

向前台阶分离流的数值模拟*

王 力

傅德薰

北京空气动力研究所(邮政编码 100074) 中国科学院力学研究所(邮政编码 100080)

摘 要 本文利用文献[1~3]中提出的差分格式,数值求解了二维向前台阶分离流的问题。着重研究了流体粘性和流体可压缩性对流动的影响。给出 $M=0.2, 0.8, 2.3, Re=720$ 和 $M=2.3, Re=72, 720, 7220$ 的流动结果。在 $M=0.8, Re=720$ 流动中计算结果给出了台阶后有一个小分离泡的现象。所得 $M=2.3, Re=7220$ 的计算结果和文献[5]中的实验结果进行了比较。

关键词 数值模拟 分离流动 激波附面层干扰

一、引 言

近年来,人们在研究数值求解可压缩性 N-S 方程方面取得了很大进展。文献[1~3]中就可压缩 N-S 方程提出了一种隐式差分格式,它兼有显式格式和隐式格式的优点,具有精度高,方法简便,收敛速度快等特点。

二维向前台阶分离流的数值研究已经有了很大进展,但从以往的研究情况看,大多是用不可压 N-S 方程对这一问题进行研究的。而对于前台阶分离流动,在流动速度很高的情况下,流体可压缩性对流动的影响很大,台阶角点附近,这一影响尤为明显。用不可压 N-S 方程来模拟此流动是远远不够的。就目前的研究情况来看,用可压缩 N-S 方程对前台阶分离流数值模拟的文献很少,这方面工作显得很薄弱。文献[4]中对此问题进行了研究,给出了台阶前流动随着马赫数和雷诺数的变化结果,但未给出台阶后的流动结果。

本文采用文献[1~3]中的差分格式,求解二维可压缩 N-S 方程,对二维向前台阶分离流的问题进行了数值模拟。着重研究流体可压缩性和流体粘性对流动的影响,同时研究了前缘效应及激波附面层干扰等问题。在计算中,给出了可压缩流动中台阶后有一个小分离泡存在,这是在实验中已经发现但在他人的计算结果中还未见到的结果。

二、控制方程

经过无量纲化后的二维可压缩 N-S 方程可写成如下的向量形式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = F \quad (1)$$

式中

$$U = [\rho, \rho u, \rho v, e]^T, \quad f_1 = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (e+p)u]^T$$

$$F = [F_1, F_2, F_3, F_4]^T, \quad f_2 = [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (e+p)v]^T$$

* 本课题得到国家自然科学基金的资助。

1990年2月7日收到来稿。

$$\begin{aligned}
 F_1 &= 0, & F_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{11} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{12}, & F_3 &= \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{21} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{22} \\
 F_4 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[u\sigma_{11} + v\sigma_{12} + \frac{c_p}{PrRe} k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[u\sigma_{21} + v\sigma_{22} + \frac{c_p}{PrRe} k \frac{\partial T}{\partial y} \right] \\
 \sigma_{11} &= 2 \frac{\mu}{Re} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right], & \sigma_{22} &= 2 \frac{\mu}{Re} \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right] \\
 \sigma_{12} = \sigma_{21} &= \frac{\mu}{Re} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] & e &= \rho \left(c_v T + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

状态方程为

$$p = \frac{\rho T}{\gamma M_\infty^2} \quad (2)$$

式中 ρ 为密度; u 和 v 分别为 x 和 y 方向的速度分量; T 为温度; M_∞ 为来流马赫数; Re 为雷诺数; Pr 为 Prandtl 数; c_p 和 c_v 分别为定压和定容比热。

