

板材成型中的分叉和断裂及其 空洞扩展效应¹⁾

李国琛

(中国科学院力学研究所)

张以增

(华中工学院金属材料教研室)

摘要 用平面应力有限元方法分析空洞模型以模拟一种双相钢板材在成型过程中所遇到的微空洞损伤。经试算可使模型的总体和局部的响应与已有的实验相一致。由此可提供描述该材料的损伤本构参数并研究局部剪切带和扩散型颈缩等分叉现象。临界应变值的分布形成了成型极限图中的下限曲线。当空洞模型的总体应力急剧下降或微裂纹开始出现,其相应的总体应变值提供了上限曲线。

关键词 板材成型、空洞、剪切带、颈缩

一、引言

为确定板材成型的极限载荷, Marciniak 和 Kuczynski^[1] 假定板材厚度有初始缺陷从而引起颈缩,其加速阶段将导致材料失效。Stören 和 Rice^[2] 则从局部型的分叉模式出发分析颈缩的出现。在实验方面, Wilson 和 Acselrad^[3] 观测到板材的损伤在于围绕夹杂物粒子会出现空洞。空洞之间有交互作用并触发局部化应变^[3]。张以增等^[4] 在双相钢板材中定量地量测了这类空洞的扩展。

本文的贡献在于:(1)可以用平面应力空洞模型代表成型过程中空洞化损伤的微元结构;(2)板材成型中存在有三种分叉模式(两种局部剪切带,一种扩散型的颈缩),各个模式仅在一定应变加载范围内起主导作用;(3)提供成型极限图中的上、下限值。

二、基本方程

采用逐级更新的 Lagrangian 体系分析时,欲使增量解满足平衡要求,应使^[5]

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{\mathcal{D} r^i}{\mathcal{D} i} D_{ii} - \sigma^i (2D_{ki} D_{ii} g^{ik} - V^k |_i V_k |_i) \right] dV - \int_s \dot{F}^i V_i ds \quad (1)$$

1) 此项工作是受国家自然科学基金资助。

本文第一次稿于1988年5月10日收到,1989年4月12日收到修改稿。

泛函达到极小。其中 $\mathcal{D}r^{ij}/\mathcal{D}t$ 是 Kirchhoff 应力的 Javmann 率, D_{ij} 是由速率的协变导数所确定的应变率 $\left(-\frac{1}{2}(V_i|_i + V_j|_j)\right)$, σ^{ij} 是 Cauchy 应力, \dot{F}^i 是载荷率, g^{ij} 是度量张量, V 和 s 分别是体积和已知外力的边界面。需要引用的本构关系是文献[6]所给出的可膨胀塑性本构方程, 其中

$$\frac{\mathcal{D}r^{ij}}{\mathcal{D}t} = L^{ijkl}D_{kl} \quad (2)$$

$$\text{又} \quad L^{ijkl} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2} (g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) + \frac{\nu - E/3E_{tm}}{(1-2\nu) + E/E_{tm}} g^{ij}g^{kl} - \frac{3}{2\sigma_c^2} \frac{s^{ij}s^{kl}}{\left(1 + \frac{2(1+\nu)}{3E} E_{te}\right)} \right]$$

为求分叉方程, 如 Hill^[7] 和作者^[8]曾论证过的应使二次泛函

$$Q = \delta^2\Pi = \int_V [L^{ijkl}\delta D_{kl} - \sigma^{ik}\delta D_k^i - \sigma^{ik}\delta D_k^i + \sigma^{ik}\delta V^i|_k] \delta V_i|_i dV \quad (3)$$

达到驻值。在本文中由于空洞化损伤是逐渐的发展没有材料分叉现象所以在刚度系数 L^{ijkl} 中沿用“比较弹性固体”的概念^[7]。

三、平面应力空洞模型

板材成型过程中的空洞化损伤可以用平面应力模型的总体响应作为该材料的连续介质行为。其根据在后文将说明。

含初始圆型空洞(半径为 r_0) 的正方板称为胞元。由于对称性, 计算时只需要图 1 所示的 1/4 胞元。用有限元方法计算时被分割为 264 个等应变三角元和 156 个节点。胞元边界受等比应变加载, 即

$$\frac{\Delta V}{1+V} = \alpha \frac{\Delta U}{1+U} \quad (\text{或} \quad \dot{\epsilon}_2 = \alpha \dot{\epsilon}_1) \quad (4)$$

