x, k_z$  都有一组的, (4.9)式是  $[2(J+1)+2]$  元的微分方程组, 也是关于每个  $k_x, k_z$  都有一组的。它们的统一型式为

$$A \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{Re} B\alpha + F \quad (5.1)$$

沿时间方向的差分化采用 Crank-Nickolson 和 Adams-Bashforth 格式, 即

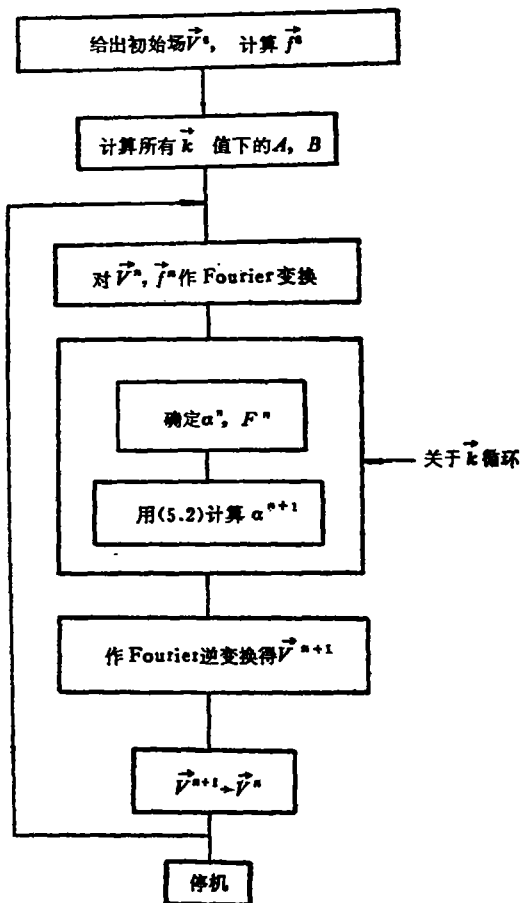
$$A \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n}{\Delta t} = \frac{1}{2Re} B(\alpha^{n+1} + \alpha^n) + \frac{1}{2}(3F^n - F^{n-1})$$

或改写为

$$\left( A - \frac{\Delta t}{2Re} B \right) \alpha^{n+1} = \left( A + \frac{\Delta t}{2Re} B \right) \alpha^n + \frac{\Delta t}{2} (3F^n - F^{n-1}) \quad (5.2)$$

由于  $A, B$  只与  $\phi, k$  等量有关而与  $V$  无关, 所以(5.2)式的求解是十分方便的, 因为  $A, B$  可事先计算出来, 所以不需要迭代, 方程是线性的。

用谱方法求解过程框图如右:



本文分别对平直槽道和弯曲槽道内流动进行计算。

### 平直槽道

为了说明本文方法的正确性，这里选取 L. Kleiser<sup>[5]</sup>等所给的初始速度场：

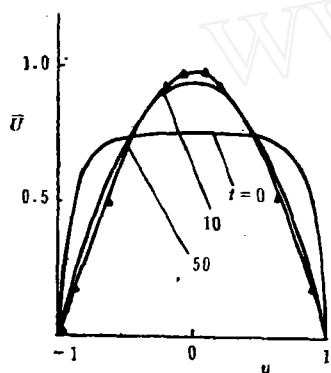
$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, 0) &= 0.75(1-y^2) + \varepsilon \frac{2\pi}{k_x} \cos k_x x \sin k_z z \sin \pi y \\ v(x, y, z, 0) &= -\varepsilon \sin k_x x \sin k_z z (1 + \cos \pi y) \\ w(x, y, z, 0) &= -\varepsilon \frac{\pi}{k_z} \sin k_x x \cos k_z z \sin \pi y \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

并对以下情况作计算：

(1)  $Re = 75$ ,  $\Delta t = 0.5$ ,  $k_x = k_z = 2$ ,  $\varepsilon = 1/15$ ；在  $x$  方向网格点为 16,  $y, z$  方向分别为 8 个点，计算表明  $t = 50$  时平均流动为层流，而扰动的总效果衰减到可忽略的程度。

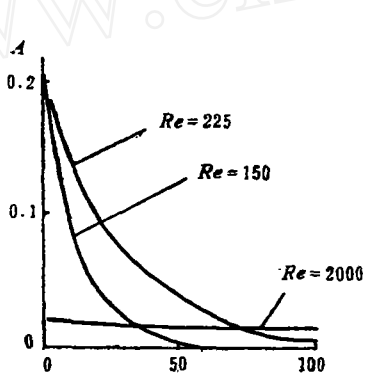
(2)  $Re = 150, 225, 2000$  计算表明，随着  $Re$  数的增大，扰动幅度的衰减变慢且计算发现，对应于一给定的扰动幅值，存在临界  $Re$  数，当流场的雷诺数大于临界  $Re$  数时扰动就增加，如  $\varepsilon = 1/15$  时， $Recr_i = 230$ ，当  $\varepsilon$  减小时  $Recr_i$  就会上升。