三、差分逼近

方程中粘性项采用中心差分格式, 并利用文献[2]中的算子附加修正。方程中无粘项采用文献[1]中的方法。为了简便起见, 文献[3]中又进行了特殊的矩阵分裂。这样 N-S 方程向量形式的差分方程为

$$\Delta U_{ij}^n = \Delta t F_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^0 (f_1)_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} \delta_y^0 (f_2)_{ij}^n \quad (3)$$

$$(I + \alpha_1 \delta_x^- A_1^+) (I + \alpha_1 \delta_x^+ A_1^-) (I + \alpha_2 \delta_y^+ A_2^-) (I + \alpha_2 \delta_y^- A_2^+) \delta_t U_{ij}^{n+1} = \Delta U_{ij}^n \quad (4)$$

$$U_{ij}^{n+1} = U_{ij}^n + \delta_t U_{ij}^{n+1} \quad (5)$$

式中

$$\delta_x^+ g_{ij} = g_{i+1,j} - g_{ij}, \quad \delta_x^- g_{ij} = g_{ij} - g_{i-1,j}, \quad \delta_y^+ g_{ij} = g_{i,j+1} - g_{ij}$$

$$\delta_y^- g_{ij} = g_{ij} - g_{i,j-1}, \quad \delta_x^0 = \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2}, \quad \delta_y^0 = \frac{\delta_y^+ + \delta_y^-}{2}$$

$$\tilde{A}_l^\pm = A_l^\pm \pm \sigma_l I, \quad l = 1, 2$$

$$\sigma_l = \max \left\{ 0, \left(\frac{2\gamma\mu}{PrRe\Delta t} \right)^{1/2} - \frac{\Delta x_l}{\Delta t} \right\}, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y$$

$$\tilde{A}_l^\pm = s_l^{-1} \tilde{\Lambda}_l^\pm s_l, \quad \tilde{A}_l = s_l^{-1} \tilde{\Lambda}_l s_l$$

$$\tilde{A}_l = \frac{D(f_l)}{DU}, \quad l = 1, 2$$

$$\tilde{\Lambda}_l^\pm = \begin{bmatrix} \dots & 0 \\ \dots & \lambda_k^\pm(\tilde{A}_l) & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Lambda}_l = \begin{bmatrix} \dots & 0 \\ \dots & \lambda_k(\tilde{A}_l) & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$u_l^\pm = \frac{u_l \pm |u_l|}{2} \pm \sigma_l, \quad u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad l=1, 2$$

$$\lambda_k^+(\tilde{A}_l) = u_l^+, \quad k=1, 2, 3, \quad \lambda_4^+ = u_l^+ + c$$

$$\lambda_k^-(\tilde{A}_l) = u_l^-, \quad k=1, 2, 4, \quad \lambda_3^- = u_l^- - c$$

$$\lambda_k^+ + \lambda_k^- = \lambda_k, \quad \tilde{A}_l^+ + \tilde{A}_l^- = A_l, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y}$$

四、边界条件的处理

二维前台阶分离流的流动图象如图 1 所示, 关于边界条件处理可参见图 2 所示的计算域。本方法对边界分别进行隐式和显式边界处理。入口边界取来流参数值; 前缘下边界利