其中 α 是比值系数(在等比应变加载下 $\alpha = \epsilon_2/\epsilon_1$)。

利用势能原理(1)及本构关系(2)进行每个增量计算的步骤与文献[6]中相同。整个过程一般需要 600 个以上的增量。由此可以得到胞元的总体应力可由边界上的节点力 F_i 得出:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{i=1}^7 F_{1i} / [(1+V)(1+W)] && \text{在 } x_1 = 1+U \text{ 边界上 } (\dot{F}_2 = 0) \\ \sigma_2 &= \sum_{i=1}^7 F_{2i} / [(1+U)(1+W)] && \text{在 } x_2 = 1+V \text{ 边界上 } (\dot{F}_1 = 0) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

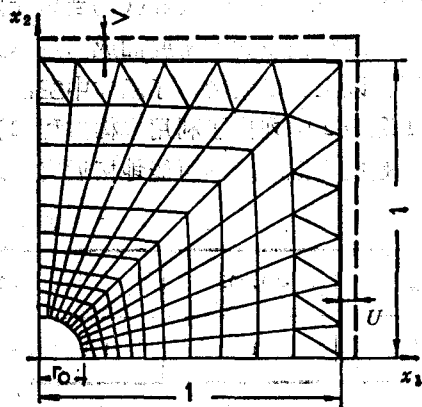


图 1 1/4胞元

又等效应力

和平均应力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e &= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{1/2} \\ \sigma_m &= (\sigma_1 + \sigma_2)/3 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

以上 W 代表板厚在所考虑时刻 t 的平均变化。相应地, 宏观等效应变和宏观平均应变为:

$$\varepsilon_e = \int_0^t d\varepsilon_e, \quad \varepsilon_m = \int_0^t d\varepsilon_m$$

其中

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_e &= \sqrt{2/3}[(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2]^{1/2} \\ d\varepsilon_m &= (d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3)/3 \\ d\varepsilon_1 &= \Delta U/(1+U), d\varepsilon_2 = \Delta V/(1+V) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由此可得到空洞化材料折算为连续介质时其切线模量

$$\left. \begin{aligned} E_{te} &= \Delta\sigma_e/\Delta\varepsilon_e \\ E_{tm} &= \Delta\sigma_m/\Delta\varepsilon_m \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

空洞化的体积百分数为

$$f_v = F_v/[(1+U)(1+V)(1+W)] \quad (9)$$

其中 F_v 是胞元内所含空洞的体积。

以下计算中选用 $r_0 = 0.137$, 由此初始的空洞体积百分数与文献 [4] 中所测定的双相钢情况相近。围绕空洞的基体材料假定为弹塑性的应变硬化情况。为引入实验中所观测到的空洞化不断发展及新空洞连续萌生的事实, 计算模拟时对基体材料还引进了以下特性: (1) 基体是塑性可膨胀的 (2) 当单元内等效应变 $\varepsilon_e > 1.4$ 时发生应变软化 (3) 当 $\varepsilon_e > 1.5$ 时取消该单元的刚度而成为空单元。由此可模拟在基体中微裂纹或新空洞的萌生和扩展。以上三因素构成了基体中空洞化效应及其与初始空洞的相互作用。

表 1 和表 2 中列出了利用本构方程 (2) 计算时基体材料中所用到的各项参数。其选用的原则是使模拟结果尽可能地接近有关的实验数据 [4]。

表 1 $\varepsilon_m - E/E_{tm}$

ε_m	<0.003	>0.003	>0.010	当 $\varepsilon_e > 1.4$
E/E_{tm}	1	$1 + 3(\varepsilon_m - 0.003)/0.007$	4	-5

表 2 $\varepsilon_e - E/E_{te}$, $n = 0.25$, $\varepsilon_s = 0.002$

ε_e	<0.15	>0.15	>0.9	>1.4	≥ 1.5
E/E_{te}	$n(\varepsilon_e/\varepsilon_s)^{n-1}$	$100 - 40(\varepsilon_e - 0.15)/0.75$	60	-60	空单元