上述结论可以在图 2、3、4 中找到。



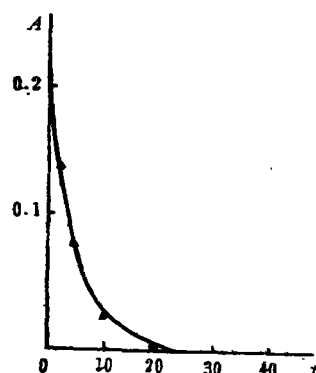
平均速度 ( $Re = 75$ ) —— 本文结果  
▲ Moin & Kim 计算结果

图 2



不同雷诺数下扰动幅值  
随时间的变化

图 3



—— 本文结果 ▲ Kleiser 结果<sup>[5]</sup>  
扰动幅值随时间的衰减 ( $Re = 75$ )

图 4

### 弯曲槽道

为验证弯曲槽道流动的谱方法计算的正确性，本文以 Taylor-Couette 流动为例。Taylor-Couette 流动是内圆柱旋转而外圆柱静止时的同心圆环间的流动。随着  $Re$  数 ( $Re = \omega R \cdot 2\delta/\nu$ ) 的增加，流动会由层流向不稳定流，进而变为湍流。

本文对临界  $Re$  数作了计算，在临界  $Re$  数下扰动既不上升也不下降。

初始速度场为：

$$\left. \begin{aligned} v_r &= -\varepsilon \delta \frac{1}{r} \sin k_\theta \theta \sin k_z z (1 + \cos \pi y) \\ v_\theta &= 0.75(1-y^2) - \varepsilon \frac{\pi}{k_\theta} \cos k_\theta \theta \sin k_z z \sin \pi y + V_\theta \\ v_z &= \varepsilon \frac{2\pi}{k_z} \frac{1}{r} \sin k_\theta \theta \cos k_z z \sin \pi z \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

所得的  $Recr_i$  值见下表：



|                                  | 稳定性分析结果 <sup>[6]</sup> | Moser & Moin 的结果 | 本文结果 |
|----------------------------------|------------------------|------------------|------|
| 窄槽道 $(R-\delta)/(R+\delta)=0.95$ | 184.99                 | 185              | 185  |
| 宽槽道 $(R-\delta)/(R+\delta)=0.5$  | 68.19                  | 68.2             | 68   |

当  $Re < Re_{cri}$  时计算最后得到层流的分布, 即  $V_r = V_\theta = 0$ ,  $V_z = -(R-\delta)^2/4R\delta \cdot \omega r + (R^2 - \delta^2)/(4R\delta) \cdot \omega/r$

以上计算表明本文的方法和程序是正确的, 由于计算机容量和速度的限制, 用本方法直接计算高  $Re$  数的湍流尚有困难。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Ferziger J. H., AIAA J. Vol. 15, p1261, 1977.
- [ 2 ] Gottlieb D., Orszag S. A., Numerical Analysis of Spectral Methods NCF-CBMS Monograph No. 26, 1977.
- [ 3 ] Orszag S. A., Flow Research Rept. No. 52 MIT, Cambridge, 1974.
- [ 4 ] Moser R. D., Moin P., Leonard A., J. of Comp. Phys. Vol. 52 p524—544, 1983.
- [ 5 ] Kleiser L., Schumann U., Proc. of the 3rd GAMM—Conf. on Num. Meth. in fluid Mech. p165—173, 1980.
- [ 6 ] Diprima R. C., Eagles P. M., Phys Fluids Vol. 20, p171—175, 1977.

## Solution of the Navier-Stokes Equation with Spectral Method

*Su Ming-de*

(Dept. of Eng. Mech., Tsinghua University)

*Liao Bai-cheng*

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science)

### Abstract

The research of turbulent flow is of considerable theoretical and engineering significance. Spectral method has the advantages of quick convergence, better efficiency, high resolution in boundary layers and high accuracy. The boundary conditions can be treated conveniently in the spectral method. With the improvement of numerical methods and the development of computer system, the spectral method is more and more important in the numerical simulation of turbulent flow.

A spectral method for numerical computation of 3-D incompressible Navier-Stokes equation both in a plane channel and between two concentric cylinders is presented. In the plane channel flow Fourier expansions in the coordinates parallel to the wall with  $x$  in stream wise direction and  $z$  in spanwise direction, and expansions in Chebyshev polynomials in the normal

coordinate ( $y$ ) are used. Similar to the plane channel case, in the flow between concentric cylinders Fourier expansions in  $\theta$  and  $z$  directions and expansions in Chebyshev polynomials in the normal coordinate ( $r$ ) are used. For solving N-S equation, the viscous terms are treated implicitly by Crank-Nicholson scheme, the nonlinear term ( $\vec{f} = \vec{V} \times \vec{\omega}$ ) are approximated with Adams-Bashforth scheme. Boundary and continuous conditions are satisfied exactly, apart from round-off errors.

As from the results of the numerical simulation of the plane channel flow and flow between two concentric cylinders we can make sure that the spectral methods are effective for numerical simulation of Navier-Stokes equations. The numerical results are in good agreement with available numerical and theoretical results.

**Key words:** Navier-Stokes equation, spectral method, numerical calculation, turbulent.

www.cnki.net