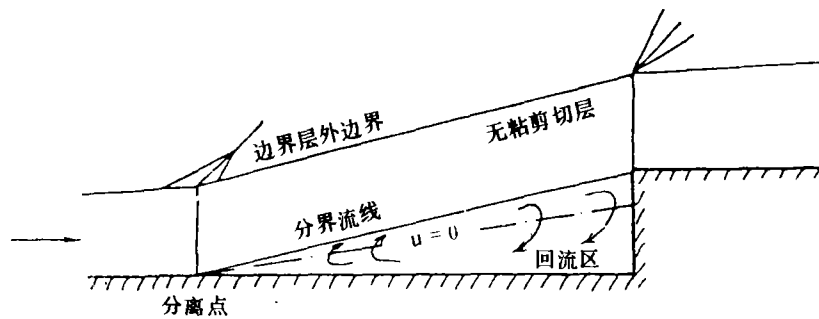


图 1 前台阶分离流动的图象

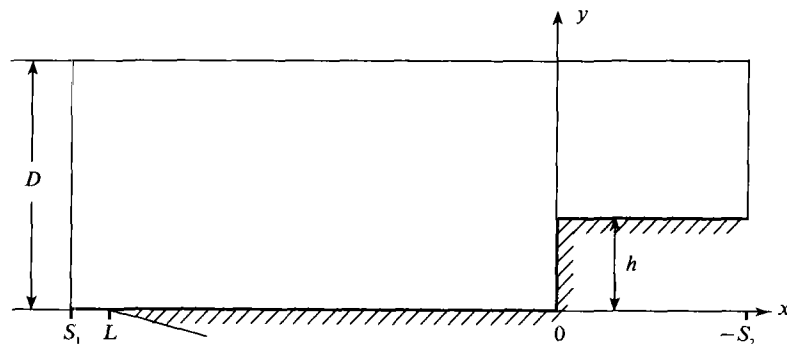


图 2 前台阶分离流计算域

用对称条件; 物面边界利用无滑移条件和绝热壁条件; 台阶角点处边界条件也做了相应的处理; 下游边界各物理量采用三点外插; 上自由面边界对于亚音速流动取来流参数值, 对于超

音速流动的显式边界条件采用单波条件进行处理如图 3 所示。

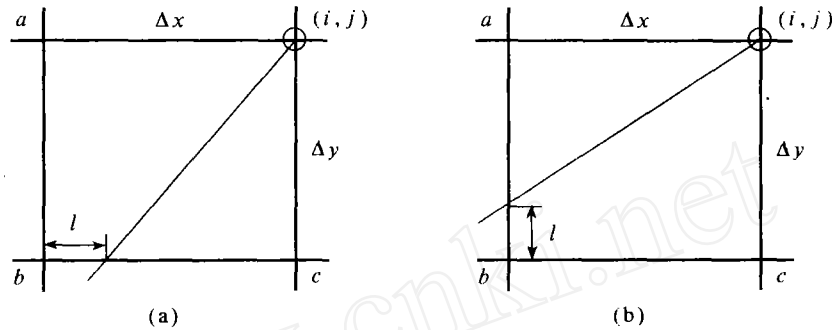


图 3 上自由面边界条件显式处理

当 $x < x_c$ 时, 同亚音速处理相同。当 $x > x_c$ 时, 采用单波条件。假设上自由面网格点 (i, JN) 上的流动参数值等于同一马赫线与前一排的交点 d 上的参数值。这里马赫线在一个网格内认为是直线, 具体计算公式如下。

(a) 当 $w_d < \Delta y / \Delta x$ 时, 见图 3(a),

$$g_{i, JN} = g_{i-1, JN-1} + \frac{l}{\Delta x} (g_{i, JN-1} - g_{i-1, JN-1})$$

$$g = \rho, \mu, v, T$$

$$l = \frac{\Delta x / \Delta y - w'_b}{(w'_c - w'_b) / \Delta x + 1 / \Delta y}$$

式中

$$w = \operatorname{tg}(\mu_M + \theta), \quad w' = \operatorname{tg}[90^\circ - (\mu_M + \theta)]$$

$$\mu_M = \arcsin \frac{1}{M}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{v}{u}$$

这里, M 为当地马赫数, u 和 v 分别为 x 和 y 方向速度分量, μ_M 为马赫角, θ 为流速矢量与 x 轴夹角。

(b) 当 $w_b < \Delta y / \Delta x$ 时, 见图 3(b)。

$$g_{i, JN} = g_{i-1, JN-1} + \frac{l}{\Delta y} (g_{i-1, JN} - g_{i-1, JN-1})$$

$$g = \rho, \mu, v, T$$

$$l = \frac{\Delta y / \Delta x - w_b}{(w_a - w_b) / \Delta y + 1 / \Delta x}$$

而对于超音速流动上自由面隐式边界条件则由前后两个时间层的流动参数值求得。

五、计算结果及分析

在计算中,为了使得前缘,物面及台阶角点附近有足够多的网格点数,且便于边界处理,本文利用了三层网格变换公式分别在 x 和 y 方向进行坐标变换。在 x 方向为了使得前缘、台阶附近有足够多的均匀密网格,将计算域分成三部分进行处理。在 y 方向上采用同样的坐标变换公式。这样经过坐标变换将物理平面的非均匀网格变换成计算平面的均匀网格。物理平面的网格布局如图 4 所示。