图 2 给出了胞元的总体应力-应变曲线 $\sigma_1 - \varepsilon_1$ 。其中也标注了以下将分析的分叉点和围绕空洞出现开裂的时刻。一般来说, 主轴应力 σ_1 在局部开裂后将迅速下降。

图 3 绘制了按 (9) 式计算的空洞体积百分数随胞元总体等效应变的变化。计算曲线

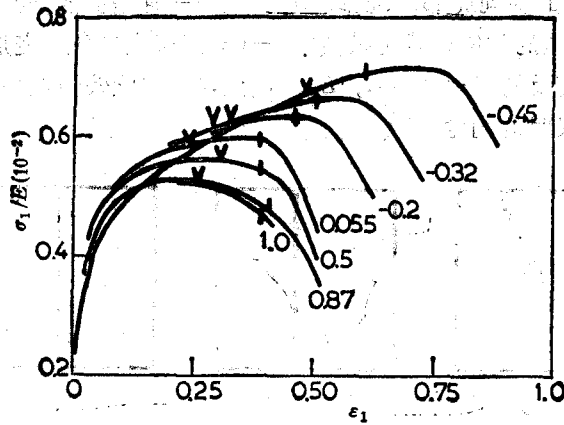


图 2 $\bar{\sigma}_1-\bar{\epsilon}_1$ 曲线
(I 开裂点, V 分叉点)

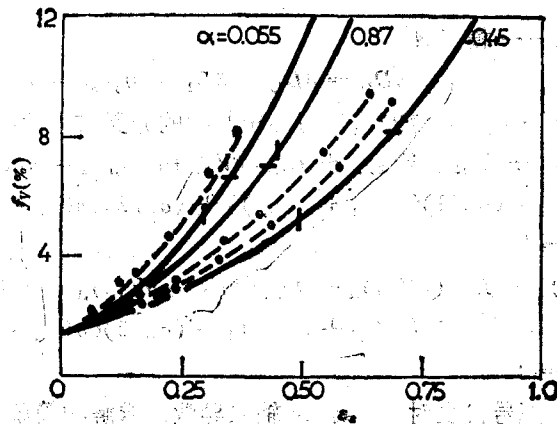


图 3 空洞体积百分数变化图

● 试验点^[9]; — 计算曲线; (— σ_1 最大点; | 分叉点)

与试验结果的趋势相符。图中还标明了产生分叉点和 σ_1 达到最大值时的位置。

从图 2 和 3 中可以看到平面应力空洞扩展的一个特点, 材料的韧性 ϵ_e 不再与所承受的三轴张应力呈单调的反比关系。 $\alpha = 0.055$ 时其三轴张应力小于 $\alpha = 0.87$ 时但其空洞扩展更快, 由此造成其极限应变 ϵ_1 更小。 Li, Guénnouni 和 François^[9] 也曾论证过, 无论是平面应变受力或轴对称情况都不能使空洞模型产生这一现象而只有在平面应力时才有 $\alpha = 0$ 时韧性最小的特点。 这点是与板材成型极限图中的熟知规律相符合的。 文献[9]中的分析还表明平面应力模型(图 1 中 $\sigma_3 = 0$) 的韧性值要比平面应变模型($\epsilon_3 = 0$) 要大, 由此以后的计算结果才能达到图 6 中试验的极限应变值情况。 这就是我们选择平面应力模型的依据。

四、分叉分析

图 4 中表示了三种可能的分叉变形模式。 一是横跨板面的平面局部剪切带(模式

4). 另一种是沿板厚的横向局部带(模式 B), 最后一种是扩散型的厚度颈缩(模式 C)

由前面的空洞模型的数值计算可以按(5)~(8)式确定在各个变形阶段和各种比值加载下的应力、应变响应及切线模量 E_{tc} , E_{tm} 。由此, 按照“比较弹性固体”的概念^[7]就可以给出(3)式中分析分叉时的刚度系数