图 4 计算网格图

为了同实验结果比较,本文采用了文献[5]中的模型,取台阶高度为特征长度 $h=1$, $L=27.7$ 。为了将前缘包含在计算域内,取 $s_1=32$, $s_2=10$, $D=10$,所得计算域如图2所示。本文采用时间相关法进行计算,其定常流场精度为 $|\partial U/\partial t|_{\text{平均}} \leq 10^{-5}$, $|\partial U/\partial t|_{\text{max}} \leq 10^{-4}$ 。

首先计算了 $M=2.3$, $Re=7220$ 的流动情况,所得物面压力分布同文献[5]中的实验结果比较如图 5 所示,其流场速度分布如图 6 所示,流体密度等值线如图 7 所示。从计算结

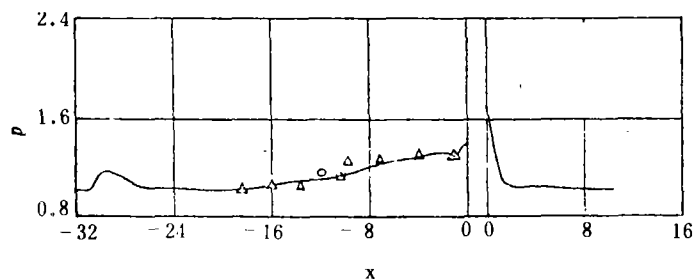


图 5 台阶压力分布图. $M=2.3$, $Re=7220$.

—— 计算值 Δ — 实验值 \square — 计算的分离点 \circ — 实验的分离点

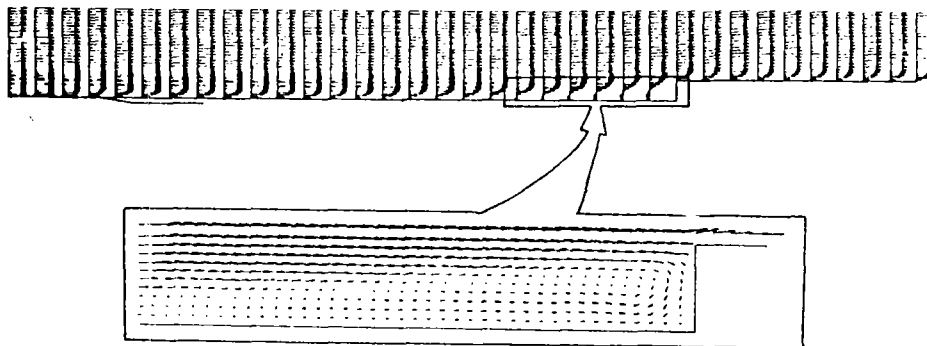


图 6 流场速度分布图

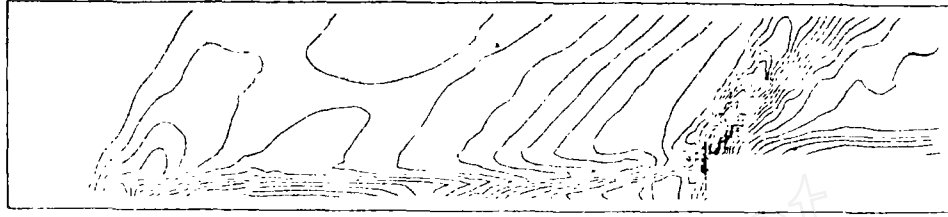


图 7 流体密度场等值线图. $M=2, 3, Re=7220$.

果中可看出物面压力分布的计算结果同实验值符合较好。台阶前分离点处和分离区物面压力比未分离区物面压力分别高出 15% 和 30%。由于激波附面层干扰的作用和流体在拐角附近受到滞止的作用，在台阶前很小区域内物面压力比分离区其他处物面压力稍高一些。这同文献[5]中指出现象是一样的。在台阶附近有一道激波，台阶前流体密度分布正确地反映了激波附面层干扰情况。由图 6 还可清楚地看到分离区内部速度场的情况。

本文利用上述模型，计算了 $M=2.3, Re=72, 720, 7220$ 的流动情况。着重研究了流体粘性对流动的影响。三种流动情况的物面压力分布如图 8 所示，从计算结果中可看出，在