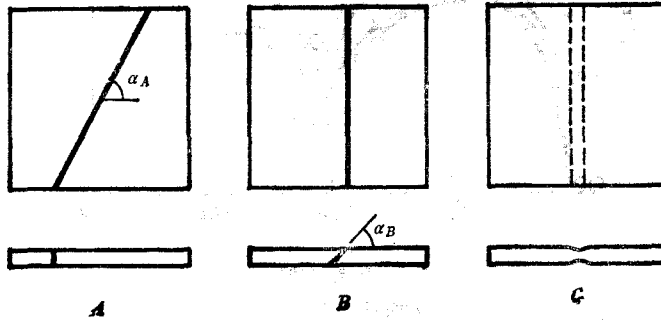


图4 三种分叉模式

(a) 平面剪切带——模式 A

$$\text{此时, } \delta V_3 = \delta D_{33} = \delta D_{13} = \delta D_{23} = 0, \sigma_{33} = 0 \quad (10)$$

根据使二次泛函 Q 达到驻值的条件可导出此时的分叉方程为:

$$\begin{aligned} & L_{1111}(\delta V_{1,1})_{,1} + L_{1122}(\delta V_{2,2})_{,1} + L_{1212}(\delta V_{1,2} + \delta V_{2,1})_{,2} - \sigma_{11}(\delta V_{1,1})_{,1} \\ & \quad - (\sigma_{11}/2)(\delta V_{2,1} + \delta V_{1,2})_{,2} + (\sigma_{22}/2)(\delta V_{1,2} - \delta V_{2,1})_{,2} \\ & \quad = 0 \\ & L_{2222}(\delta V_{2,2})_{,2} + L_{1122}(\delta V_{1,1})_{,2} + L_{1212}(\delta V_{2,1} + \delta V_{1,2})_{,1} - \sigma_{22}(\delta V_{2,2})_{,2} \\ & \quad - (\sigma_{22}/2)(\delta V_{1,2} + \delta V_{2,1})_{,1} + (\sigma_{11}/2)(\delta V_{2,1} - \delta V_{1,2})_{,1} \\ & \quad = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

其中下标 1 或 2 前的逗号代表对 x_1 或 x_2 轴求导数。求解的简单过程如下

$$\text{令 } \delta V_i = c_i V(n), \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

其中 $n = n_i x_i$, $n_1 = \cos \alpha_A$, $n_2 = \sin \alpha_A$; 又 α_A 是剪切带与 x_1 轴之间的夹角(见图 4)。

再令

$$r = c_1/c_2 \text{ 和 } s = n_2/n_1$$

于是(11)式可以改写为

$$\begin{aligned} & [(L_{1212} - \sigma_{11}/2 + \sigma_{22}/2)(L_{2222} - \sigma_{22})]s^4 + [(L_{1111} - \sigma_{11})(L_{2222} - \sigma_{22}) \\ & \quad + (L_{1212} - \sigma_{11}/2 + \sigma_{22}/2)(L_{1212} + \sigma_{11}/2 - \sigma_{22}/2) \\ & \quad - (L_{1122} + L_{1212} - \sigma_{11}/2 - \sigma_{22}/2)^2]s^2 \\ & \quad + [(L_{1111} - \sigma_{11})(L_{1212} + \sigma_{11}/2 - \sigma_{22}/2)] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

及

$$r = - \frac{(L_{2222} - \sigma_{22})s^2 + L_{1212} + \sigma_{11}/2 - \sigma_{22}/2}{(L_{1212} + L_{1122} - \sigma_{11}/2 - \sigma_{22}/2)s} \quad (14)$$

于是只要(13)式中存在有 s 的实根即为分叉点。

(b) 横向剪切带——模式 B

此时 $\delta V_2 = \delta D_{22} = \delta D_{12} = \delta D_{23} = 0, \sigma_{33} = 0$ (15)

又 $n_1 = \cos \alpha_2, n_3 = \sin \alpha_2, s = n_3/n_1$ 。由此可以得到与(13),(14)式类似的结果, 只需将下标 2 改为 3 并注意 $\sigma_{33} = 0$ 。