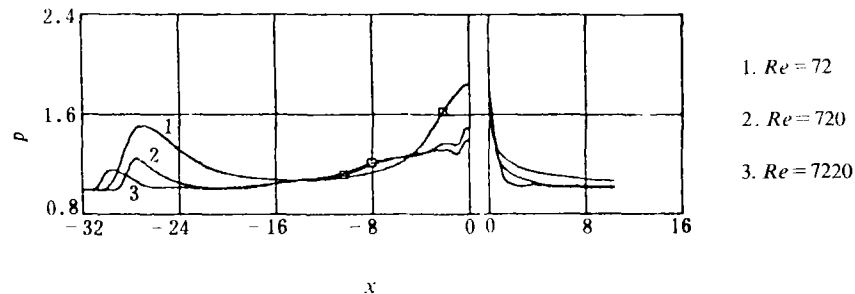


图 8 物面压力分布图

□—分离点 $M=2.3$

本文的计算范围内，随着流体粘性的增加，前缘对流动的影响域随之增大，分离区随之减小，分离区物面压力变化增大。台阶后物面压力经过膨胀恢复到来流压力值。随着流体粘性的增大，激波过渡区也随之增大。

本文利用上述模型，还计算了 $M=0.2, 0.8, 2.3, Re=720$ 的流动情况，着重研究流体可压缩性对流动的影响。物面压力分布如图 9 所示， $M=0.8$ 物面摩阻如图 10 所示。从计算结果中可看出，随着 M 数的增高，前缘影响域增大，分离区也随之增大，分离区物面压力变化增大。对于 $M=0.2$ 的流动情况，物面压力变化不大，说明此时流体可压缩性影响不大。台阶后物面压力结果表明，对于 $M=0.8$ 的高亚音速流动，物面压力经过膨胀，过膨胀逐渐恢复到来流压力值，而对于 $M=2.3$ 的超音速流动，物面压力经过膨胀恢复到来流压力值。这是因为对于超音速流动，由于来流速度很大，由台阶向上游传播的膨胀波被排挤掉（见图 7），使得流场中没有过渡膨胀区。而对于 $M=0.8$ 的高亚音速流动，由于来流速度较

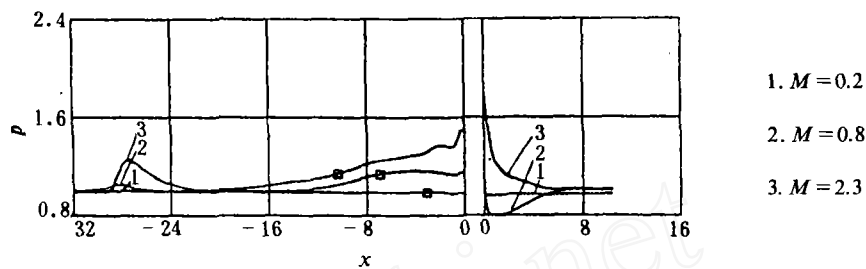


图 9 物面压力分布图 ($Re=720$)

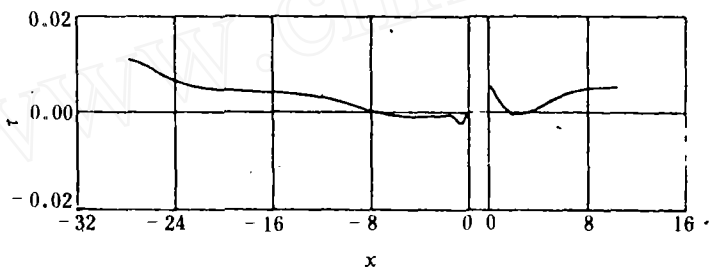


图 10 物面摩擦阻图. $M=0.8, Re=720$.