(c) 扩散型颈缩——模式 C

这是一种平面应变型的颈缩, 即

$$\delta D_{22} = \delta D_{12} = 0 \quad (16)$$

由图 5 可以规定边界条件

$$\delta V_1 = 0 \quad \delta D_{13} = 0 \quad \text{在 } x_1 = 0,$$

$$\delta V_3 = 0 \quad \delta D_{13} = 0 \quad \text{在 } x_3 = 0$$

和

$$\delta D_{13} = 0 \int_0^{h/2} \delta T_{11} dx_3 \quad \text{在 } x_1 = L/2$$

$$\delta D_{13} = 0 \quad \delta T_{33} = 0 \quad \text{在 } x_3 = h/2 \quad (17)$$

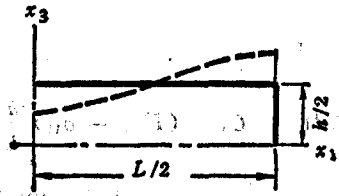


图 5 扩散型颈缩

其中的名义应力率的变分可以表示为:

$$\delta \dot{T}_{11} = \mathcal{D} \delta \tau_{11} / \mathcal{D} t - \sigma_{11} \delta D_{11} = (L_{1111} - \sigma_{11}) \delta D_{11} + L_{3333} \delta D_{33}$$

$$\text{和 } \delta \dot{T}_{33} = \mathcal{D} \delta \tau_{33} / \mathcal{D} t - \sigma_{33} \delta D_{33} = L_{1133} \delta D_{11} + L_{3333} \delta D_{33}.$$

可以取速率的变分为

$$\left. \begin{aligned} \delta V_1 &= \sin \frac{2\pi x_1}{L} \left(\cos \frac{\pi x_3}{h} + f_1 \cos \frac{3\pi x_3}{h} \right) V_1 \\ \delta V_3 &= \cos \frac{2\pi x_1}{L} \left[f_2 \sin \frac{3\pi x_3}{h} V_1 + \left(\sin \frac{\pi x_3}{h} + \sin \frac{3\pi x_3}{h} \right) V_2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其中

$$f_1 = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{32 h^2}{9 d L^2} (L_{1111} - \sigma_{11}) \right]$$

$$f_2 = - \frac{16 h}{9 d L} (L_{1111} - \sigma_{11})$$

又

$$d = \frac{4 h^2}{9 L^2} (L_{1111} - \sigma_{11}) - L_{1133}$$

于是,(17)式中各项边界条件均可满足。将相应的 $\delta D_{11}, \delta D_{33}$ 和 δD_{13} 代入(3)式, 积分后

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\pi^2}{4} \left\{ (L_{1111} - \sigma_{11}) \frac{h}{L} (1 + f_1) V_1^2 + L_{3333} [3f_1 f_2 V_1^2 + (1 + 3f_1) V_1 V_2] \right. \\ &+ (2L_{1313} - \sigma_{11}) \frac{1}{2} [3f_1 f_2 V_1^2 + (1 + 3f_1) V_1 V_2] \\ &+ (L_{1313} - \sigma_{11}/2) \frac{L}{4h} (1 + 9f_1) V_1^2 \\ &+ (L_{1313} + \sigma_{11}/2) \frac{h}{L} (f_2^2 V_1^2 + 2f_2 V_1 V_2 + 2V_2^2) \\ &\left. + L_{3333} \frac{L}{4h} (9f_1^2 V_1^2 + 18f_2 V_1 V_2 + 10V_2^2) \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

为求分叉解可利用驻值条件

$$\partial Q / \partial v_1 = 0 \text{ 和 } \partial Q / \partial v_2 = 0$$

于是由(19)式可得:

$$\begin{cases} C_1 v_1 + C_2 v_2 = 0 \\ C_2 v_1 + C_3 v_2 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

$$\text{其中 } C_1 = (L_{1111} - \sigma_{11}) \frac{h}{L} (1 + f_1) + \frac{L}{4h} (L_{1313} - \sigma_{11}/2)(1 + 9f_1)$$

$$+ 3(L_{1133} + L_{1313} - \sigma_{11}/2)f_1 f_2$$

$$+ \left[L_{3333} \frac{9L}{4h} + (L_{1313} + \sigma_{11}/2) \frac{h}{L} \right] f_2^2$$

$$C_2 = \frac{1}{2} (L_{1133} + L_{1313} - \sigma_{11}/2)(1 + 3f_1)$$

$$+ \left[L_{3333} \frac{9L}{4h} + (L_{1313} + \sigma_{11}/2) \frac{h}{L} \right] f_2$$

$$C_3 = 2(L_{1313} + \sigma_{11}/2) \frac{h}{L} + \frac{5}{2} L_{3333} \frac{L}{h}$$

由此,产生颈缩型分叉的必要和充分条件是当

$$C_1 C_3 - C_2^2 = 0 \quad (21)$$

当 $h/L \rightarrow 0$ 则有渐近解,此时 $f_1 \rightarrow 1/3$, $f_2 \rightarrow 0$; 于是(21)式中各项参数可以改写为:

$$C_1 \rightarrow \frac{1}{2} (L_{1313} - \sigma_{11}/2) \left(\frac{L}{h} \right)$$

$$C_2 \rightarrow 0 \left(\frac{L}{h} \right)$$

$$C_3 \rightarrow \frac{5}{2} L_{3333} \left(\frac{L}{h} \right)$$

由此可从(21)式得到分叉点的渐近条件为

$$(L_{1313} - \sigma_{11}/2)L_{3333} = 0 \quad (22)$$

但是 $\sigma_{11} = 2L_{1313} = E/(1 + \nu)$ 将导致过高的临界应力, 于是使(22)式得以满足的条件应是

$$L_{3333} = 0 \quad (23)$$

$$\text{或 } 1 + \frac{\nu - E/3E_{tm}}{(1 - 2\nu) + E/E_{tm}} - \frac{3}{2\sigma_c^2} \frac{s_{33}^2}{\left(1 + \frac{2(1 + \nu)}{3E} E_{tc}\right)} = 0$$

至此已给出三种模式分叉的求解方法。在前一节中又计算了受空洞化损伤时板材的总体应力-应变曲线, 由此随着每个等比应变加载情况 α 可以求得各加载阶段上的切线模量 E_{tc} 和 E_{tm} 。

表 3 中列出了对应各分叉模式的临界应变值和角度 α_A , α_B 变化的情况。很明显模

式B是在各种情况下均起主导作用的一种分叉型式。当 α 趋向于 -0.45 时模式A可能成为同时产生的分叉。扩散型的颈缩则在双向拉伸时,即 α 接近1,最有可能发生。

对于扩散型的颈缩,文中计算了 $h/L = 0$ (渐近解), 0.1, 0.2, 0.33和0.5。一般来说 $h/L \leq 0.33$ 的各种情况的临界值基本相同。这就表明图5中的分叉波型分布的长度 L 相对板厚 h 可短(仅为 h 的三倍)也可长。

表3 临界主应变 ϵ_{1cr} 和角度 α_A, α_B

模式 \ α	1	0.87	0.50	0.055	-0.20	-0.32	-0.45
A	—	—	—	—	0.430 ($\alpha_A = 2^\circ$)	0.409 (8°)	0.491 (15°)
B	0.269 ($\alpha_B = 74^\circ$)	0.269 (73°)	0.313 (64°)	0.262 (46°)	0.302 (30°)	0.334 (21°)	0.491 (5°)
C	0.269	0.269	0.343	—	—	—	—