小, 压缩波和膨胀波都可以得到充分发展, 流场中台阶后有明显的过渡膨胀区, 这些由物面压力分布清楚地表现出来。对于 $M=0.8$ 的流动情况, 由于台阶后膨胀波同物面附近的粘性剪切层作用, 计算中得到了实验中表明的小分离泡(见图 10), 这是以往用可压缩 N-S 方程的数值计算结果中还未见到的。

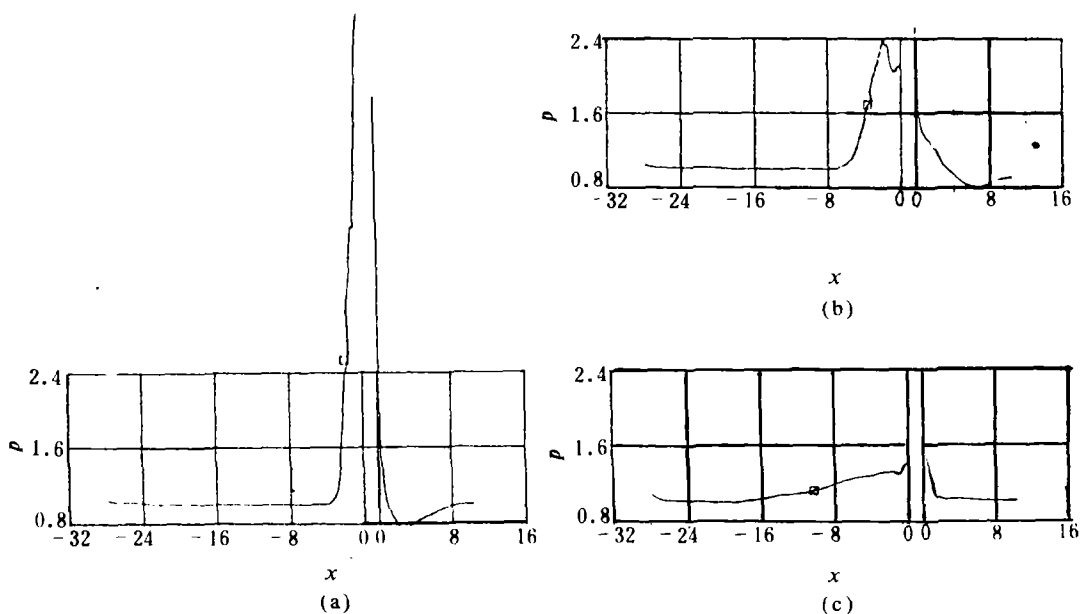


图 11 物面压力非定常过程 $M=2.3, Re=7220$

另外, 从图 11 的物面压力分布图中还可清楚地看到流动的非定常过程。开始时来流与台阶壁面相互作用, 使得台阶前物面压力升高接近滞止压力值。随后, 台阶前流体通过物面附近的亚音速区向前流动, 而外流被带进台阶前, 使得流动发生分离, 台阶前物面压力慢慢降低, 分离区逐渐扩大, 直至定常流动情况。台阶后物面压力表明了, 在此过程中, 过膨胀区被排挤掉的非定常过程。

参 考 文 献

- [1] Fu Dexun, Ma Yanwen: Proceeding of the 9th International Conference On Numerical Methods In Fluid Dynamics, Paris, (1984).
- [2] 马延文, 付德薰: 数值求解 Navier-Stokes 方程的一种新的矩阵方法。计算物理, 2 (1985), 129.
- [3] Ma Yanwen, Fu Dexun: Proceeding of the 10th International Conference On Numerical Methods In Fluid Dynamics. Beijing, (1986).
- [4] В.И. мышенков, "Численное Исследование Отрывного Течения Перед Уступом", М. Ж. Г. No 5, (1979).
- [5] Chapman. D. R., Kuehn. D. M., Larsan. H. K.: Investigation of separated flow in supersonic stream with emphasis on the effect of transition. NACA Rept., (1958) No 1356.

NUMERICAL SIMULATION OF VISCOUS FLOW AROUND FORWARD FACED STEP

wang Li

Beijing Institute of Aerodynamics

Fu Dexun

Academy of Science Institute of Mechanics

ABSTRACT Laminar compressible flow near a forward faced step is simulated numerically using the Navier-Stokes equations. Influence of Mach number and Reynolds number on flow character is studied. The computed results are compared with experiments, and agreement is satisfactory.

KWY WORDS numerical simulation, flow separation, shock-boundary interaction.