五、成型极限图的上下限值

理论上说,产生局部剪切带或扩散型的颈缩意味着板材变形从均匀状态突变为局部区域内的集中应变。实际上,确切地确定分叉点有赖于观测的灵敏度而且是低于工业使

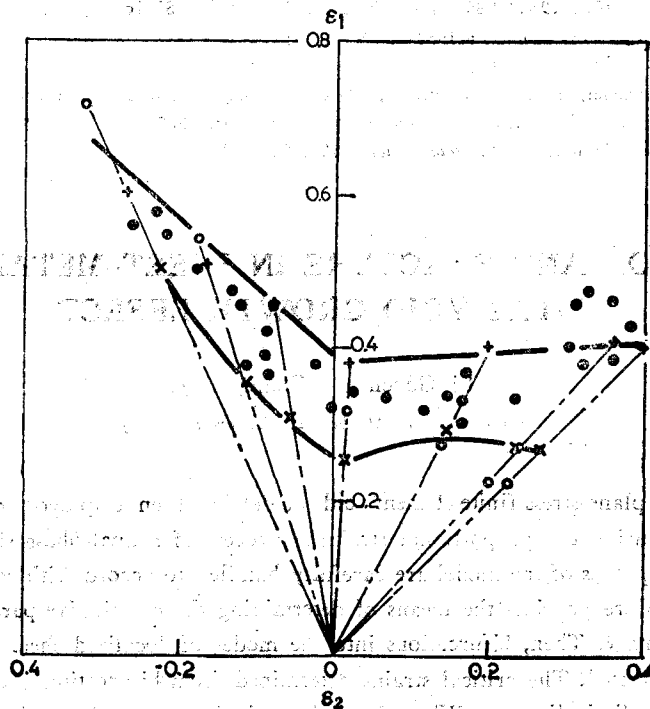


图6 板材成型极限图

● 试验点^[9] × 分叉点 ○ 最大 ϵ_1 点 + 局部裂纹萌生 —— 上下限曲线

用极限[10]。本文的图2, 3中所标明的分叉点位置也表明材料的韧性并没有耗尽, 主要的轴向应力尚未出现明显下降。但局部化变形的萌生又是损伤的突变。为此可以认为分叉点是成型图中的下限值。

围绕空洞萌生局部裂纹(计算时的空单元)将导致空洞聚合和最终失效。这一境况可以视作材料的最大使用极限即成型的上限值。从图2可见, 在 $\alpha < -0.2$ 时一旦 σ_1 达到极大值后应力将有显著降低, 在此情况下作为上限值判据也有参考价值。对于 $\alpha > -0.2$ 情况, 应力的极大点实际上不明显而是有一个平台区就不能作为极限值考虑。基于这些情况, 当 $\alpha < -0.2$ 时取 σ_1 的极大点与出现局部裂纹时的平均值作为勾画上限值曲线的依据。

图6绘制了依照本文分析所计算的上、下限曲线, 基本上可以覆盖文献[4]中的试验数据。在接近双向拉伸时理论曲线有偏低的倾向。这是与图3中所显示的在预测空洞的发展上有过快的现象分不开的。考虑到采用模型分析时所用到的简化假设, 这一差异是不奇怪的。

参 考 文 献

- [1] Marciniak, Z. and Kuczynski, K., *Int. J. Mech. Sci.*, 9(1967), 609.
- [2] Stören, S. and Rice, J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, 23(1975), 421.
- [3] Wilson, D. V. and Acselrad, O., *Int. J. Mech. Sci.*, 26(1984), 573.
- [4] 张以增、胡小渝、黄菊清, 机械工程学报, 23, 3(1987), 9.
- [5] McMeeking, R. M. and Rice, J. R., *Int. J. Solids Structures*, 11(1975), 601.
- [6] 李国琛, 力学学报, 16, 6(1984), 580, (又英文版 *Acta Mechanica Sinica* 1, 1(1985), 49.)
- [7] Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, 6(1958), 236.
- [8] 李国琛, 力学学报, 19, 1(1987), 61.
- [9] Li, G. C., Guennouni, T. and François, D., "Ductile damage caused by two generations of voids", CNRS-GRECO "Grandes Deformation et Endommagement" Rapport, 1987.
- [10] Jalier, J. M. and Schmitt, J. H., *Acta Metall.*, 30(1982), 1799.

BIFURCATION AND FRACTURE IN SHEET-METAL FORMING WITH VOID GROWTH EFFECT

Li Guochen Zhang Yicen

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract A plane-stress finite element void model has been employed to simulate the void growth damage during the proportional straining process of a dual-phase sheet metal. The overall and local responses of the model are carefully handled to accord with some existing testing results. This procedure provides the means of determining the constitutive parameters that characterize ductile damage. Then, bifurcations into the modes of localized shear bands and diffuse necking are investigated. The critical strains determined from bifurcation analysis form a lower bound curve in the limit diagram. When the major principal stress drops dramatically or crack initiates around the void, the limit strains trace an upper bound curve in the diagram.

Key words sheet-metal forming, void, shear band, necking